



# 藝數摺學之翻摺（變臉）六邊形規律探討

李政憲老師  
新北市林口國中／數學輔導團

## 壹、緣起：

筆者研究摺紙數學已八年有餘〔註1〕，其間也發展了不少頗有趣的課程，直接或間接與中學數學相關。承蒙師大數學系許志農教授協助與上海復旦大學常文武博士指導，有機會將「翻摺六邊形」活動發展成一套課程，嘉惠不少孩子、家長與老師（如圖1、2），也曾指導學生深入研究，特撰此文以饗讀者。



圖1 科教館「藝數翻摺六邊形」親子工作坊



圖2 竹北高中「藝數翻摺多邊形」師生研習營隊  
（圖片來源：李政憲）

## 貳、歷史典故：

「翻摺六邊形」的原名Hexaflexagons，也稱「變臉六邊形」，主要的發想是在1939年時，23歲的Arthur H. Stone從英國到美國求學，結果發現美國的活頁紙比英國的活頁夾來的寬，於是他修剪了多餘的邊，但他覺得剪下的紙條丟了可惜；便將多餘的紙條繞了幾圈後首尾黏合，發現它可以翻轉出多個不同的六邊形，故可以在不同面繪製不同的圖形，造成循環的效果；也進一步與他的大學室友Bryant Tuckerman、Richard Feynman與John Tukey深入研究這個迷人而神奇的環〔註2〕，從三個面到六個面，以迄於十二個面的



翻摺結果，甚至還為它成立了一個團體。而Martin Gardner也在1956年12月在美國的《科學美國人》雜誌作了介紹〔註3〕，而魔術師Doug Henning在1974年百老匯中的魔術秀介紹了他自己構造的變臉六邊形〔註4〕，可見它的歷史悠久，應用廣泛，接下來我們將從摺法談起，逐一討論其數學規律與應用方式。

## 參、摺製方式與數學概念探討：

首先我們需準備一條長方形紙條，長度約為寬度的七倍左右，建議直接將A4影印紙沿短邊五等份後，裁切而得。並在此長方形紙條上製作連續的十個正三角形（如圖3），至於如何製作這十個正三角形，除了借由量角器或尺規等數學工具的基本方式外，在此介紹簡便且具數學性的摺紙方式提供讀者參考，可結合對稱與國中課程，搭配尺規作圖概念，又不需要其他工具輔助即可完成。茲配合圖片說明其步驟如下：

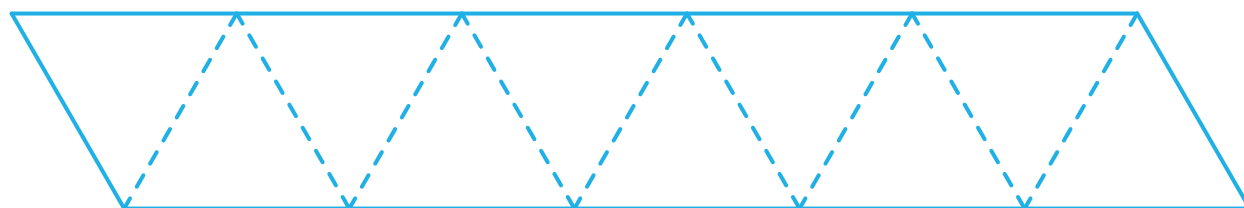


圖3 翻摺六邊形成品示意圖

1. 先將長方形紙張摺出短邊中垂線，使其超過短邊的0.8倍長（如圖4）；
2. 再將左下角直角摺至中垂線上，使摺痕通過左上角（如圖5），所產生的摺痕即為30-60-90度的直角三角形；
3. 沿著步驟2所產生的直角三角形短股向右翻摺，摺出第一個正三角形（如圖6）；
4. 沿著步驟3所產生的正三角形連續向右翻摺，直至產生十個正三角形為止（如圖7）〔註5〕；
5. 將左右多餘的三角形與梯形裁剪後，即可完成如圖3的成品。

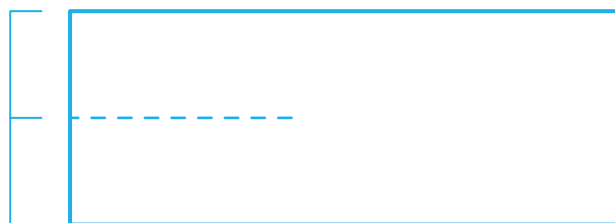


圖4 摺出短邊中垂線

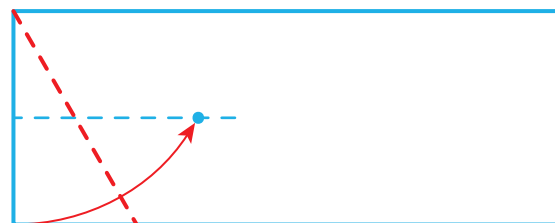


圖5 左下方直角摺至短邊中垂線上

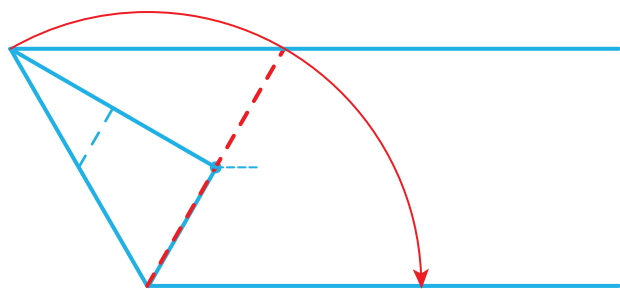


圖6 沿直角三角形短股向右翻摺

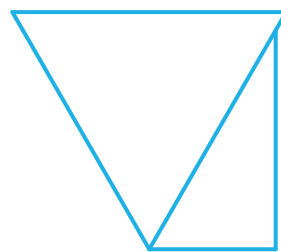


圖7 沿正三角形連續向右翻摺

至此為止，我們一共產生了兩個數學問題，我們接下來分別討論如下：

### 一、為什麼長度約為寬度的七倍：

可考慮連續十個正三角形，其長度為每個三角形的5.5倍，寬度為每個三角形的高，若其邊長為 $a$ ，則 $5.5a : \frac{\sqrt{3}a}{2} = 11 : \sqrt{3}$ ，化簡其比值約為6.35倍。

### 二、為什麼步驟2所產生的摺痕為30-60-90度的直角三角形：

如圖8，在步驟2完成後，我們將短邊中垂線上的直角點 $B$ 與原來的短邊 $AB$ 分別連線，並將原來的短邊中垂線繪製完整，可以發現由於短邊中垂線的原因，我們可得 $\overline{AB'} = \overline{BB'}$ 〔註6〕，又由於摺製時 $\overline{AB} = \overline{AB'}$ ，故可得 $\overline{AB} = \overline{AB'} = \overline{BB'}$ ，即 $\triangle ABB'$ 為正三角形，亦即步驟2所產生的摺痕為30-60-90度的直角三角形；於此也可以一併說明為何短邊中垂線需要超過短邊的0.8倍長的原因。

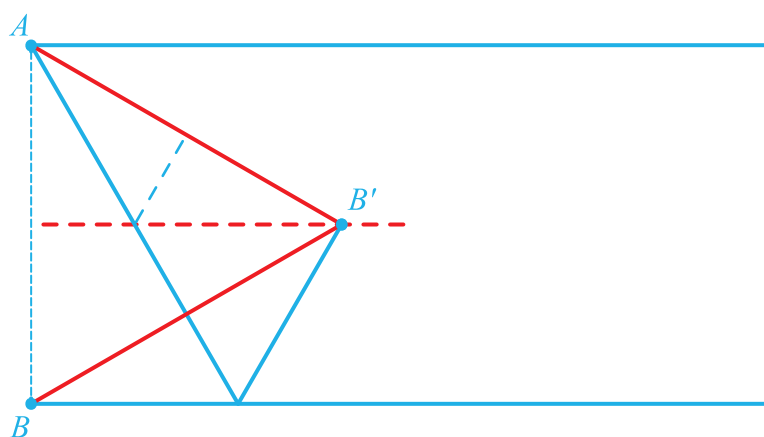


圖8 30-60-90度直角三角形說明示意圖

另外再提到的是，在此步驟所產生的摺痕，雖然是 $\overline{BB'}$ 的中垂線，也是 $\angle BAB'$ 的平分線，不過其所對應到尺規作圖的步驟，卻是以 $A$ 為圓心， $\overline{AB}$ 為半徑，畫弧交於短邊中垂線上的 $B$ 點，也是一個值得思考的數學問題。



## 肆、成品完成方式與翻摺流程圖：

接下來將所完成的十個正三角形，依照每三個三角形翻摺山谷線交錯的方式，再將頭尾以膠水相黏合（如圖9～12）〔註7〕，即可完成一個最簡單的翻摺六邊形。不妨試著將此正六邊形沿著中心點與外部頂點連線，所得到的六條直線山谷線交錯，即可翻摺並繪製不同圖形，得到三種不同的結果（如圖13）。

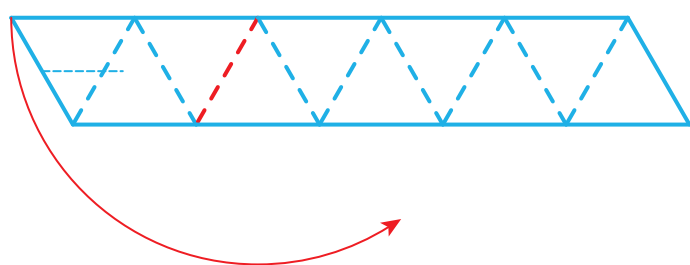


圖9 翻摺六邊形完成方式-1

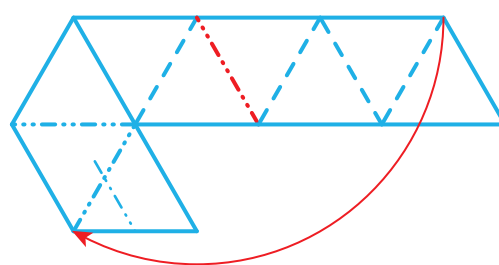


圖10 翻摺六邊形完成方式-2

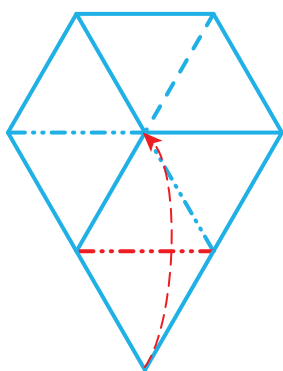


圖11 翻摺六邊形完成方式-3

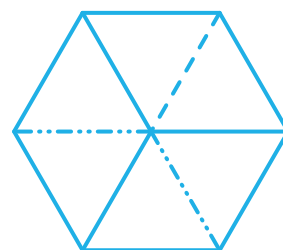


圖12 翻摺六邊形完成方式-4

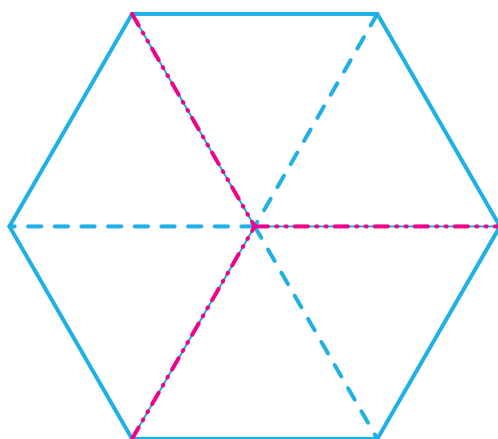


圖13 翻摺六邊形翻摺示意圖



至此可請各位讀者不妨思考一下，為何需要摺製連續十個正三角形，才能完成此作品呢？由於每個六邊形包含了六個正三角形，且每次翻摺的時候均不互相重覆，所以共需 $6 \times 3 = 18$ 個正三角形，又由於最後頭尾的正三角形黏合，故共需20個正三角形，而我們的模型是雙面使用，故僅需 $20 \div 2 = 10$ 個連續的正三角形，即可完成此作品。

接下來若我們將每次翻出來不同的六邊形分別給予編號A、B、C，不失其一般性可以得到 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \cdots$ 的循環過程，可是難道沒有其他可以討論的內容了嗎？

我們不妨一邊翻摺，一邊觀察每一次翻摺的背面圖形，我們可以發現編號A的背面是C，編號B的背面是A，編號C的背面是B；若我們再將此模型翻至背面翻摺，還可以得到 $C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \cdots$ 的循環過程，恰與原來的循環過程相反。我們再跟原來的循環過程相結合，即可繪製出如底下圖14的翻摺流程圖：

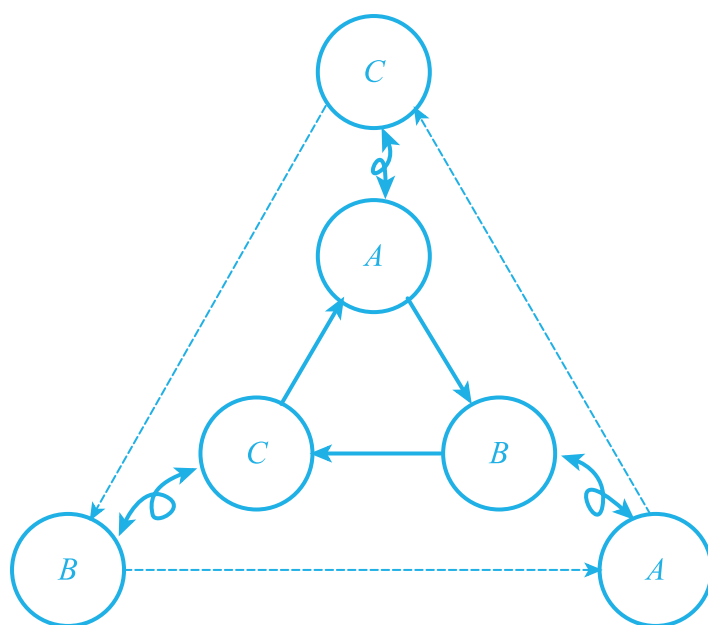


圖14 翻摺六邊形翻摺流程圖

我們想要進一步探究，用此方式是否只能完成三種圖形的翻摺六邊形呢？是否可以再製作翻出更多圖形的翻摺六邊形呢？

接下來我們將製作下一階的翻摺六邊形，也就是六個圖形的版本，根據之前三個圖形的推导方式，所需要的三角形數為 $(6 \times 6 + 2) \div 2 = 19$ 個連續的正三角形，所需要的紙條長寬比為 $10 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 20 : \sqrt{3}$ ，化為比值約為11.5倍，我們可以裁切影印紙



短邊為八～九等份（建議以B4或A3紙張完成比較容易完成，若為八等份會比較容易裁切，但三角形數略有不足，但黏貼後並無影響），並按照之前摺製連續三角形的方式完成連續的十九個正三角形，只是接下來呢？

我們將這十九個正三角形每兩個三角形一組作翻摺（如圖15），可以完成如圖16的示意圖，我們驟然發現，此時恰與圖3的十個正三角形結構相同，只是除了最右側的正三角形外，每個三角形皆為兩層重疊，於是我們可以仿照之前完成上一個作品的方式，一樣完成一個翻摺六邊形。

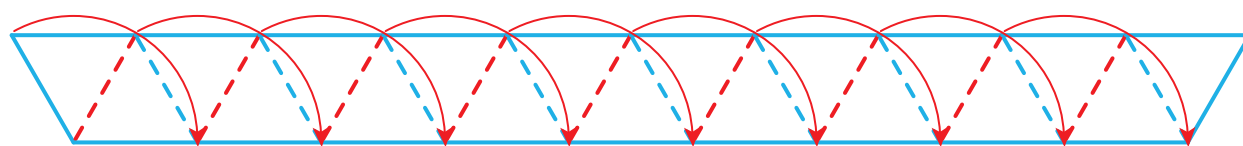


圖15 二階翻摺六邊形製作方式-1

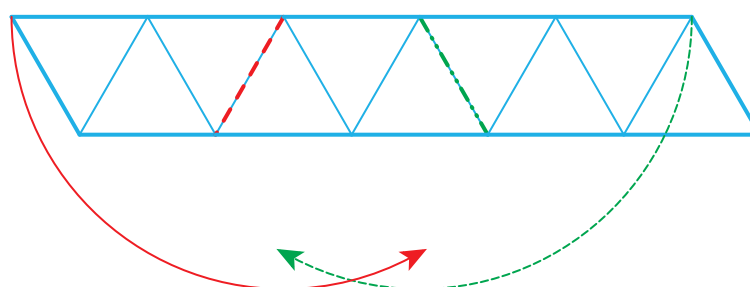


圖16 二階翻摺六邊形製作方式-2

再來我們更關心的當然就是完成的作品是否真的能夠翻出六種不同的圖形呢？為了方便討論起見，我們不妨就將最後的黏合面朝上，並且編號為A，觀察一下成品的六邊形，是否有兩種方式可以翻摺呢？沒錯！只要改變如圖13的山谷線位置，你會發現有兩種翻摺的方式，彼此並造成循環；再接著看一下底下的翻摺流程圖（如圖17），在翻摺的時候不妨可以注意一下，有一種翻摺方式會維持每個正三角形在2層至3層的厚度，我們稱之為內圈，所造成的循環為 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \cdots$ ；至於另一種翻摺方式，則會出現有三個正三角形只有單層的厚度，我們稱之為外圈，所造成的循環若以A為起始點，D為出現有三個正三角形只有單層的厚度，可以形成 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A \cdots$ 的翻摺流程圖（如圖18），是個十分有趣的結果。

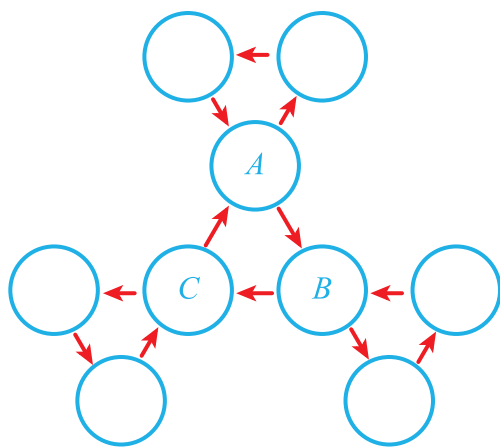


圖17 二階翻摺六邊形翻摺流程圖-1

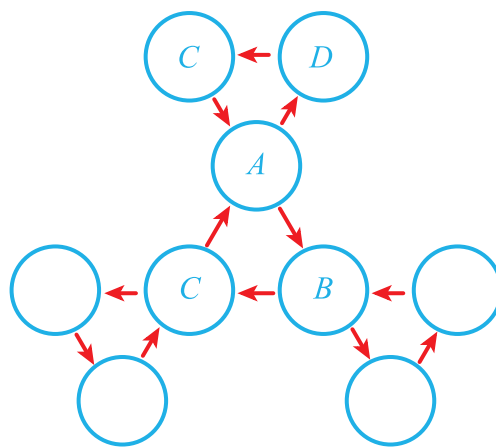


圖18 二階翻摺六邊形翻摺流程圖-2

接下來不妨可以請各位讀者繼續完成其他未完成的流程圖，其實你會發現最後兩種尚未翻出的圖案（我們稱為 $E$ 、 $F$ ），會剛好落在 $B$ 、 $E$ 接續出現的另一種翻法的位置（如圖19），且外圈的 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 與內圈的 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 位置恰為相反的旋轉順序，剛好與第一階的翻摺六邊形不謀而合，十分具有數學性。

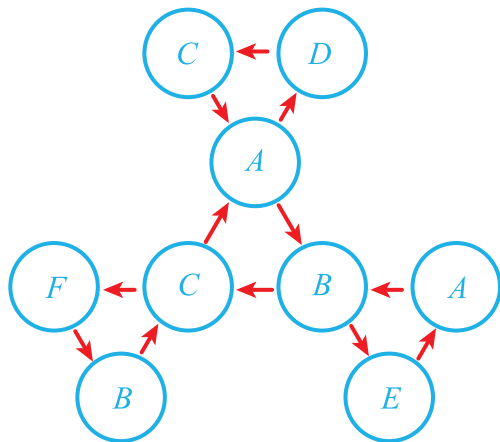


圖19 二階翻摺六邊形翻摺流程圖-3

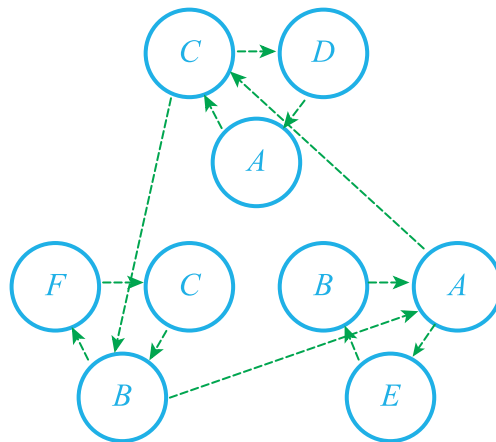


圖20 二階翻摺六邊形反向翻摺流程圖

然而既然一階的翻摺六邊形有正反向的翻摺方式，不曉得二階的六邊形是否也有同樣特性呢？沒錯！若我們將完成的作品反向翻摺，在不改變原來相關點位置的前提下，可以繪製如上圖20的反向翻摺流程圖，有興趣的朋友們不妨可以將圖19與圖20合併為同一個翻摺流程圖，考驗一下您是否可以依此流程圖，雙向翻出所有六種圖形。



不過值得再討論的是，我們在流程圖中，可以很明顯的看出 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 出現的頻率明顯比 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 為高，試想這些不同的圖案在原始圖形中，位置難道也有不同的關係嗎？為了驗證這個猜想，我們將已完成的作品上每個三角形作了編碼後，拆解可以得到如下方正反面的展開圖21、22：



圖21 二階翻摺六邊形正面展開圖

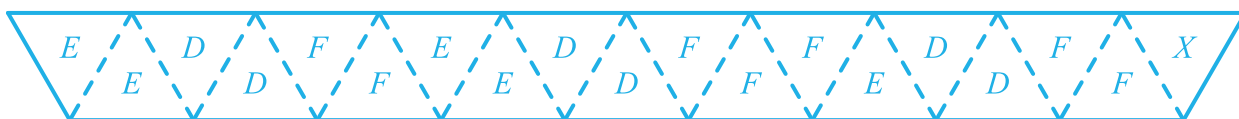


圖22 二階翻摺六邊形反面展開圖

其中 $X$ 所表示的位置為黏合處，而完成此作品需從反面開始重疊對摺起；再對照一下圖19、20的翻摺流程圖，不曉得讀者們看到什麼特別的關係嗎？沒錯！正因為我們先將反面的 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 對摺至內層，所以在翻摺時這三種圖案會在流程圖的外圈，亦即其出現的頻率較低，而後面所翻摺的 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 因為恰與第一階翻摺六邊形的結構相同，所以在流程圖中，也扮演著同樣的角色，這是個十分具有數學結構的課程，十分神奇吧！

當然，若還想深入研究的朋友們，不妨可以再挑戰第三階的翻摺六邊形，只是礙於篇幅與製作上的繁瑣，在此就先暫且不談，或許日後有機會再與各位讀者分享〔註8〕。

## 伍、後記：

這套「翻摺六邊形」課程當初在設計時，可說是一邊製作，一邊探討，承蒙師大數學系許志農教授的協助，先設計了「蜥蜴翻摺六邊形」的一階版本（如圖23）〔註9〕，而在發現了二階的規律後，再製作了「藝數翻摺六邊形」的二階版本（如圖24）〔註10〕，並思考是否有機會製作三階12種圖案的版本。經相關課程教學結束，與當時本校數資班第二屆楊子霏同學互動討論後〔註11〕，遂請子霏同學於國三起花費了近一年半的時間，完成了「十二生肖翻摺六邊形」的三階版本（如圖25），並且繪製出正反面的翻摺流程圖（如圖26），一方面完善了此課程，也藉由從西方大師的經典圖形，到東方十二生肖的活潑生動，為此課程更增添了許多藝術的味道。而由於此課程的數學門檻較低，延伸性也足夠，在推廣時也頗獲學生與教師們的好評；為使相關內容可以讓更多朋友有機會一起研究，希望藉由此文，也可以讓讀者們從實作中體會到「簡單的數學，其實可以不簡單！」的教學目的。

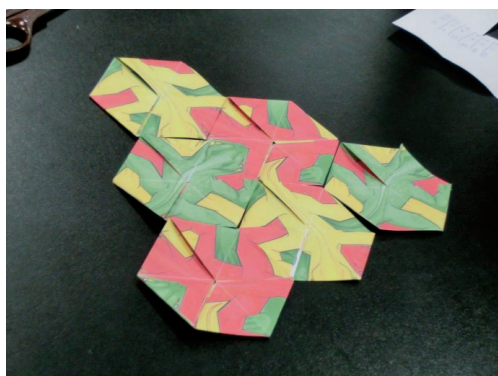


圖23 「蜥蜴翻摺六邊形」拼接成品



圖24 「藝數翻摺六邊形」麗林國小課程實作  
（圖片來源：李政憲）



圖25 「十二生肖翻摺六邊形」林口國中教學

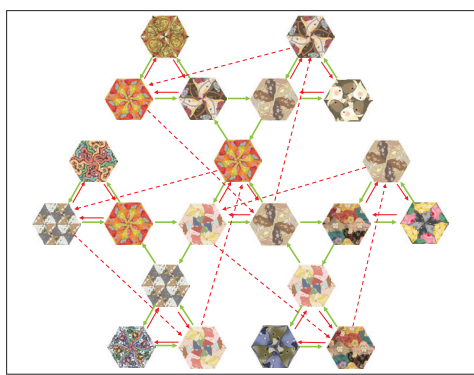



圖26 「十二生肖翻摺六邊形」翻摺流程圖  
（圖片來源：李政憲）






〔註1〕自99年迄今推廣摺紙數學相關課程之簡報教材，均放置於本校數學科網站「林中生命藝數殿堂」：<http://0rz.tw/IQBdi>


QR Code : 

〔註2〕Richard Feynman (1918~1988)，美國著名理論物理學家，1965年諾貝爾獎得主，著有《Surely You're Joking, Mr. Feynman!》: Adventures of a Curious Character (中譯：「別鬧了，費曼先生」，天下文化出版)

〔註3〕科學美國人關於Hexaflexagons的介紹請參考：<https://goo.gl/t5YVvr>

QR Code : 


〔註4〕參考資料來源：<https://goo.gl/3Ad2HD>

QR Code : 

〔註5〕若使用的紙張厚度較厚，建議可以摺製每個60度角的外角平分線，以減少連續翻摺後紙張所產生的誤差。


〔註6〕此處小學可使用對稱方式說明，中學以上則直接使用中垂線性質即可理解。

〔註7〕亦可參考影片製作：<https://goo.gl/vbPk6U>

QR Code : 

〔註8〕若有興趣製作三階以上翻摺六邊形的朋友們，不妨可以購置市面上常見的空白收據紙捲，一方面長度足夠，另一方面因紙張較薄，完成成品在翻摺時也會比較容易；而翻摺流程圖則可參考圖26「十二生肖翻摺六邊形」的流程圖製作。

〔註9〕原作為荷蘭藝術家M.C. Escher (1898~1972)，後由許志農教授數學素養工作團隊重新繪製並上色、製作動畫，放置於「非想非非想」數學網站：<https://goo.gl/P2EfK3>

QR Code : 

〔註10〕同註8

〔註11〕目前就讀於北一女中三年級



# 截半立方體之組合摺紙

連崇馨老師  
高雄市鳳山高中

## 壹、前言

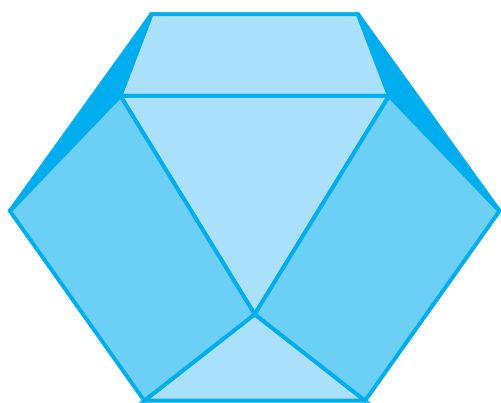
現行的國中教材對於空間幾何的著墨不多，學生對幾何體的認識也不多，以筆者而言在高一多元選修的課堂上發現許多學生對於柏拉圖的正多面體，除了最常見的正立方體（正六面體）外，其餘的多面體並不熟識，甚至曾有學生說他有聽過但沒見過正十二面體與正二十面體。在目前的高中課程裡空間幾何是安排在高二下，也就是說學生在高中中的學習歷程後半段，才有會接觸到真正的空間幾何，但受限於課程進度的壓力，往往認識一下正四面、正八面體，算算一些兩面角的問題，課程便帶入空間向量的代數運算，對於空間的幾何體實際的認識其實也不多，筆者希望藉由多元選修的課程，能補強這方面的不足。

## 貳、課程規劃的動機

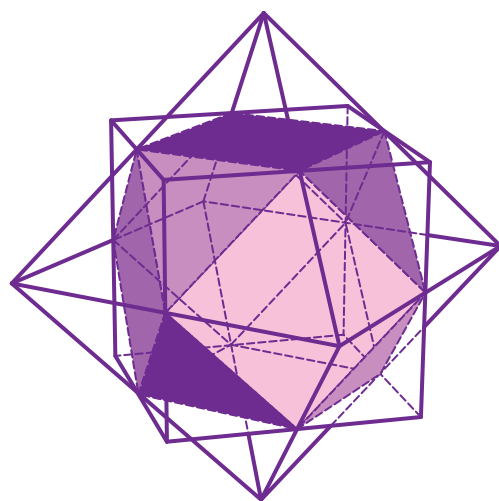
拜網路科技發達所賜，現今網路也有許多的摺紙教學影片，其中與數學較為相關的多面體摺紙及其對應的花球摺紙（kusudama origami）也不少，大部分的花球摺紙都是在多面體的結構上去組成的，而多數學生或初學者，常常是多面體歸多面體，花球就歸花球，並不清楚這兩種摺紙的關係。筆者的經驗裡多數網路教學的花球摺紙最常對應的就是正十二面體與正二十面體的結構，零件數大多為30個零件，30個零件數在摺製的過程上要一點時間，因此若要於選修課程的課堂上操作，再加數學上的討論，需要有充足的時數。

本次的內容筆者將介紹截半立方體的組合摺紙，並將此多面體與花球的摺紙做一對應，藉由此案例，讓讀者們更是了解一般花球摺紙與多面體的數學結構彼此間的緊密關係，日後再操作時有個基本法則可依循。

截半立方體是一種阿基米得立體，是一種十四面體，由八個三角形與六個正方形組成，具有14個面、12個頂點以及24條邊。截半立方體是立方體透過截半變換構造而成的多面體，也可以由立方體的對偶體正八面體透過截半變換構成，因此也稱為截半八面體。



▲圖1



▲圖2

## 參、課程教案分享

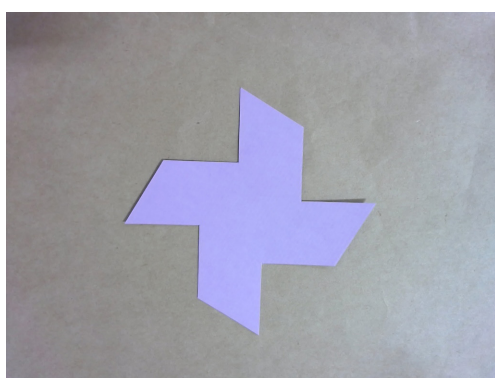
教學流程參考：

教案活動一：截半立方體的組合摺紙

→教案活動二：從截半立方體看花球摺紙的結構

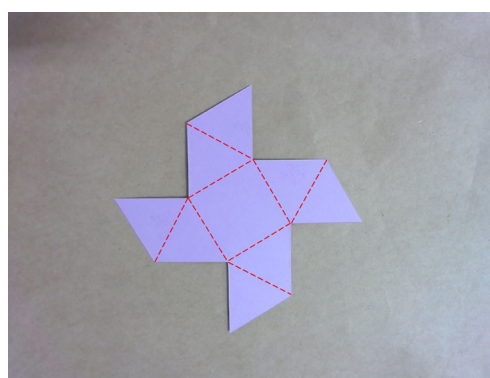
### 一、截半立方體的組合摺紙

截半立方體的插接零件



▲圖3

Step1：將零件翻面摺出圖中的谷摺線



▲圖4

（圖片來源：連崇馨）

Step1-1：過程圖

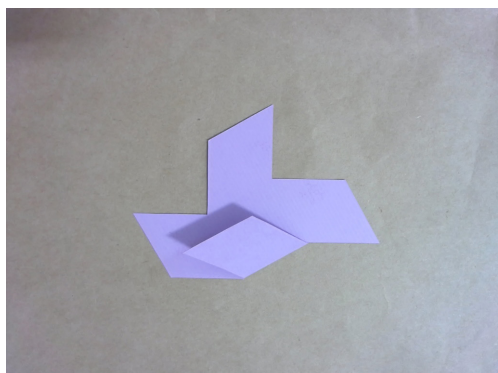


圖5

Step1-2：過程圖

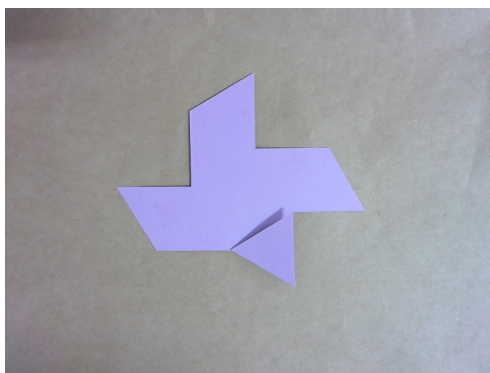


圖6

(圖片來源：連崇馨)

Step1-3：其他三片重複剛剛的動作

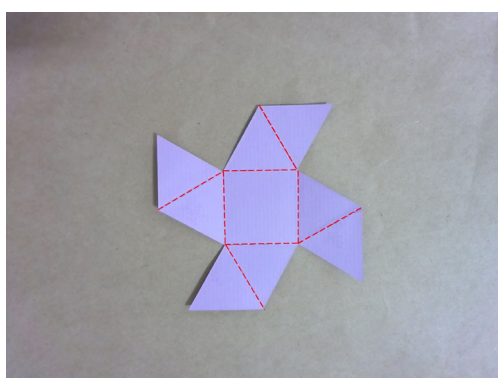


圖7

Step2：依谷摺線將四個葉片向上摺起，並依順時針方向交疊

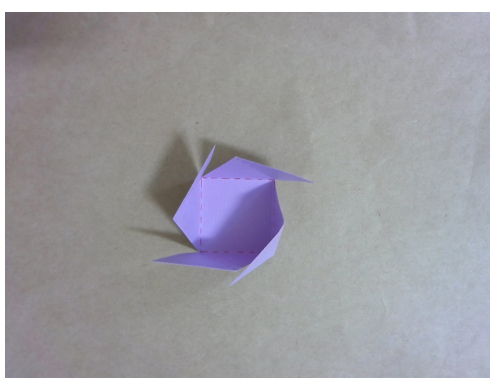


圖8

(圖片來源：連崇馨)

單一零件完成圖

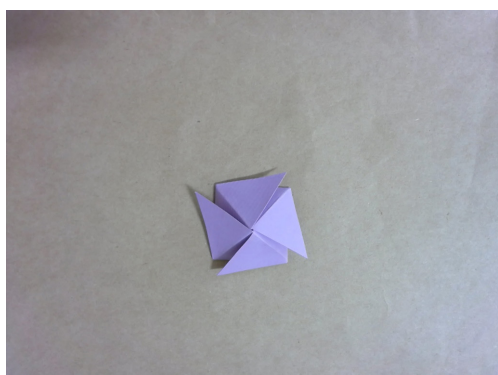


圖9

Step3：完成六個相同的插接零件

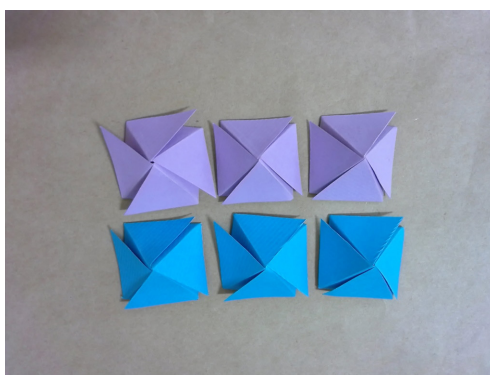
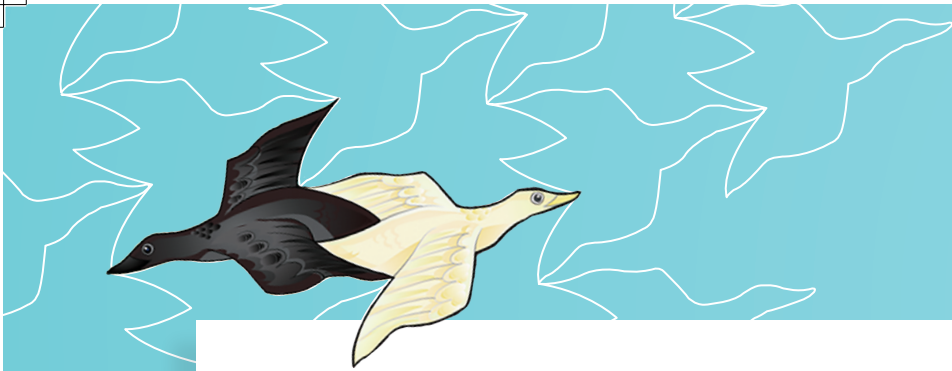


圖10

(圖片來源：連崇馨)





Step4：組裝，兩個零件相對，並分別取其中一葉片插入對方的正方形中

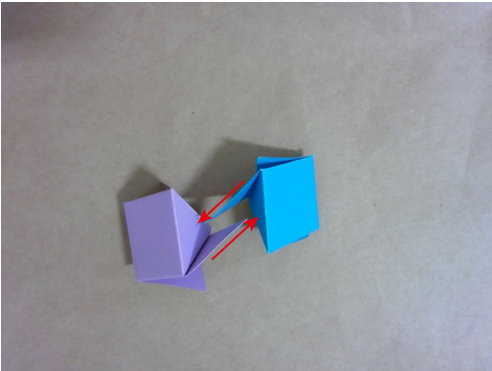


圖11

Step4-1：兩零件完成插接

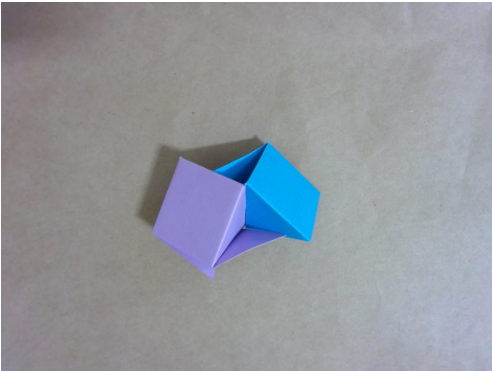


圖12 （圖片來源：連崇馨）

Step5：以相同方式進行第三個零件的插接

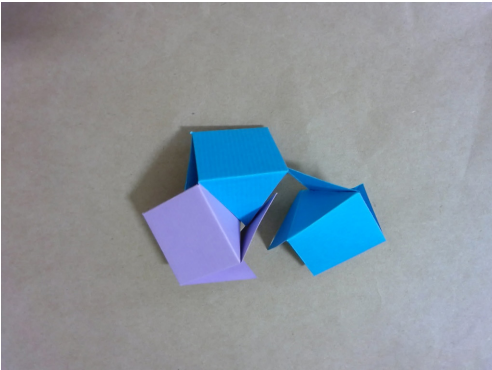


圖13

Step6：以相同方式進行第四個零件的插接

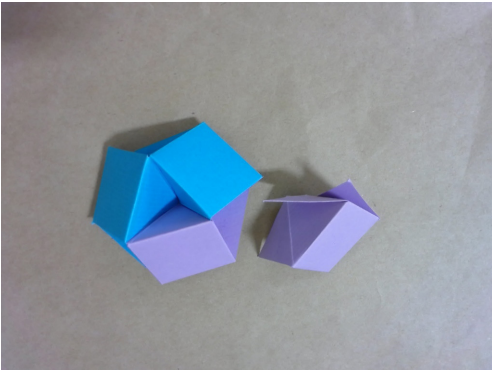


圖14 （圖片來源：連崇馨）

Step7：以相同方式進行第五個零件的插接

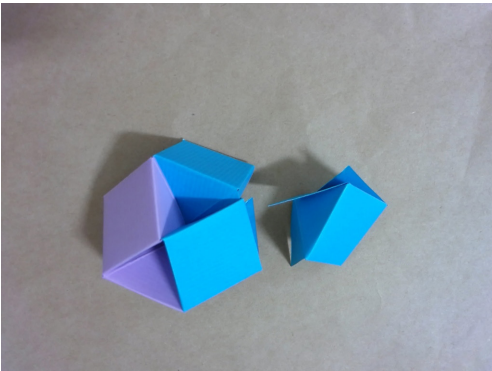


圖15

Step8：以相同方式進行第六個零件的插接

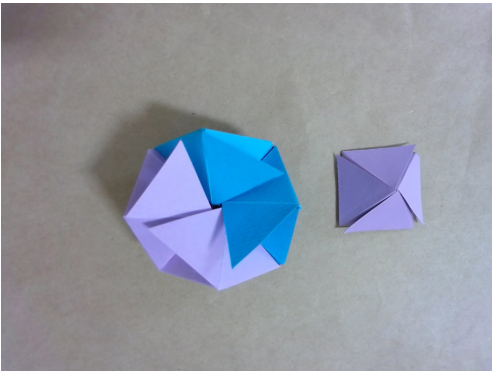


圖16 （圖片來源：連崇馨）



### 截半立方體的插接完成圖

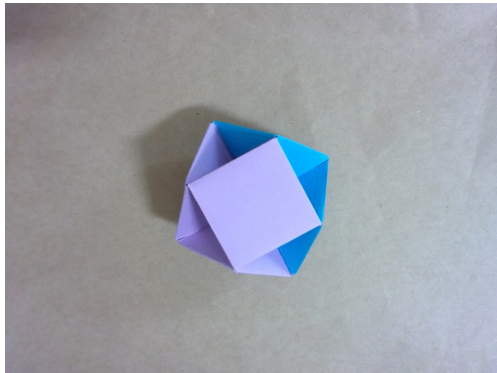


圖17

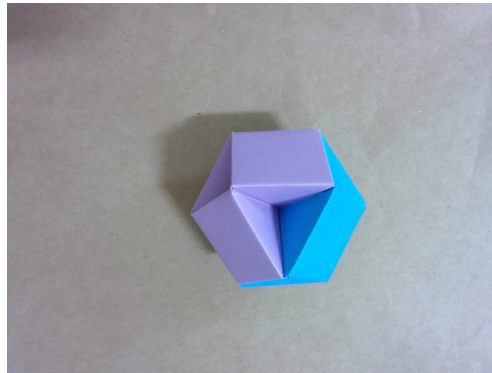


圖18

(圖片來源：連崇馨)

**討論：**插接的截半立方體是由六個相同的零件所組裝的，其每個零件為一正四角錐，老師可利用展開圖與學生討論四角錐的體積及截半立方體與四角錐的體積關係，以及四角錐之兩面角的計算。

數學就在生活裡，截半立方體常出現在橋墩與廟宇階梯的扶手上，下圖為筆者於鳳山的曹公圳所拍攝的圖片



圖19



圖20

(圖片來源：連崇馨)



## 二、從截半立方體看花球摺紙的結構

Step1：將色紙正面朝上，上下、左右四等分



圖21

Step2：翻面，將四個角落往內摺至中心點

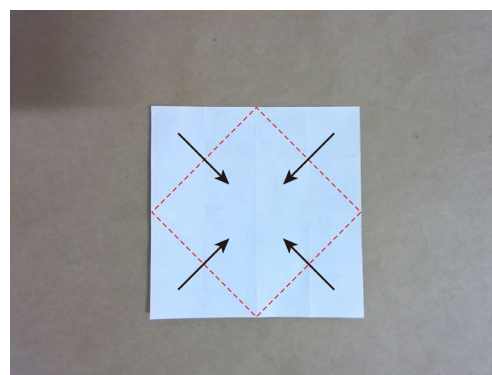


圖22

（圖片來源：連崇馨）

Step2-1：過程圖



圖23

Step3：將紙打開後翻面

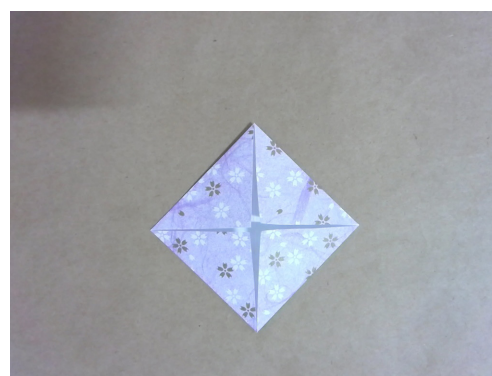


圖24

（圖片來源：連崇馨）

Step4：依圖中的山、谷線將角落收攏



圖25

Step4-1：過程圖



圖26

（圖片來源：連崇馨）



Step4-2：過程圖



圖27

Step5：重複Step4，將另外三個角落收攏

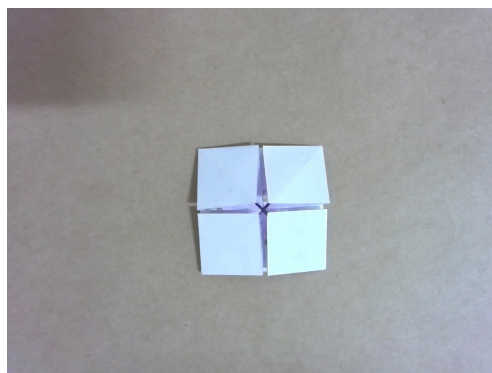


圖28

（圖片來源：連崇馨）

Step6：將色紙翻面

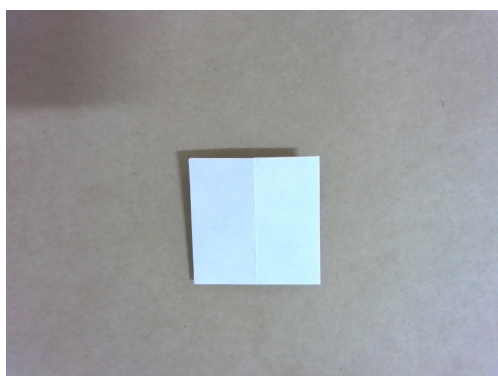


圖29

Step7：將其中的一個角落往內摺至中心點  
下面的紙層順勢向外翻

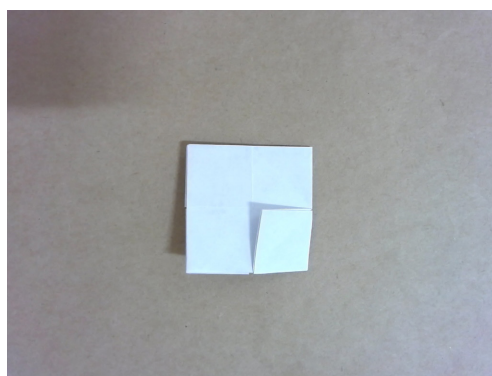


圖30

（圖片來源：連崇馨）

Step8：重複Step7，將另外三個角落摺至  
中心點

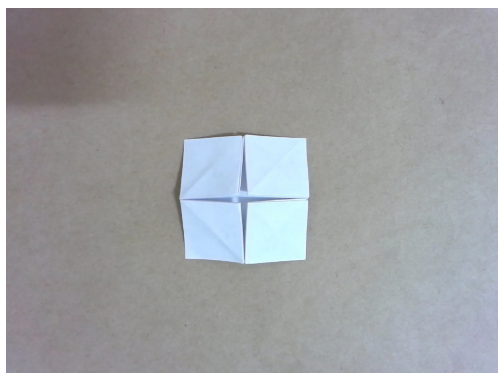


圖31

Step9：色紙翻面，將兩條對角線摺出山摺線

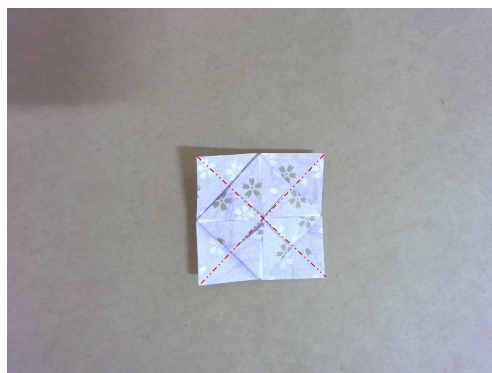


圖32

（圖片來源：連崇馨）



Step9-1：過程圖

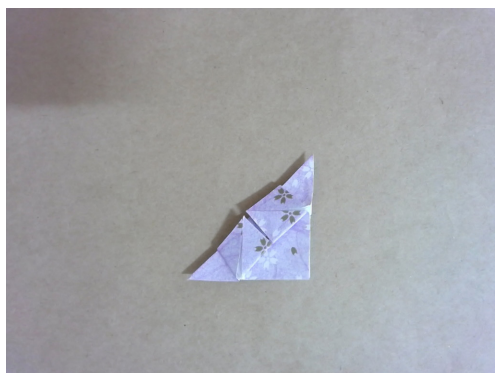


圖33

Step9-2：過程圖

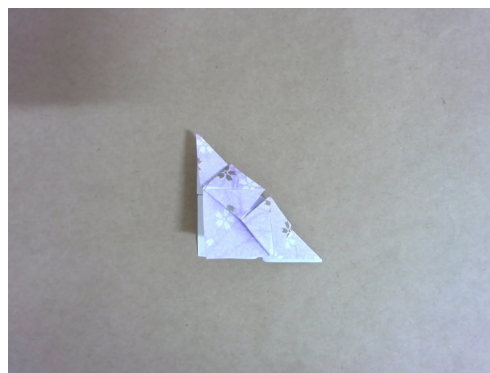


圖34

(圖片來源：連崇馨)

Step10：沿兩條對角線將色紙收成十字星

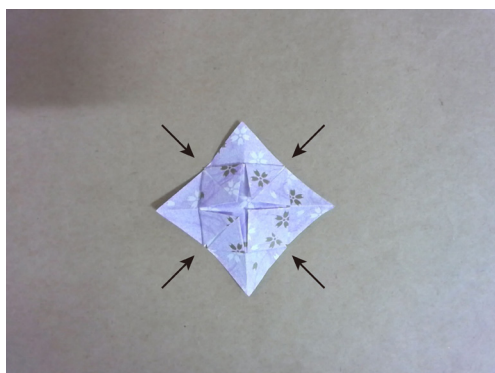


圖35

Step10-1：過程圖

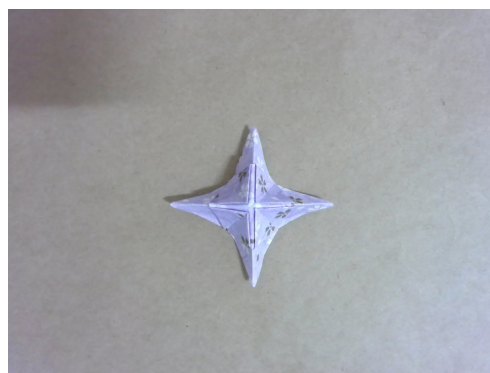


圖36

(圖片來源：連崇馨)

Step11：將紙層向外翻開成花瓣狀

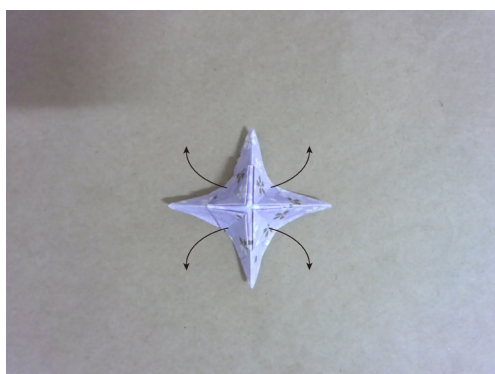


圖37

單一零件完成圖

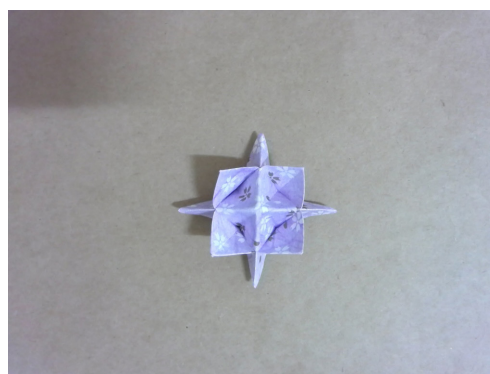


圖38

(圖片來源：連崇馨)



Step12：依上述步驟完成12個零件

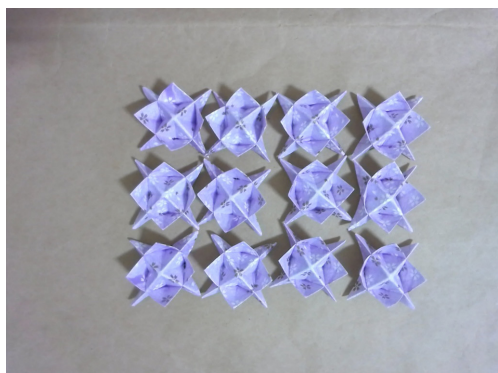


圖39

Step13：組裝，將兩個零件各取一角插合

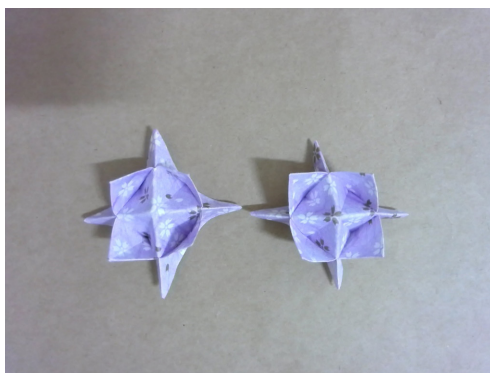


圖40

（圖片來源：連崇馨）

Step12-1：插合時兩零件的紙層是上下交疊此圖為左側在上，右側在下



圖41

Step12-2：將左側紙層插入右側的空隙內即完成兩零件的插合組裝

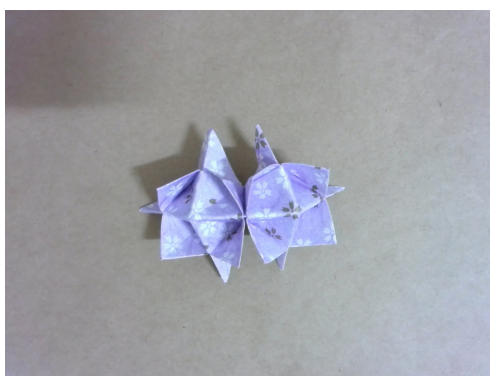


圖42

（圖片來源：連崇馨）

Step13：依相同方式完成三個零件的組裝



圖43

Step13-1：組裝後可形成一個三角形

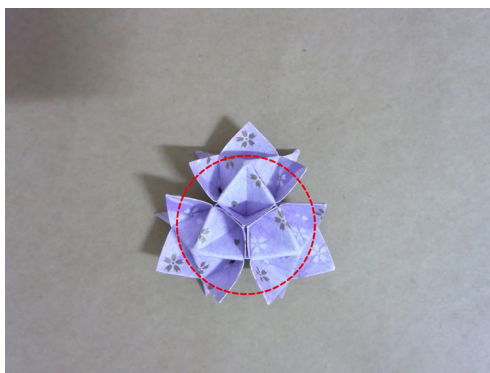


圖44

（圖片來源：連崇馨）





Step14：再取兩個零件以相同方式在三角形的一邊向外組裝形成一個正方形

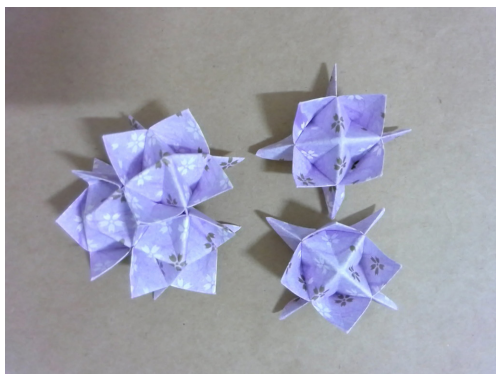


圖45

Step14-1：過程圖

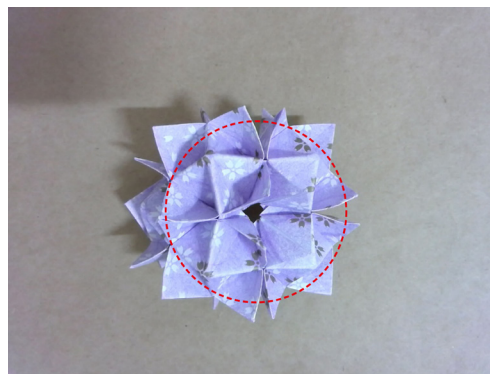


圖46

（圖片來源：連崇馨）

Step15：再取四個零件以相同方式在正方形的每一邊向外組裝形成一個三角形

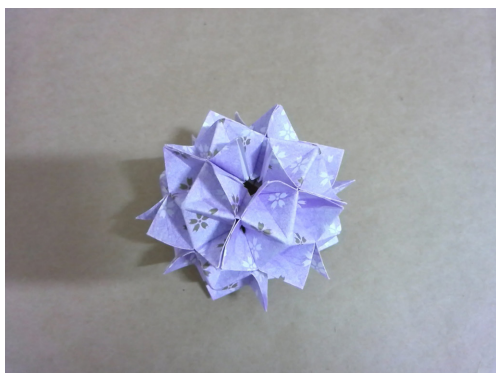


圖47

Step16：依截半立方體的結構進行其他零件的組裝，即可完成！

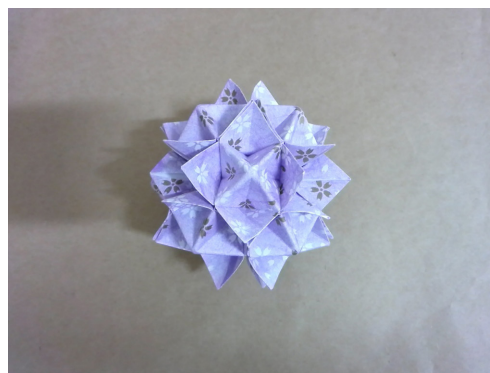


圖48

（圖片來源：連崇馨）

Spike Ball完成圖與截半立方體對照圖

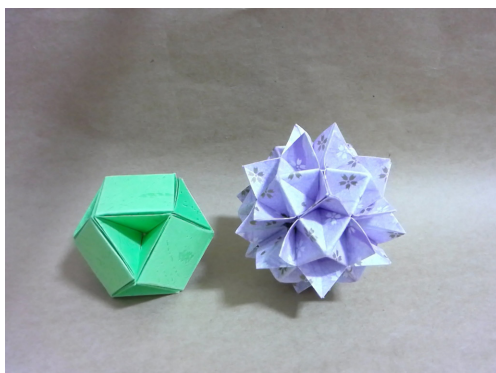


圖49

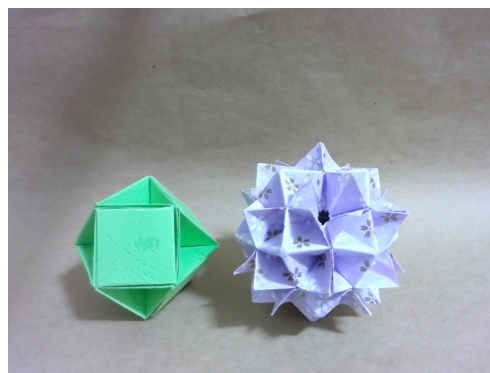


圖50

（圖片來源：連崇馨）

## 肆、結語

如筆者前面所言，現今網路有許多的花球摺紙（kusudama origami）教學，而大部分的花球摺紙都是在多面體的結構上去組成的，以下筆者就以幾個自己摺製的花球為例子帶領讀者們來看看這些花球的幾何結構。

讀者們不妨實際動手看看，您會發現花球摺紙主要是零件的摺法不同，組裝時只要對多面體有些基本的認識，方法其實是大同小異的，筆者於文末的參考資料也提供幾個網路的資源，供有興趣的讀者們參考。

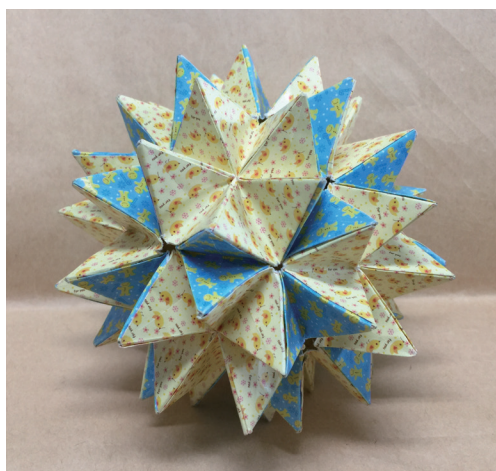


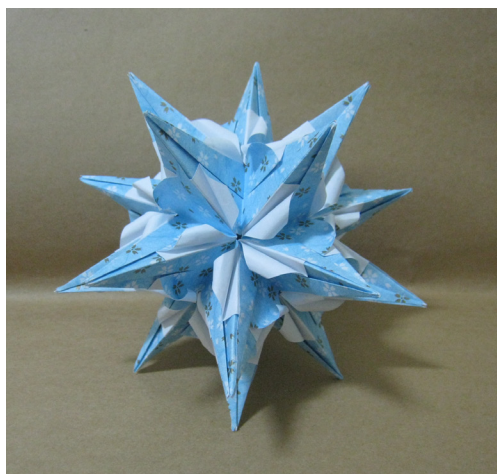
圖51 （圖片來源：連崇馨）

Name : Revealed Flower(Popup Star)  
Designer : Valentina Gonchar  
Units : 90  
對應正十二面體的結構  
（正十二面體的星狀化）



圖52 （圖片來源：連崇馨）

Name : Vinca Star Kusudama  
Designer : Natalia Romanenko  
Units : 30  
對應正二十面體的結構



▲圖53

(圖片來源：連崇馨)

Name : Igel curled variation

Designer : Ekaterina Lukasheva

Units : 30

對應正二十面體的結構

(正二十面體的星狀化)

## 伍、參考資料

1. 維基百科

2. <https://goo.gl/cy9nGD>

QR Code :



3. <http://goorigami.com/>

QR Code :



4. <https://goo.gl/hzqhnP>

QR Code :



5. <http://kusudama.info/>

QR Code :



6. <https://goo.gl/KTKCUg>

QR Code :

