飛機的導航系統運用了積分的技術

第 3 章 微積分及其應用

《數學放輕鬆》

微積分就是微分和積分的合稱。微分是用來研究變化率的，而積分是用來求累積的和（即計算曲線的長度、區域的面積、物體的體積等）。兩者之間就像乘法和除法一樣，有著互為反運算的關係，故必須合起來一起研究，所以合稱為微積分。

微積分的學理，經過無數數學家多年的耕耘，最後由牛頓（Sir Isaac Newton, 1643～1727）與萊布尼茲（Leibniz, 1646～1716）兩位大師集其大成，做出比較有系統的總結。微積分的出現是人類歷史的一件大事，也影響了現代科技的發展。

3-1 極限的概念（數列與函數）

數列的極限是用來標示無窮數列的趨向，而函數的極限則是用來標示函數值在某一特定點附近的變化，兩者表面上似不相關的概念，但在運算上的性質卻非常相似。

3-1.1 無窮數列的極限

在本書第二冊討論數列與級數時曾提及，當數列的項數為無限多項時，稱為無窮數列。本章所討論數列的極限均指無窮數列而言，首先觀察下面的幾個無窮數列：

(1) $\langle\frac{1}{n}\rangle: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$，當 n 趨向無限大時，第 n 項趨近於 0。

(2) $\langle\left(\frac{1}{3}\right)^n\rangle: \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \cdots$，當 n 趨向無限大時，第 n 項趨近於 0。

(3) $\langle 5\rangle: 5, 5, 5, 5, \cdots, 5, \cdots$，當 n 趨向無限大時，第 n 項恆為 5。（各項均為 5）

(4) $\langle\frac{2n+1}{n}\rangle: 3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \cdots, \frac{2n+1}{n}, \cdots$，當 n 趨向無限大時，第 n 項趨近於 2。（$\frac{2n+1}{n}=2+\frac{1}{n}$）

(5) $\langle(-1)^n\rangle: -1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$，當 n 趨向無限大時，第 n 項為 1 或 -1，無法趨近於一個固定的數。

(6) $\langle n^2\rangle: 1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots$，當 n 趨向無限大時，第 n 項趨近於無限大，無法趨近於一個固定的數。

(7) $\langle -n\rangle: -1, -2, -3, -4, \cdots, -n, \cdots$，當 n 趨向無限大時，第 n 項趨近於負無限大，無法趨近於一個固定的數。

一般而言，我們可將無窮數列的極限定義如下：

無窮數列的極限

設〈a_n〉為一無窮數列，α 為一實數，當 n 趨向無限大時，a_n 趨近於 α，則稱數列〈a_n〉收斂於 α，或稱數列〈a_n〉的極限為 α，記作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$。

特別說明

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，這裡的等號表示隨著 n 趨向無限大時，a_n 愈來愈趨近 α，並不代表到最後會 $a_n=\alpha$。

上列各例，我們可以符號表示如下：

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}5=5$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 極限不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$（極限不存在），$\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$（極限不存在）。

特別說明

符號「∞」唸作「無限大」，表示比任何已知的實數都大的一個概念，僅為一數學符號，並無此數。同樣的，「$-\infty$」唸作「負無限大」，表示比任何已知實數都小的一個概念。

當無窮數列的極限存在時，稱為收斂數列；當無窮數列的極限不存在時，稱為發散數列。

關於數列的極限，有下列的運算性質，因證明較繁雜故省略之。

數列極限的運算性質

設〈a_n〉、〈b_n〉為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$，$k$ 為一常數，則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n=k(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)=k\alpha$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n-\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\times b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\times\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$（其中 $\beta\neq0$ 且 $b_n\neq0$ 對所有很大的 n 值都成立）

在本書第二冊第一章無窮等比級數求和的討論中，我們得知，當 $|r|<1$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$。再配合 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$（其中 k 為正數），我們可以處理一些簡單的求極限問題。

小考箱

(　) 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{99}{100}\right)^n$ 極限不存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{100}{99}\right)^n=1$。

例題 1

試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4}{2n^2-3}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-1}{4n^2+7n}$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n}{3n+1}$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4}{2n^2-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{2-\dfrac{3}{n^2}}$（分子、分母同除以 n^2）

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+4\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}2-3\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{0+4\times0}{2-3\times0}=0。$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-1}{4n^2+7n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{n^2}}{4+\dfrac{7}{n}}$（分子、分母同除以 n^2）

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4+7\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{3-0}{4+7\times0}=\frac{3}{4}。$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3+\dfrac{1}{n}}$（分子、分母同除以 n）

當 $n \to \infty$ 時，分子 $2n-1 \to \infty$，

（上式表示：當 n 趨向無限大時，分子 $2n-1$ 亦趨近於無限大）

當 $n \to \infty$ 時，分母 $3+\dfrac{1}{n} \to 3$，

因為分子趨近 ∞，分母為定數 3，分數的極限仍為 ∞，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-n}{3n+1} = \infty$（極限不存在）。

隨堂練習

試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-1}{2n^2-3n}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{3n^2+5}$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n}{4n+3}$

特別說明

觀察例題 1 的結果，我們可以推得在一般情況，直接求取分式型數列的極限如下：

設 $f(n)$、$g(n)$ 為 n 的多項式，則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0，當 \deg f(n) < \deg g(n) \\ f(n) 與 g(n) 領導係數的比值，當 \deg f(n) = \deg g(n) \\ 不存在，當 \deg f(n) > \deg g(n) \end{cases}$$

例題 2

試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{3^n}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-5^n}{3^n+5^n}$

解　利用當 $|r|<1$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0+0=0$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-5^n}{3^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{4}{5}\right)^n-1}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+1}$，（分子、分母同除以 5^n）

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-5^n}{3^n+5^n}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$。

隨堂練習

試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{4^n}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+4^n}{3^n-4^n}$

在求數列的極限時，還有一個重要的性質，那就是夾擠定理，敘述如下：

夾擠定理

設 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$ 為三個無窮數列，且從某一項起，恆有 $a_n\le b_n\le c_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\alpha$（其中 α 為實數），則 $\langle b_n\rangle$ 亦為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha$。

例題 3

試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin n\theta$。

解 因為 $-1\leq\sin n\theta\leq 1$ 恆成立，

故得 $-\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{1}{n}\sin n\theta\leq\dfrac{1}{n}$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，

由夾擠定理知：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin n\theta=0$。

隨堂練習

對於每一個正整數 n，數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $\dfrac{2n^2+1}{4n^2+n}\leq a_n\leq\dfrac{n^2+n}{2n^2+1}$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

3-1.2 函數的極限

考慮函數 $f(x)=2x-1$，當自變數 x 的值愈來愈接近 3（但 $x\neq 3$）時，函數 $f(x)$ 的值會產生怎樣的變化呢？首先觀察 $f(x)$ 在 $x=3$ 附近的一些函數值如下表：

x 逐漸增大向 3 接近 → 3 ← x 逐漸減小向 3 接近

x	2.5	2.7	2.9	2.99	3	3.01	3.1	3.3	3.5
$f(x)$	4	4.4	4.8	4.98	5	5.02	5.2	5.6	6

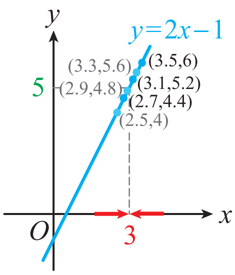
由上面的數據得知：當 x 從左、右兩邊趨近 3（$x\neq 3$）時，函數 $f(x)$ 的值會趨近 5。這種情形我們稱為當 x 趨近 3 時，函數 $f(x)$ 的極限為 5，記作 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=5$。

另外，我們也可以用函數圖形來呈現函數極限的意義。

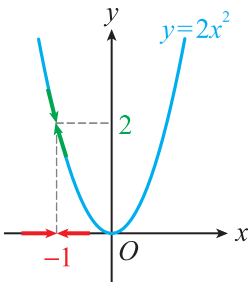
$f(x)=2x-1$，如下圖 3-1 所示，當 $x\to 3$ 時，$f(x)\to 5$，亦即 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$。

再看 $f(x)=2x^2$，如下圖 3-2 所示，當 $x\to -1$ 時，$f(x)\to 2$，亦即 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$。

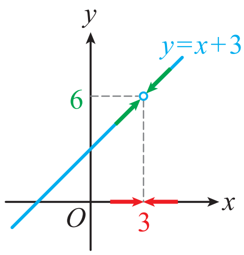
最後再看 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$（$x\neq 3$），當 x 趨近 3 時，因為 $x\neq 3$，故函數可寫成 $f(x)=x+3$（$x\neq 3$），如下圖 3-3 所示，當 $x\to 3$ 時，$f(x)\to 6$，亦即 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$。



▲ 圖 3-1



▲ 圖 3-2

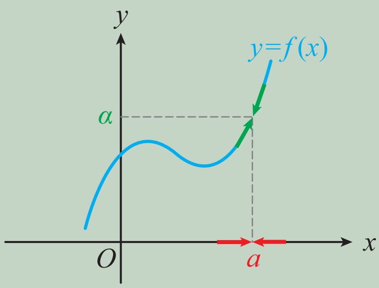


▲ 圖 3-3

一般而言，我們可將函數的極限定義如下：

函數的極限

設 a、α 為實數，若函數 $f(x)$，當 x 趨近於 a 時（由 a 的左、右兩邊趨近，且 $x\neq a$），函數 $f(x)$ 的值會趨近於某一個固定的值 α，則稱當 x 趨近於 a 時，函數 $f(x)$ 的極限為 α，記作 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$。



特別說明

當 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$ 時，必須注意：

(1) 當 x 趨近於 a 時，意指從 a 的左、右兩邊趨近，而且 $x \neq a$。

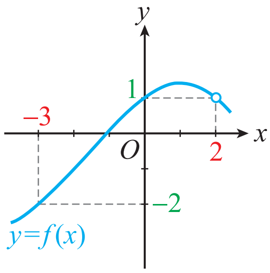
(2) 函數 $f(x)$ 在 a 不一定有定義，亦即 $f(a)$ 可能有意義也可能無意義。

(3) 即使 $f(a)$ 有意義，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 與 $f(a)$ 也不一定相等。

例題 4

設函數 $f(x)$ 圖形如右，試求：

(1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$　(2) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ 的值。



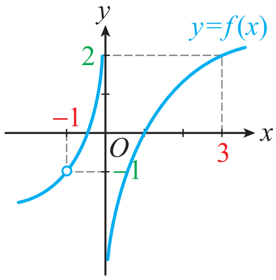
解 (1) 函數 $f(x)$ 的圖形在 $x=2$ 處為一空心點，
亦即 $f(2)$ 的值不存在，
但由圖中觀察得知，
不論 x 從左邊或右邊趨近 2，
函數 $f(x)$ 的值皆會趨近 1，
所以 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$。

(2) 函數 $f(x)$ 的圖形在 $x=-3$ 的函數值為 -2，
亦即 $f(-3)=-2$，
當 $x\to -3$ 時，$f(x)\to -2$，所以 $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=-2$。

隨堂練習

設函數 $f(x)$ 圖形如右，試求：

(1) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$　(2) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ 的值。



觀察函數 $f(x)$ 的圖形（如圖 3-4），當 x 從 a 的右邊趨近 a（即 $x>a$ 且 $x\to a$）時，函數 $f(x)$ 的值趨近於 α；當 x 從 a 的左邊趨近 a（即 $x<a$ 且 $x\to a$）時，函數 $f(x)$ 的值趨近於 β。

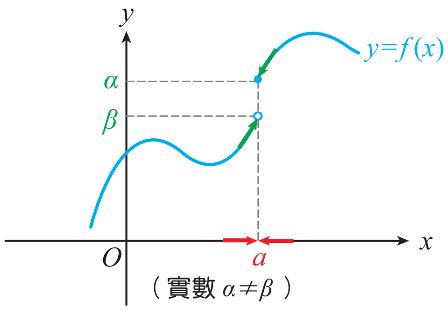


圖 3-4

為了方便起見，我們引進下面的符號：

「$x\to a^+$」表示 x 從 a 的右邊趨近 a（即 $x>a$ 且 $x\to a$）；「$x\to a^-$」表示 x 從 a 的左邊趨近 a（即 $x<a$ 且 $x\to a$）。

左、右極限

(1) 當 x 從 a 的右邊趨近 a 時，函數 $f(x)$ 的值會趨近於定值 α，我們稱 α 為 $f(x)$ 於 a 的右極限，記作 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\alpha$。

(2) 當 x 從 a 的左邊趨近 a 時，函數 $f(x)$ 的值會趨近於定值 β，我們稱 β 為 $f(x)$ 於 a 的左極限，記作 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\beta$。

由函數極限的定義得知：若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$，則 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\alpha$ 且 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\alpha$；反之，若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 都存在，則只有在 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 時，$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 才會存在，而且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$。

因此，我們可得結論如下：

公　式

設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的鄰近區域有定義，則

$$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=\alpha$$

《註》「在 $x=a$ 的鄰近區域」意指，x 取值於大於或小於 a 兩邊任意極小（亦即要多麼小就可多麼小）範圍內的實數值。

小考箱

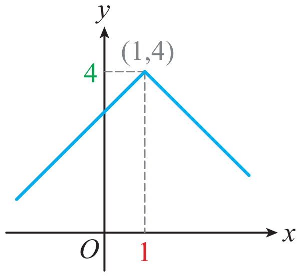
(　) 2.設有一函數 $f(x)$，已知 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3$，$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4$，則 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ 或 4。

例題 5

(1) 設函數 $f(x)=\begin{cases} x+3，當\ x<1 \\ -x+5，當\ x\geq 1 \end{cases}$，試求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

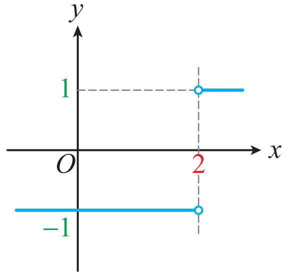
(2) 設函數 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ $(x\neq 2)$，試求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$。

解 (1) 當 $x<1$ 時，$f(x)=x+3$，
當 $x\geq 1$ 時，$f(x)=-x+5$，
所以 $y=f(x)$ 的圖形如右：



當 x 趨近 1（無論從左邊或右邊趨近）時，$f(x)$ 會趨近於 4，
故得 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$。

(2) 當 $x>2$ 時，$f(x)=\dfrac{x-2}{x-2}=1$，
當 $x<2$ 時，$f(x)=\dfrac{-(x-2)}{x-2}=-1$，
所以 $y=f(x)$ 的圖形如右：



當 x 由 2 的右邊趨近 2 時，
$f(x)$ 會趨近於 1，
故得 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$。
當 x 由 2 的左邊趨近 2 時，$f(x)$ 會趨近於 -1，
故得 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-1$。
因為 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 不存在。

隨堂練習

設函數 $f(x)=\begin{cases} x+1，當\ x\geq 1 \\ 2x-3，當\ x<1 \end{cases}$，試求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

雖然數列的極限與函數的極限定義不同，但兩者的運算性質卻非常相似。

函數極限的運算性質

設函數 $f(x)$、$g(x)$ 在 $x=a$ 的極限值分別為 α、β，即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\beta$，又 k 為一常數，則

(1) $\lim\limits_{x\to a} kf(x)=k(\lim\limits_{x\to a} f(x))=k\alpha$

(2) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=\alpha+\beta$

(3) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=\alpha-\beta$

(4) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\times g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times\lim\limits_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}\ (\beta\neq 0)$

例題 6

試求 $\lim\limits_{x\to 3} (2x^3-3x^2+x+2)$。

解 利用 $\lim\limits_{x\to 3} x=3$ 及函數極限的運算性質可得

$\lim\limits_{x\to 3} x^2=\lim\limits_{x\to 3} (x\times x)=(\lim\limits_{x\to 3} x)(\lim\limits_{x\to 3} x)=3\times 3=3^2$，

$\lim\limits_{x\to 3} x^3=\lim\limits_{x\to 3} (x^2\times x)=(\lim\limits_{x\to 3} x^2)(\lim\limits_{x\to 3} x)=3^2\times 3=3^3$，

故得 $\lim\limits_{x\to 3} (2x^3-3x^2+x+2)$

$=2\lim\limits_{x\to 3} x^3-3\lim\limits_{x\to 3} x^2+\lim\limits_{x\to 3} x+\lim\limits_{x\to 3} 2$

$=2\times 3^3-3\times 3^2+3+2=32$。

隨堂練習

試求 $\lim\limits_{x \to -2}(x^3+3x^2+x-5)$。

特別說明

事實上，對於任何正整數 n，$\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ 恆成立。

多項式函數極限的性質

設 $f(x)$、$g(x)$ 為二實係數多項式函數，a 為實數，則

(1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$。

(2) 當 $g(a) \neq 0$ 時，$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$。

例題 7

試求下列各函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x \to 2}(4x-9)^{10}$　　(2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+11}{2x+1}$

解　利用多項式函數極限的性質。

(1) $\lim\limits_{x \to 2}(4x-9)^{10} = (4\times2-9)^{10} = (-1)^{10} = 1$。

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+11}{2x+1} = \dfrac{1^2-3\times1+11}{2\times1+1} = \dfrac{9}{3} = 3$。

隨堂練習

試求下列各函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x \to -1}(2x^{10}-3x^7+4x^5-3)$　　(2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3+4x-3}{x^2-2x+1}$

在求函數極限的問題，有時直接代入會出現 $\frac{0}{0}$ 這種沒有意義的結果，因為 x 趨近於 a 時，$x \neq a$，故 $x-a \neq 0$，將函數中分子、分母的公因式 $x-a$ 約去，適當的變形，再將 $x=a$ 代入變形後的函數，便可得函數的極限。

例題 8

試求下列各函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}$　(2) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

解 (1) $x=3$ 代入 $\frac{x^2-4x+3}{x-3}$ 會得到 $\frac{0}{0}$ 的結果。

當 $x \neq 3$ 時，

$$\frac{x^2-4x+3}{x-3}=\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}=x-1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-1)=3-1=2$。

(2) $x=9$ 代入 $\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ 會得到 $\frac{0}{0}$ 的結果。

當 $x \neq 9$ 時，

$$\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\frac{1}{\sqrt{x}+3},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$。

隨堂練習

試求下列各函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

3-1.3 函數的連續

為了方便說明，我們先介紹區間的表示法，設 a、b 為實數，且 $a<b$，$\mathbb{R}$ 為所有實數所成的集合，則規定

(1) $[a,b]=\{x \mid a\leq x\leq b，x\in\mathbb{R}\}$。

(2) $(a,b)=\{x \mid a<x<b，x\in\mathbb{R}\}$。

(3) $[a,b)=\{x \mid a\leq x<b，x\in\mathbb{R}\}$。

(4) $(a,b]=\{x \mid a<x\leq b，x\in\mathbb{R}\}$。

其中 $[a,b]$ 為閉區間，(a,b) 為開區間，而 $[a,b)$ 與 $(a,b]$ 為半開閉區間。

特別說明　除了上面所說明的區間外，我們還規定

$(-\infty,a]=\{x \mid x\leq a，x\in\mathbb{R}\}$，$(-\infty,a)=\{x \mid x<a，x\in\mathbb{R}\}$，

$[a,\infty)=\{x \mid x\geq a，x\in\mathbb{R}\}$，$(a,\infty)=\{x \mid x>a，x\in\mathbb{R}\}$。

當一函數的圖形已描繪出來，從圖形上可看出這函數在某一特定點連續或不連續。直觀而言，當函數 $f(x)$ 的圖形 $y=f(x)$ 在點 $(a,f(a))$ 沒有斷裂，則函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續。在 3-1.2 節中，我們曾提及函數的極限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 與函數值 $f(a)$ 可能相等也可能不相等。現在，我們將函數的連續定義如下：

函數的連續

函數 $f(x)$ 滿足下列三個條件：

(1) $f(x)$ 在 $x=a$ 有定義（即 $f(a)$ 存在）。

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在。

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

則稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續。

當函數 $f(x)$ 在定義域中的每一點都連續時，我們稱 $f(x)$ 為連續函數。

《註》函數 $f(x)$ 的定義域，是指自變數 x 所有可取值的集合。

小考箱

(　) 3. 已知函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 連續，則函數 $f(2)$ 的值存在，而且 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 也存在，並滿足 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$。

設函數 $f(x)$ 的定義域為 $[a,b]$，我們稱 $f(x)$ 為連續函數，意指函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上的每一點都連續。閉區間 $[a,b]$ 包含端點 a 和 b，因此函數 $f(x)$ 在端點 a、b 也是連續，這表示它必須滿足

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)\text{，}\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)\text{，}$$

另外，因為多項式函數的定義域為 $\mathbb{R}$，設 $f(x)$ 為多項式函數，對於任一實數 a 均滿足

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\text{，}$$

所以多項式函數都是連續函數，其圖形都是連續不斷的。

例題 9

設函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}\text{，當 } x\neq 3\\ 5\text{，當 } x=3\end{cases}$，則 $f(x)$ 在 $x=0$，$x=3$ 是否連續？

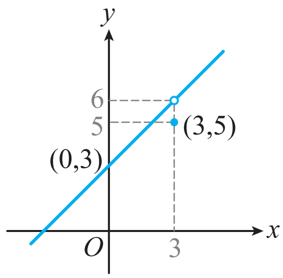
解 $f(0)=\dfrac{0^2-9}{0-3}=3$，$f(3)=5$，

又 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 0}(x+3)=3$，

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$，

故得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$，$\lim\limits_{x\to 3} f(x)\neq f(3)$，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 連續，在 $x=3$ 不連續。



隨堂練習

設函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}，當\ x\neq 1\\ 2，當\ x=1\end{cases}$，則 $f(x)$ 在 $x=1$ 是否連續？

例題 10

設函數 $f(x)=\begin{cases}x^2+5，當\ x\geq 1\\ kx-2，當\ x<1\end{cases}$ 為連續函數，試求實數 k 的值。

解 因為 $f(x)$ 為連續函數，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 連續，

故知 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$，

又 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+5)=6$，

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(kx-2)=k-2$，

因為 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在，故得 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$，

亦即 $6=k-2$，所以 $k=8$。

隨堂練習

設函數 $f(x)=\begin{cases}x^2+a，當\ x\geq 1\\ 2x^2+3x-1，當\ x<1\end{cases}$ 為連續函數，試求實數 a 的值。

習題 3-1

1. 試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+4}{4n^3+n-1}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-100n}{3n^2+5}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n}{7n+2}$　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\times4^n-3^n}{4^n+(-3)^n}$

2. 試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n}{n+1}-\dfrac{n^2+1}{n-1}\right)$。

3. 對於每一個正整數n，數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足$2n^2-1\leq(3n^2+1)a_n\leq2n^2+n+3$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

4. 設函數$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}，當\ x\neq0\\0，當\ x=0\end{cases}$，試求：

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$　(2) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$　(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

5. 試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}(2x^4-3x^3+4x-2)$　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^3+3x+1}$

(3) $\lim\limits_{x\to2}\left[\left(\dfrac{3}{x-2}\right)\left(\dfrac{3}{x+1}-1\right)\right]$　(4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$

6. 設 a 為實數，已知 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x+a}{x-2}=3$，試求 a 的值。

7. 設函數$f(x)=\begin{cases}2x^2-k，當\ x\geq2\\x^2+kx-11，當\ x<2\end{cases}$ 為連續函數，試求實數 k 的值。

8. 當 $x\neq2$ 時，函數$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$，若函數$f(x)$ 在 $x=2$ 連續，試求 $f(2)$ 的值。

3-2 多項式函數的導數與導函數

3-2.1 導數的意義

1. 幾何意義：

欲求過函數 $y=f(x)$ 圖形上一點 $A(a,f(a))$ 的切線 L 之斜率，我們可以討論如下。設 $P(x,f(x))$ 為圖形上異於 A 的任意一點，則割線 PA 的斜率為 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$，如右圖 3-5 所示。

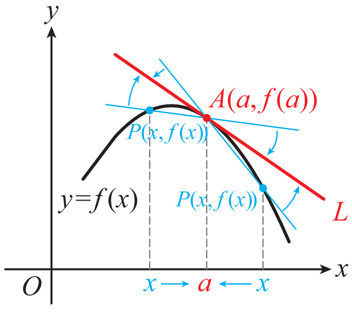


圖 3-5

當 P 點沿著 $y=f(x)$ 的圖形逐漸向 A 點趨近時，割線 PA 也逐漸趨近切線 L，此時割線 PA 的斜率也會趨近切線 L 的斜率，若極限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在，則切線 L 的斜率就是 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$。

現在，我們將導數定義如下：

導數的定義

設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 及鄰近區域都有意義，若極限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在時，我們稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數存在，並稱此極限值為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數，記作 $f'(a)$，即

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

當函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數 $f'(a)$ 存在時，我們稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分；若 $f'(a)$ 不存在時，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 不可微分。

特別說明　由導數的定義可知，當函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分，則函數 $y=f(x)$ 的圖形在點 $A(a,f(a))$ 的切線斜率為 $f'(a)$，且切線方程式為 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$。

例題 1

已知點 $A(2,4)$ 在函數 $f(x)=x^2$ 的圖形上，試求過點 A 的切線方程式。

解　已知 $A(2,4)$ 為 $f(x)=x^2$ 圖形上的一點，

又 $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)$

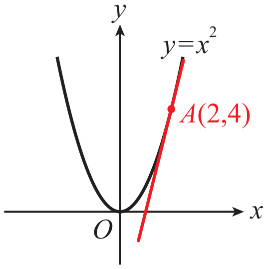
$=2+2=4$，

故得過點 $A(2,4)$ 的切線斜率為 4。

由點斜式知：

所求切線方程式為 $y-4=4(x-2)$，

化簡得 $4x-y-4=0$。



小幫手

點斜式：

過點 (x_1, y_1)，斜率為 m 的直線方程式為 $y-y_1=m(x-x_1)$

隨堂練習

已知點 $P(-1,2)$ 在函數 $f(x)=2x^2$ 的圖形上，試求過點 P 的切線方程式。

2.　物理意義：

設函數 $f(t)$ 表示運動物體在時刻 t 的位置函數，則運動物體從時刻 t 到時刻 a（$t\neq a$）之間的平均速度為 $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$。又瞬時速度表示極短時間內的平均速度，當 $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ 存在時，運動物體在時刻 a 的瞬時速度為 $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$，亦即當運動物體的位置函數 $f(t)$ 在 $t=a$ 可微分，則運動物體在時刻 a 的瞬時速度為 $f'(a)$。

例題 2

設一運動物體在時刻 t 秒的位置函數為 $f(t)=2t^3$（單位為公尺），試求：

(1) 此運動物體在時刻 $t=1$ 到 $t=3$ 之間的平均速度。

(2) 此運動物體在時刻 $t=2$ 的瞬時速度。

解 (1) 在時刻 $t=1$ 到 $t=3$ 之間的平均速度為

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{2\times3^3-2\times1^3}{2}=26\text{（公尺/秒）。}$$

(2) 在時刻 $t=2$ 的瞬時速度為

$$f'(2)=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\lim_{t\to2}\frac{2t^3-2\times2^3}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to2}\frac{2(t-2)(t^2+2t+4)}{t-2}=\lim_{t\to2}2(t^2+2t+4)$$

$$=2(2^2+2\times2+4)=24\text{（公尺/秒）。}$$

隨堂練習

一自由落體在時刻 t 秒的位置函數為 $f(t)=4.9t^2$（單位為公尺），試求：

(1) 此自由落體在時刻 $t=1$ 到 $t=5$ 之間的平均速度。

(2) 此自由落體在時刻 $t=5$ 的瞬時速度。

3-2.2 多項式函數的導數

由導數的定義，我們可以直接求得多項式函數的導數。

例題 3

設函數 $f(x)=2x^2+3x-5$，試求 $f(x)$ 在 $x=1$ 的導數。

解 $f(x)$ 在 $x=1$ 的導數為

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(2x^2+3x-5)-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+5)}{x-1}=\lim_{x\to1}(2x+5)=2\times1+5=7。$$

隨堂練習

設函數 $f(x)=-x^2+2x-4$，試求 $f(x)$ 在 $x=3$ 的導數。

下面例題 4、例題 6 雖然不是多項式函數，但仍可利用導數的定義直接求導數。

例題 4

設函數 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+4)}$，試求 $f(x)$ 在 $x=2$ 的導數。

解 $f(x)$ 在 $x=2$ 的導數為

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+4)}-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{(x-3)(x+4)}=\frac{2+1}{(2-3)(2+4)}=-\frac{1}{2}。$$

隨堂練習

設函數 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)}{2x+1}$，試求 $f(x)$ 在 $x=-2$ 的導數。

導數 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$，若令 $x-a=h$，則 $x=a+h$。當 $x\to a$，意指 $h\to 0$，因此函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數亦可表示為 $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。

例題 5

設函數 $f(x)=x^2-x+3$，試求 $f(x)$ 在 $x=-1$ 的導數。

解 $f(x)$ 在 $x=-1$ 的導數為

$$\begin{aligned}
f'(-1)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{[(-1+h)^2-(-1+h)+3]-5}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(1-2h+h^2+1-h+3)-5}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0}(h-3)=-3。
\end{aligned}$$

隨堂練習

設函數 $f(x)=2x^2+3$，試求 $f(x)$ 在 $x=1$ 的導數。

例題 6

試求函數 $f(x)=|x-2|$ 在 $x=2$ 的導數。

解 由導數的定義知

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}，$$

又 $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}1=1$，

而 $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}(-1)=-1$，

因為 $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}$，

所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ 不存在，

故知 $f(x)=|x-2|$ 在 $x=2$ 的導數不存在。

隨堂練習

試求函數 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的導數。

設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在（等於 $f'(a)$），

$$\begin{aligned}\text{故得 }\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]&=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)\right]\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)\\&=f'(a)\times(a-a)=0\end{aligned}$$

亦即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，所以函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續。

反之，函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，但未必可微分。例如：函數 $f(x)=|x-2|$，因為 $f(2)=|2-2|=0$，又 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}|x-2|=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=2-2=0$，而 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}|x-2|=\lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)=2-2=0$，故得 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$，所以 $f(x)=|x-2|$ 在 $x=2$ 連續，但由前面例題 6 知 $f(x)=|x-2|$ 在 $x=2$ 不可微分。因此，我們可得結論如下：

可微分與連續的關係

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 必連續。反之，函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，但 $f(x)$ 在 $x=a$ 未必可微分。

小考箱

(　) 4.已知函數 $f(x)$ 在 $x=3$ 可微分，則 $f(x)$ 在 $x=3$ 必連續，又函數 $f(x)$ 在 $x=5$ 連續，則 $f(x)$ 在 $x=5$ 可微分。

3-2.3 導函數

考慮函數 $f(x)=x^2+3x$，對於任意實數 a，由導數的定義可得

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2+3x)-(a^2+3a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)+3(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a+3)=2a+3。$$

亦即對於定義域中的每個實數 a，都有唯一的數 $f'(a)=2a+3$ 與之對應，這種對應關係形成了另一個函數，稱為函數 $f(x)=x^2+3x$ 的**導函數**，記作 $f'(x)=2x+3$。我們將它一般化，可得導函數的定義如下：

導函數

設函數 $f(x)$ 的定義域為 D（$D\subset R$），又 C 為 D 中導數存在的所有數所成的集合（$C\subset D$），對於 C 中的每一個數 a，都恰有一個數 $f'(a)$ 與之對應，這種對應形成一種函數關係，稱為 **$f(x)$ 的導函數，記作 $f'(x)$**，其定義域為 C。當 $f'(x)$ 與 $f(x)$ 的定義域相同（亦即 $C=D$）時，表示函數 $f(x)$ 在定義域 D 中每一個數的導數都存在，我們稱 $f(x)$ 為**可微分函數**。

例題 7

試求函數 $f(x)=x^3+x^2+x+1$ 的導函數。

解 設 a 為任意實數，由導數的定義可得

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^3+x^2+x+1)-(a^3+a^2+a+1)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x^3-a^3)+(x^2-a^2)+(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}[(x^2+ax+a^2)+(x+a)+1]$$

$$=a^2+a^2+a^2+a+a+1=3a^2+2a+1，$$

所以 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2+2x+1$。

隨堂練習

試求函數 $f(x)=2x^2-3x+4$ 的導函數。

若函數 $f(x)$ 為可微分函數，我們亦可利用 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 直接求導函數。

例題 8

試求函數 $f(x)=x^2+2x+3$ 的導函數。

解 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^2+2(x+h)+3]-(x^2+2x+3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2hx+h^2+2x+2h+3)-(x^2+2x+3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h+2)=2x+2。$$

隨堂練習

試求函數 $f(x)=2x^2-4x+5$ 的導函數。

習題 3-2

1. 已知點 $A(1,3)$ 在函數 $f(x)=x^3+2$ 的圖形上，試求過點 A 的切線方程式。

2. 一運動物體在時刻 t 秒時的位置函數為 $f(t)=10t^2-24$（單位為公尺），試求此運動物體在時刻 $t=3$ 的瞬時速度。

3. 試求函數 $f(x)=x^4-4x^2$ 在 $x=2$ 的導數。

4. 設函數 $f(x)=\dfrac{x(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-3)}$，試求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的導數。

5. 設函數 $f(x)=x^2+6x-7$，試求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{5h}$ 的值。

6. 設函數 $f(x)=\begin{cases}2x+1\text{，當 } x\geq 4\\ 3x+4\text{，當 } x<4\end{cases}$，試求 $f(x)$ 在 $x=2$，$x=5$ 的導數。

7. 試求函數 $f(x)=4x^2-3x+1$ 的導函數。

8. 試利用 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，求函數 $f(x)=3x^2-4x+10$ 的導函數。

3-3 微分公式

求函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 的過程稱為微分。函數 $y=f(x)$ 的導函數，除可用 $f'(x)$ 來表示外，亦可用下面各符號來表示：y'、$\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d}{dx}f(x)$。

3-3.1 微分公式

在前面 3-2 節中，求導數及導函數的計算方法都是根據導數的定義直接求得，過程較為繁雜，下面我們介紹一些求導函數的法則，稱為微分公式。

微分公式

(1) 若 $f(x)=c$（c 為常數），則 $f'(x)=0$。
(2) 若 $f(x)=x^n$（n 為正整數），則 $f'(x)=nx^{n-1}$。

【說明】設 a 為任意實數，則

(1) $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{c-c}{x-a}=0$，

故得 $f'(x)=0$。

(2) 因為 $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$，

所以 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

$$=\underbrace{a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}}_{\text{共有 } n \text{ 個 } a^{n-1}}$$

$$=na^{n-1}，$$

故得 $f'(x)=nx^{n-1}$。

事實上，n 為任意有理數，函數 $f(x)=x^n$ 的定義域為所有正實數，其導函數仍為 $f'(x)=nx^{n-1}$，在此我們不予證明。

例題 1

試求下列各函數的導函數：

(1) $f(x)=x^5$　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　(3) $f(x)=\sqrt{x^3}$

解 (1) 因為 $f(x)=x^5$，

所以 $f'(x)=5x^{5-1}=5x^4$。

(2) 因為 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$，

所以 $f'(x)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$。

(3) 因為 $f(x)=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$。

隨堂練習

試求下列各函數的導函數：

(1) $f(x)=x^{10}$　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$　(3) $f(x)=\sqrt{x}$

微分公式（設 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數）

(3) 若 $h(x)=kf(x)$（k 為常數），則 $h'(x)=kf'(x)$。

(4) 若 $h(x)=f(x)+g(x)$，則 $h'(x)=f'(x)+g'(x)$。

(5) 若 $h(x)=f(x)-g(x)$，則 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$。

【說明】設 a 為函數 $h(x)$ 定義域中的任意一個實數，因為 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數，所以

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}、\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\text{ 均存在。}$$

(3) $h'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{kf(x)-kf(a)}{x-a}=k\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=kf'(a)$，

故得 $h'(x)=kf'(x)$。

(4)
$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(a)+g(a)]}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f'(a)+g'(a)，$$

故得 $h'(x)=f'(x)+g'(x)$。

(5) 說明方法與(4)相似。

綜合上述幾個微分公式，我們可得多項式函數的導函數公式如下：

多項式函數的導函數

設 n 為正整數且 $a_n\neq 0$，實係數多項式函數
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，則
$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$。

例題 2

試求函數 $f(x)=2x^4+3x^2-4x+5$ 的導函數。

解　$f'(x)=4\times 2x^{4-1}+2\times 3x^{2-1}-4=8x^3+6x-4$。

隨堂練習

試求函數 $f(x)=4x^3-3x^2+2x-5$ 的導函數。

微分公式　（設 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數）

(6) 若 $h(x)=f(x)g(x)$，則 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$。

【說明】(6) 設 a 為函數 $h(x)$ 定義域中的任意一個實數，因為 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數，故得

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times g(x)+f(a)\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}g(x)+\lim_{x\to a}f(a)\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

（因為 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數，故均為連續函數）

$$=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)，$$

所以 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$。

例題 3

試求函數 $f(x)=(x^2+3)(3x^3-2x+1)$ 的導函數。

解 $f'(x)=(x^2+3)'(3x^3-2x+1)+(x^2+3)(3x^3-2x+1)'$

$=2x(3x^3-2x+1)+(x^2+3)(9x^2-2)$

$=6x^4-4x^2+2x+9x^4+25x^2-6$

$=15x^4+21x^2+2x-6$。

隨堂練習

試求函數 $f(x)=(3x-4)(x^2+2x+3)$ 的導函數。

特別說明　在例題 3 中，多項式函數 $f(x)$ 亦可直接先乘開再求導函數。

微分公式（設 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數且 $g(x)\neq 0$）

(7) 若 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，則 $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$。

【說明】(7) 設 a 為函數 $h(x)$ 定義域中的任意一個實數，因為 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數，則

$$\left[\frac{1}{g(a)}\right]'=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{g(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-[g(x)-g(a)]}{g(x)g(a)(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{-1}{g(x)g(a)}\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-1}{g(x)g(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

（因 $g(x)$ 為可微分函數，故為連續函數）

$$=-\frac{1}{[g(a)]^2}\times g'(a)=-\frac{g'(a)}{[g(a)]^2},$$

故得 $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]'=-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$。

又 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$，

故得 $h'(x)=f'(x)\times\dfrac{1}{g(x)}+f(x)\times\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]'$

$$=f'(x)\times\frac{1}{g(x)}+f(x)\times\left\{-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\right\}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}。$$

例題 4

試求 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$ 的導函數。

解 $$f'(x)=\frac{(2x+1)'\times(x-3)-(2x+1)\times(x-3)'}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{2\times(x-3)-(2x+1)\times1}{(x-3)^2}=-\frac{7}{(x-3)^2}。$$

隨堂練習

試求 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3x-2}$ 的導函數。

3-3.2 連鎖規則

設函數 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=2x+3$，若 f 的定義域為 C，g 的定義域為 D，對於任意一個實數 $a\in D$，則 $g(a)=2a+3$。當 $g(a)\in C$ 時，$f(g(a))=[g(a)]^2+1=(2a+3)^2+1$。若對於任意 $x\in D$，恆有 $g(x)\in C$，則 $f(g(x))=(2x+3)^2+1$，我們稱此為 g 與 f 的合成函數，記作 $f\circ g$，亦即 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$。

特別說明 合成函數 $(f\circ g)(x)$ 成立的條件，必須 $g(x)$ 的值域包含於 $f(x)$ 的定義域內。（所有函數值所成的集合，稱為函數的值域。）

例題 5

設 $f(x)=2x^2-3$，$g(x)=x+4$，試求合成函數 $(f\circ g)(x)$ 及 $(g\circ f)(x)$。

解 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+4)=2(x+4)^2-3=2x^2+16x+29$，
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x^2-3)=(2x^2-3)+4=2x^2+1$。

《注意》一般情況下：$(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$。

隨堂練習

設 $f(x)=5x+2$，$g(x)=3x-4$，試求合成函數 $(f\circ g)(x)$ 及 $(g\circ f)(x)$。

連鎖規則，其實就是合成函數的微分方法。

連鎖規則（設 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數）

若 $h(x)=f(g(x))$，則 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$。

【說明】設 a 為函數 $h(x)$ 定義域中的任意一個實數，因為 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數，故得

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$$

$$=\lim_{g(x)\to g(a)}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

（因為 $g(x)$ 為可微分函數，故為連續函數，
當 $x\to a$ 時，$g(x)\to g(a)$）

$=f'(g(a))g'(a)$，

所以 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$。

例題 6

設函數 $F(x)=(2x^2+1)^3$，試求 $F'(x)$。

解 令 $f(x)=x^3$，$g(x)=2x^2+1$，
則 $f'(x)=3x^2$，$g'(x)=4x$，
又 $F(x)=(2x^2+1)^3=f(g(x))$，
由連鎖規則得知，

$$F'(x)=f'(g(x))g'(x)=f'(2x^2+1)\times 4x$$
$$=3(2x^2+1)^2\times 4x=12x(2x^2+1)^2。$$

隨堂練習

設函數 $F(x)=(x^2+3x-1)^4$，試求 $F'(x)$。

由微分公式 $\dfrac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$ 及連鎖規則，我們可得特殊公式如下：

公　式

設 $f(x)$ 為可微分函數，n 為有理數，若 $h(x)=[f(x)]^n$，則

$$h'(x)=n[f(x)]^{n-1}\times f'(x)$$

例題 7

設函數 $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$，試求 $f(x)$ 在 $x=2$ 的導數。

解 $f(x)=\sqrt{2x^2+1}=(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}$，

則 $f'(x)=\dfrac{1}{2}(2x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}\times(2x^2+1)'$

$$=\frac{1}{2}(2x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\times 4x=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}，$$

所以 $f'(2)=\dfrac{2\times 2}{\sqrt{2\times 2^2+1}}=\dfrac{4}{3}$。

隨堂練習

設函數 $f(x)=\dfrac{1}{(2x^2+3x-1)^3}$，試求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的導數。

3-3.3 高階導函數

函數 $y=f(x)$ 可微分，其導函數為 $f'(x)$。若 $f'(x)$ 仍可微分，則其導函數記作 $f''(x)$，稱為函數 $f(x)$ 的第二階導函數，亦可記作 y''、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$。依此類推，第三階導函數記作 $f'''(x)$，…，第 n 階導函數記作 $f^{(n)}(x)$。

特別說明

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的第二階導數記作 $f''(a)$，而

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}\text{。}$$

小考箱

(　　) 5.設函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 的第三階導數存在，則

$$f'''(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f''(x)-f''(2)}{x-2}\text{。}$$

例題 8

設 $f(x)=2x^3+4x^2-5x+2$，試求其第二階導函數及 $f''(-1)$ 的值。

解　因為 $f(x)=2x^3+4x^2-5x+2$，

故得 $f'(x)=6x^2+8x-5$，

$f''(x)=12x+8$，

所以 $f''(-1)=12\times(-1)+8=-4$。

隨堂練習

設 $f(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5$，試求 $f(x)$ 的第二階導函數及 $f''(-2)$ 的值。

習題 3-3

1. 設函數 $f(x)=2x^{10}-3x^5+4x^3-7$，試求 $f'(-1)$ 的值。

2. 設 $f(x)=(x^2+3)(2x^3+1)$，試求 $f(x)$ 的導函數。

3. 設 $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-2x+1}$，試求 $f(x)$ 在 $x=1$ 的導數。

4. 設 $f(x)=\dfrac{x^2+5}{4x-3}$，試求 $f(x)$ 的導函數。

5. 設 $f(x)=x^2+x-3$，$g(x)=2x+1$，試求 $(f\circ g)(x)$ 的導函數。

6. 設 $f(x)=(2x^2+4x-5)^5$，試求 $f'(1)$ 的值。

7. 已知點 $A(4,5)$ 在函數 $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ 的圖形上，試求過點 A 的切線方程式。

8. 設 $f(x)=(2x-1)^4$，試求 $f'(0)$ 及 $f''(1)$ 的值。

3-4 微分的應用

在 3-2 節中，我們討論過多項式函數的導數與導函數，本節將介紹利用導數來描繪實係數多項式函數的圖形，並討論導數與極值的關係。

3-4.1 函數圖形的描繪

本書第一冊第四章在討論指數與對數函數圖形時，曾提及嚴格遞增函數與嚴格遞減函數，現在我們再次將函數的遞增與遞減定義如下：

函數的遞增與遞減

設區間 $[a,b]$ 在函數 $f(x)$ 的定義域內，對於 $[a,b]$ 中任意相異兩個數 x_1 與 x_2：

(1) 當 $x_1<x_2$ 時，恆有 $f(x_1)\leq f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為遞增函數；若將上述中不等號「 $\leq$ 」改成「 $<$ 」，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為嚴格遞增函數。

(2) 當 $x_1<x_2$ 時，恆有 $f(x_1)\geq f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為遞減函數；若將上述中不等號「 $\geq$ 」改成「 $>$ 」，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為嚴格遞減函數。

當然函數未必都是遞增函數或遞減函數，但大部分的函數可將其圖形適當的分段，使得所分各段分別是遞增或遞減函數，如圖 3-6 所示。

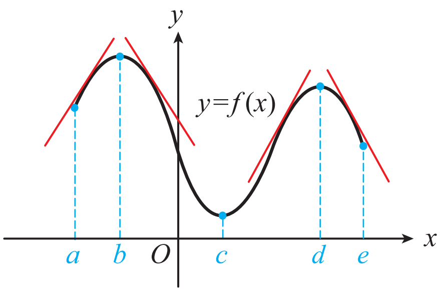


圖 3-6

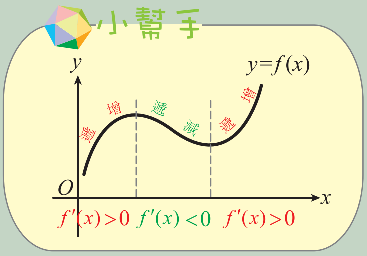
觀察上圖函數 $y=f(x)$ 的圖形中，$f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 與 $[c,d]$ 上為遞增函數，而在區間 $[b,c]$ 與 $[d,e]$ 上為遞減函數。同時我們也發現到在區間 $[a,b]$ 與 $[c,d]$ 內各點所作的切線，其斜率都是正的；而在區間 $[b,c]$ 與 $[d,e]$ 內各點所作的切線，其斜率都是負的。在前面 3-2 節中導數的意義，我們知道 $f'(x_1)$ 表示函數 $y=f(x)$ 圖形上的點 $(x_1,f(x_1))$ 所作切線的斜率。因此，導數的正負與函數的遞增、遞減有如下的關係。

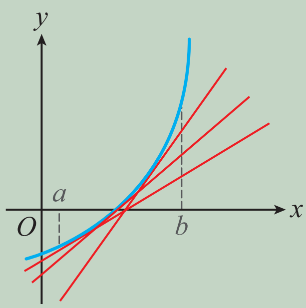
導數的正負與函數的遞增、遞減關係

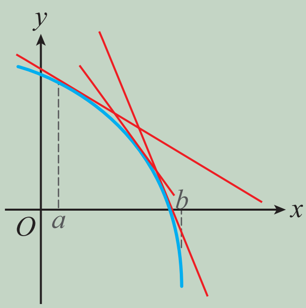
設 $f(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的多項式函數，對於任意 $x\in(a,b)$：

(1) 若 $f'(x)>0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上為嚴格遞增函數。

(2) 若 $f'(x)<0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上為嚴格遞減函數。







小考箱

(　　) 6. 多項式函數 $f(x)$，當 $x\in(-\infty\ ,-1)$ 時，$f'(x)<0$ 恆成立，又當 $x\in(3,6)$ 時，$f'(x)>0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在 $(-\infty\ ,-1]$上為嚴格遞減函數，而在 $[3,6]$上為嚴格遞增函數。

上面這個性質的幾何意義是指：在多項式函數 $f(x)$ 的圖形中，如果在區間 $[a,b]$ 內，過每一點的切線斜率都是正的，那麼圖形在區間 $[a,b]$ 內是上升的；

如果在區間 $[a,b]$ 內，過每一點的切線斜率都是負的，那麼圖形在區間 $[a,b]$ 內是下降的。這個證明超出本書範圍，在此省略。至於要如何找出函數 $f(x)$ 的遞增、遞減區間呢？我們以實例說明如下。

例題 1

試討論函數 $f(x)=x^3+3x^2-24x+15$ 的遞增、遞減區間。

解　$f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2+6x-24$，

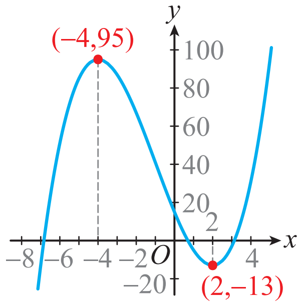
亦即 $f'(x)=3(x^2+2x-8)=3(x+4)(x-2)$，

將 $f'(x)$ 的正、負範圍列表如下：

x	$x<-4$	-4	$-4<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

① 當 $x\leq-4$ 或 $x\geq2$ 時，$f'(x)\geq0$，故得 $f(x)$ 在區間 $(-\infty,-4]$ 與 $[2,\infty)$ 上為遞增函數。

② 當 $-4\leq x\leq2$ 時，$f'(x)\leq0$，故得 $f(x)$ 在區間 $[-4,2]$ 上為遞減函數。



隨堂練習

試討論函數 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-5$ 的遞增、遞減區間。

特別說明

在例題 1 中，$f'(-4)=0$、$f'(2)=0$，即點 $(-4,f(-4))$ 與 $(2,f(2))$ 為函數遞增、遞減區間的交界點。一般而言，函數 $f(x)$ 的導數 $f'(c)=0$，則點 $(c,f(c))$ 稱為函數 $f(x)$ 的臨界點。

當我們在描繪函數 $f(x)$ 的圖形時，若僅知道函數 $f(x)$ 的遞增、遞減區間，仍然無法掌握圖形的大略形狀，必須還要了解圖形彎曲的方向。觀察下圖 3-7(A)，函數 $f(x)$ 的圖形在區間 (a,b) 上，隨著 x 的增加切線的斜率逐漸減小，亦即 $f'(x)$ 為嚴格遞減函數，此時函數圖形偏向下彎。再觀察圖 3-7(B)，函數 $f(x)$ 的圖形在區間 (a,b) 上，隨著 x 的增加切線的斜率逐漸增大，亦即 $f'(x)$ 為嚴格遞增函數，此時函數圖形偏向上彎。

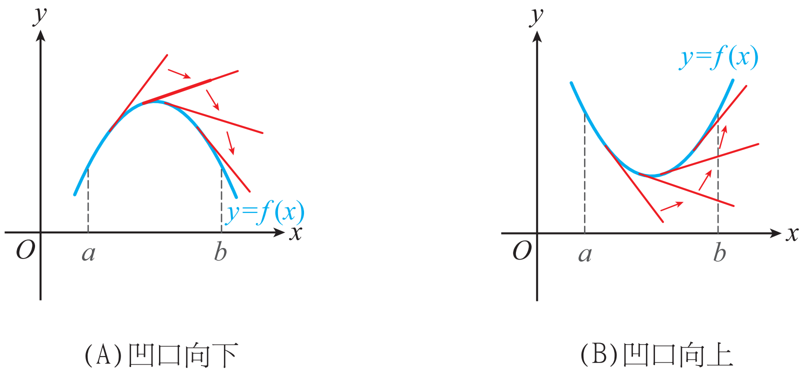


圖 3-7

因此，我們將函數圖形的凹向定義如下：

函數圖形的凹向

設 $f(x)$ 為區間 (a,b) 上的多項式函數：

(1) 若 $f'(x)$ 在區間 (a,b) 為嚴格遞減函數，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向下。

(2) 若 $f'(x)$ 在區間 (a,b) 為嚴格遞增函數，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向上。

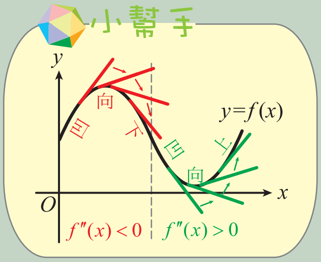
設函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上可二次微分，則 $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的導函數，利用函數圖形凹向的定義，我們可推得：當 $x\in(a,b)$，$f''(x)<0$ 恆成立時，$f'(x)$ 為嚴格遞減函數，函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向下；當 $x\in(a,b)$，$f''(x)>0$ 恆成立時，$f'(x)$ 為嚴格遞增函數，函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向上。將上述討論的結果，整理如下：

利用第二階導函數判斷函數圖形的凹向

設 $f(x)$ 為區間 (a,b) 上的多項式函數，對於任意 $x\in(a,b)$：

(1) 若 $f''(x)<0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向下。

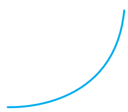
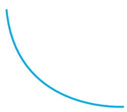
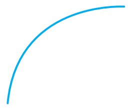
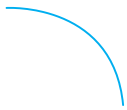
(2) 若 $f''(x)>0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向上。



函數圖形凹向改變的分界點，稱為反曲點。設函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 的鄰近區域有定義，當 $x<c$ 時 $f(x)$ 圖形的凹向與 $x>c$ 時 $f(x)$ 圖形的凹向相反，則點 $(c,f(c))$ 就是函數 $f(x)$ 圖形的一個反曲點。

特別說明　設 $f(x)$ 為多項式函數，當 $f''(c)=0$ 時，若 $f''(c^+)f''(c^-)<0$，則點 $(c,f(c))$ 為函數 $f(x)$ 圖形的一個反曲點。(c^+ 表示大於 c 且鄰近 c 的數，c^- 表示小於 c 且鄰近 c 的數。當 $f''(c^+)f''(c^-)<0$ 時，表示 $f(x)$ 在點 $(c,f(c))$ 的左右邊圖形凹向相反。)

設 $f(x)$ 為多項式函數，由於 $f'(x)$ 的正負決定函數圖形的遞增或遞減，而 $f''(x)$ 的正負決定函數圖形的凹向，因此我們可得函數部分圖形的大略形狀如下表：

$f''(x)$ \ $f'(x)$	$f'(x)>0$	$f'(x)<0$
$f''(x)>0$		
$f''(x)<0$		

利用上面的性質，可以用來描繪多項式函數的圖形。

例題 2

試討論函數 $f(x)=-x^3+3x+1$ 的凹向、反曲點，並描繪出其圖形。

解 $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$，$f''(x)=-6x$。

① 當 $x\le -1$ 或 $x\ge 1$ 時，$f'(x)\le 0$，
當 $-1\le x\le 1$ 時，$f'(x)\ge 0$，
故得函數 $f(x)$ 的圖形在區間 $(-\infty,-1]$ 與 $[1,\infty)$ 為遞減，
在區間 $[-1,1]$ 為遞增。

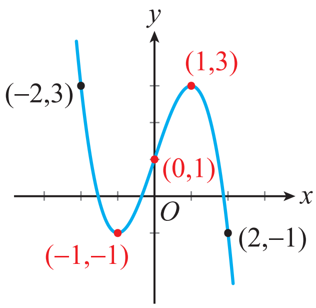
② 當 $x<0$ 時，$f''(x)>0$；當 $x>0$ 時，$f''(x)<0$，
故得函數 $f(x)$ 的圖形在區間 $(-\infty,0)$ 凹口向上，
在區間 $(0,\infty)$ 凹口向下。

③ 因為函數 $f(x)$ 圖形的凹向在 $x=0$ 處發生改變，
故得反曲點為 $(0,f(0))=(0,1)$。

將上述討論整理如下表：

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	╰	-1	╯	1	╭	3	╮

在坐標平面上，先描出 $(-1,-1)$、$(0,1)$ 及 $(1,3)$ 三個點，接著再描出一些其他的點，如 $(-2,f(-2))=(-2,3)$，$(2,f(2))=(2,-1)$ 等，再以平滑曲線連接，可得 $y=-x^3+3x+1$ 的圖形如右。



隨堂練習

試討論函數 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ 的凹向、反曲點，並描繪出其圖形。

例題 3

試描繪函數 $f(x)=x^3+2x+3$ 的圖形。

解 $f'(x)=3x^2+2$，$f''(x)=6x$。

① 因為對於任意實數 x，$f'(x)>0$ 恆成立，
故知 $f(x)$ 為一嚴格遞增函數。

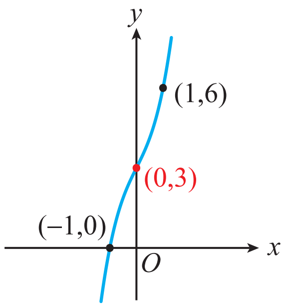
② 當 $x<0$ 時，$f''(x)<0$；當 $x>0$ 時，$f''(x)>0$，
故得函數 $f(x)$ 的圖形在區間 $(-\infty,0)$ 凹口向下，
在區間 $(0,\infty)$ 凹口向上。

③ 因為函數 $f(x)$ 圖形的凹向在 $x=0$ 處發生改變，
故得反曲點為 $(0,f(0))=(0,3)$。

將上述討論整理如下表：

x	$x<0$	0	$x>0$
$f'(x)$	恆為 $+$		
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⌒	3	‿

在坐標平面上，先描出點 $(0,3)$，接著再描出一些其他的點，如 $(-1,f(-1))=(-1,0)$，$(1,f(1))=(1,6)$ 等，再以平滑曲線連接，可得 $y=x^3+2x+3$ 的圖形如右。



隨堂練習

試描繪函數 $f(x)=-x^3-4x+2$ 的圖形。

3-4.2 多項式函數的極值

設 $f(x)$ 為定義在區間 $[a,b]$ 上的多項式函數，其圖形如下：

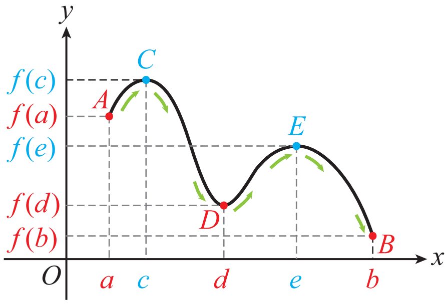


圖 3-8

(1) 在函數圖形中，C 點鄰近區域的每個點都比 C 點低，換句話說，C 點就是局部範圍內的最高點；同樣的，E 點也是局部範圍內的最高點，我們稱此兩點的縱坐標 $f(c)$ 和 $f(e)$ 都是函數 $f(x)$ 的極大值（或稱相對極大值）。又 C 點也是函數全部圖形中的最高點，我們稱 C 點的縱坐標 $f(c)$ 為函數 $f(x)$ 的最大值（或稱絕對極大值）。

(2) 在函數圖形中，D 點鄰近區域的每個點都比 D 點高，換句話說，D 點就是局部範圍內的最低點，而端點 A、B 兩點也是局部範圍內的最低點，我們稱 D、A、B 三點的縱坐標 $f(d)$、$f(a)$、$f(b)$ 都是函數 $f(x)$ 的極小值（或稱相對極小值）。又 B 點也是函數全部圖形中的最低點，我們稱 B 點的縱坐標 $f(b)$ 為函數 $f(x)$ 的最小值（或稱絕對極小值）。

函數的極大值與極小值合稱為極值，現在我們將函數的極值定義如下：

函數的極值

(1) 設 x_1、x_2 為函數 $f(x)$ 定義域中的實數，若在定義域中 x_1 鄰近區域的每個實數 x，恆有 $f(x_1)\geq f(x)$，則稱 $f(x_1)$ 為函數 $f(x)$ 的一個極大值；若在定義域中 x_2 鄰近區域的每個實數 x，恆有 $f(x_2)\leq f(x)$，則稱 $f(x_2)$ 為函數 $f(x)$ 的一個極小值。

(2) 設 α、β 為函數 $f(x)$ 定義域中的實數，對於函數 $f(x)$ 定義域中的每個實數 x 都滿足 $f(\alpha)\geq f(x)$ 且 $f(\beta)\leq f(x)$，我們稱 $f(\alpha)$ 為函數 $f(x)$ 的最大值，$f(\beta)$ 為函數 $f(x)$ 的最小值。

特別說明

(1) 函數 $f(x)$ 的最大值也是 $f(x)$ 的一個極大值；函數 $f(x)$ 的最小值也是 $f(x)$ 的一個極小值。

(2) 函數的最大值不可能小於最小值，但函數的某些極大值卻有可能小於其某些極小值。

(3) 函數的最大值與最小值至多只能各有一個，但極大值與極小值不一定各只有一個。

接著，我們要如何找出多項式函數的極值呢？

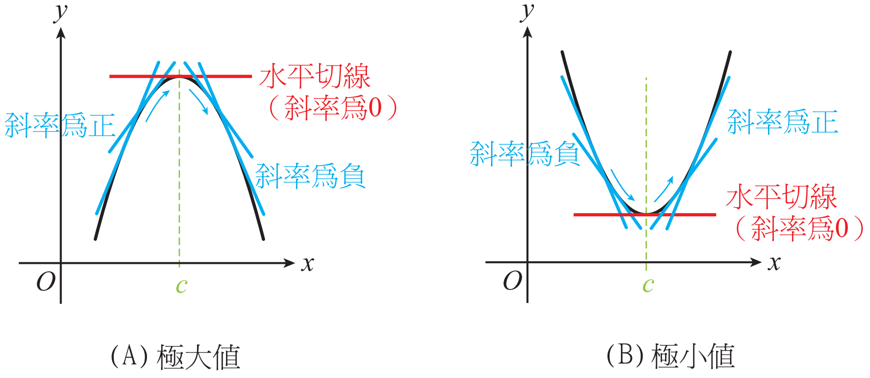


圖 3-9

設多項式函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 處有極大值，如圖 3-9(A) 所示，在 $x=c$ 的左邊為遞增，在 $x=c$ 的右邊為遞減，亦即在 $x=c$ 的鄰近區域，當 $x<c$ 時，$f'(x)>0$；當 $x>c$ 時，$f'(x)<0$。因為多項式函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 亦為多項式函數，所以 $f'(x)$ 為連續函數，故得 $f'(c)=0$，亦即在 $x=c$ 處的切線為水平切線。同理，多項式函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 處有極小值，如圖 3-9(B) 所示，亦可得 $f'(c)=0$。

另外，多項式函數 $f(x)$ 的定義域若為閉區間 $[a,b]$，則 $f(a)$、$f(b)$ 也可能是 $f(x)$ 的極值。在 a 右邊的鄰近區域，若函數 $f(x)$ 為遞減，則 $f(a)$ 為極大值；若函數 $f(x)$ 為遞增，則 $f(a)$ 為極小值。在 b 左邊的鄰近區域，若函數 $f(x)$ 為遞減，則 $f(b)$ 為極小值；若函數 $f(x)$ 為遞增，則 $f(b)$ 為極大值。由上面的討論，多項式函數極值出現的點，可得結論如下：

多項式函數極值可能發生的點

設 $f(x)$ 為定義在 $[a,b]$ 上的多項式函數，則 $f(x)$ 的極值可能發生的點為：

(1) 在閉區間 $[a,b]$ 中滿足 $f'(x)=0$ 的點（亦即函數 $f(x)$ 的臨界點）。

(2) 閉區間 $[a,b]$ 的端點 a 和 b。

特別說明

多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f'(x)=0$ 的點可能出現極值，但未必一定有極值。

例如：$f(x)=x^3$，則 $f'(x)=3x^2$，故得 $f'(0)=0$，但如右圖所示，$f(x)$ 為一遞增函數，沒有極大值也沒有極小值，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 處不出現極值。

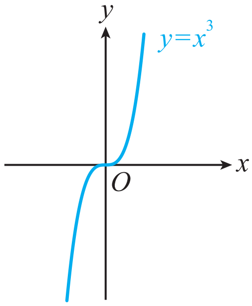


圖 3-10

多項式函數 $f(x)$，當 $f'(c)=0$ 時，若在 $x=c$ 的左邊鄰近區域為遞增且在右邊鄰近區域為遞減，則 $f(c)$ 為極大值；若在 $x=c$ 的左邊鄰近區域為遞減且在右邊鄰近區域為遞增，則 $f(c)$ 為極小值。據此，我們可以利用下面的方法來判定多項式函數的極值。

利用第一階導函數判別極大值與極小值

設 $f(x)$ 為多項式函數且 $f'(c)=0$：

(1) 在 $x=c$ 的鄰近區域，當 $x<c$ 時，$f'(x)>0$；當 $x>c$ 時，$f'(x)<0$，則函數 $f(x)$ 有極大值 $f(c)$。

(2) 在 $x=c$ 的鄰近區域，當 $x<c$ 時，$f'(x)<0$；當 $x>c$ 時，$f'(x)>0$，則函數 $f(x)$ 有極小值 $f(c)$。

小考箱

(　　) 7. 多項式函數 $f(x)$，已知 $f'(2)=0$，又知在 $x=2$ 的鄰近區域，當 $x>2$ 時，$f'(x)>0$；當 $x<2$ 時，$f'(x)<0$，則函數 $f(x)$ 有極大值 $f(2)$。

例題 4

試求函數 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+3$ 的極大值與極小值。

解　$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$，

當 $f'(x)=0$ 時，解得 $x=-2$，1，

將導函數 $f'(x)$ 的正、負範圍列表如下：

x	$x<-2$	-2	$-2<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	23	$\searrow$	-4	$\nearrow$

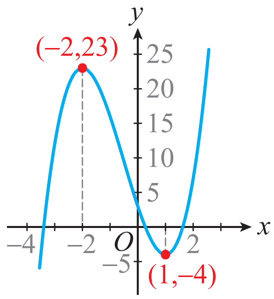
利用第一階導函數判別得知：

$f(x)$ 在 $x=-2$ 處有極大值為

$f(-2)=2\times(-2)^3+3\times(-2)^2-12\times(-2)+3=23$，

$f(x)$ 在 $x=1$ 處有極小值為

$f(1)=2\times1^3+3\times1^2-12\times1+3=-4$。



隨堂練習

試求函數 $f(x)=x^3+3x^2-9x-2$ 的極大值與極小值。

因為多項式函數都是連續函數，若多項式函數 $f(x)$ 的定義域為閉區間 $[a,b]$，則 $f(x)$ 一定有最大值與最小值。欲求 $f(x)$ 的最大、最小值時，除了考慮 $f'(x)=0$ 的點之極值外，還要考慮閉區間 $[a,b]$ 的端點 a 和 b 的極值。

例題 5

試求函數 $f(x)=-x^3+12x+5$ 在閉區間 $[-3,5]$ 上的最大值與最小值。

解 $f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$，

當 $f'(x)=0$ 時，解得 $x=-2$，2，

又閉區間 $[-3,5]$ 的端點為 $x=-3$，5，

所以 $f(x)$ 極值可能出現在 $x=-3$，-2，2，5，

又 $f(-3)=-(-3)^3+12\times(-3)+5=-4$，

$f(-2)=-(-2)^3+12\times(-2)+5=-11$，

$f(2)=-2^3+12\times2+5=21$，

$f(5)=-5^3+12\times5+5=-60$。

所以函數 $f(x)$ 在閉區間 $[-3,5]$ 上的最大值為 21，最小值為 -60。

隨堂練習

試求函數 $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$ 在閉區間 $[0,5]$ 上的最大值與最小值。

當多項式函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 處的導數 $f'(c)=0$ 且 $f''(c)<0$ 時，如圖 3-9(A) 所示，在 $x=c$ 處的切線是水平線且在 $x=c$ 附近圖形凹口向下，點 $(c,f(c))$ 為局部最高點，故得 $f(c)$ 為極大值。同理，當多項式函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 處的導數 $f'(c)=0$ 且 $f''(c)>0$ 時，如圖 3-9(B) 所示，在 $x=c$ 處的切線是水平線且在 $x=c$ 附近圖形凹口向上，點 $(c,f(c))$ 為局部最低點，故得 $f(c)$ 為極小值。因此，我們亦可利用第二階導函數來判別極值。

利用第二階導函數判別極大值與極小值

設 $f(x)$ 為多項式函數且 $f'(c)=0$，則

(1) 當 $f''(c)<0$ 時，函數 $f(x)$ 有極大值 $f(c)$。

(2) 當 $f''(c)>0$ 時，函數 $f(x)$ 有極小值 $f(c)$。

例題 6

試求函數 $f(x)=x^4-8x^2+5$ 的極大值與極小值。

解 $f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$，$f''(x)=12x^2-16$，

當 $f'(x)=0$ 時，解得 $x=0$，-2，2，

又 $f''(0)=-16<0$，$f''(-2)=32>0$，$f''(2)=32>0$，

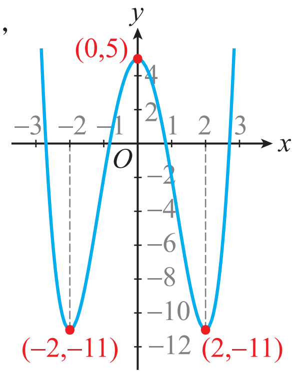
利用第二階導函數判別得知：

$f(x)$ 在 $x=0$ 處有極大值為 $f(0)=0-0+5=5$，

$f(x)$ 在 $x=-2$ 及 $x=2$ 處有極小值，分別為

$f(-2)=(-2)^4-8\times(-2)^2+5=-11$，

$f(2)=2^4-8\times2^2+5=-11$。



隨堂練習

試求函數 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+5$ 的極大值與極小值。

例題 7

已知函數 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+15$ 在 $x=2$ 處有極小值 -5，試求實數 a、b 的值。

解 $f'(x)=6x^2+2ax+b$，

因為 $f(x)$ 在 $x=2$ 處有極小值 -5，

故得 $f'(2)=0$ 且 $f(2)=-5$，

又 $f'(2)=24+4a+b$，$f(2)=16+4a+2b+15$，

亦即 $\begin{cases} 24+4a+b=0 \\ 16+4a+2b+15=-5 \end{cases}$，

整理得 $\begin{cases} 4a+b=-24 \cdots\cdots ① \\ 2a+b=-18 \cdots\cdots ② \end{cases}$，

由① $-$ ②得 $2a=-6$，即 $a=-3$，

$a=-3$ 代入②得 $b=-12$，

所以 $a=-3$，$b=-12$。

隨堂練習

已知函數 $f(x)=-x^3+ax^2+bx-2$ 在 $x=2$ 處有極大值 2，試求實數 a、b 的值。

習題 3-4

1. 試討論函數 $f(x)=x^3-6x^2-15x+10$ 的遞增、遞減區間。

2. 試討論函數 $f(x)=x^4-4x^3+3x+2$ 圖形的凹向，並求反曲點坐標。

3. 試描繪函數 $f(x)=-x^3+3x^2-4$ 的圖形。

4. 試求函數 $f(x)=3x^4-2x^3-3x^2+6$ 的極大值與極小值。

5. 試求函數 $f(x)=2x^3+3x^2-36x+25$ 在閉區間 $[0,4]$ 上的最大值與最小值。

6. 已知函數 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+3$ 在 $x=1$ 與 $x=2$ 處均有極值，試求實數 a、b 的值。

7. 已知函數 $f(x)=ax^3+9x^2-12x+b$ 在 $x=1$ 處有極小值 8，試求實數 a、b 的值。

8. 已知函數 $f(x)=ax^3+bx^2$ 的圖形通過點 $(-1,1)$，又在 $x=\frac{1}{3}$ 處有一反曲點，試求實數 a、b 的值。

* 3-5 積分的概念與反導函數

給定一個多項式函數 $f(x)$，經微分可求得其導函數 $f'(x)$。反之，怎樣的函數，其導函數會是 $f(x)$ 呢？這就是我們要討論的反導函數。

3-5.1 反導函數與不定積分

反導函數

設函數 $F(x)$ 的導函數為 $f(x)$，亦即 $F'(x)=f(x)$，我們稱 $F(x)$ 是函數 $f(x)$ 的一個反導函數。

小幫手

$$f(x) \underset{\text{微 分}}{\overset{\text{積 分}}{\rightleftarrows}} F(x)+C$$

設 $F(x)=2x^2+3x+4$，則 $F'(x)=f(x)=4x+3$，所以 $F(x)$ 是函數 $f(x)=4x+3$ 的一個反導函數。若 $G(x)=2x^2+3x+10$，則 $G(x)$ 也是函數 $f(x)=4x+3$ 的一個反導函數。一般而言，若 $F(x)$ 為函數 $f(x)$ 的一個反導函數，C 為任意常數，則因 $[F(x)+C]'=F'(x)+0=f(x)$，所以 $F(x)+C$ 也是函數 $f(x)$ 的反導函數。

特別說明　函數 $f(x)$ 的反導函數並不唯一，但只相差一個常數而已。

不定積分

設 $F(x)$ 是函數 $f(x)$ 的一個反導函數，C 為任意常數，則 $F(x)+C$ 稱為函數 $f(x)$ 的不定積分，以符號 $\int f(x)dx$ 表示，亦即

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

其中 $\int$ 稱為積分符號，$f(x)$ 稱為被積分函數。

特別說明

在 $\int f(x)dx$ 中，dx 中的 x 稱為傀儡變數，可用其他的字母代替，例如：$\int f(u)du$，$\int f(t)dt$ 等，沒有任何差別。

積分符號 $\int$ 是萊布尼茲（Leibniz, 1646 ～ 1716）所創造的，取自英文 *sum*（和）的第一個字母 s 拉長而得，表示積分是求和的一種推廣。

設函數 $f(x)$、$g(x)$ 的反導函數都存在，為了方便計算，下面是一些不定積分的公式：

公　式

(1)　設 $n\neq -1$ 的有理數，則 $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$（$C$ 為常數）。

(2)　設 k 為常數，則 $\int kdx=kx+C$（C 為常數）。

(3)　設 k 為常數，則 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$。

(4)　$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$。

(5)　$\int[f(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$。

【說明】(1)　當 $n\neq -1$ 時：

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\frac{1}{n+1}\times(n+1)x^n=x^n,$$

故得 $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$（$C$ 為常數）。

(2)　k 為常數，則 $(kx)'=k$，

所以 $\int kdx=kx+C$（C 為常數）。

(3)(4)(5)

設 $F(x)$、$G(x)$ 分別為 $f(x)$、$g(x)$ 的一個反導函數，亦即

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$。

則 $[kF(x)]'=kF'(x)=kf(x)$（k 為常數），

$[F(x)+G(x)]'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$，

$[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$。

故可得

$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$（$k$ 為常數），

$\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$，

$\int [f(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$。

例題 1

試求下列各不定積分：

(1) $\int x^3dx$　(2) $\int \frac{1}{x^2}dx$　(3) $\int x\sqrt{x}\,dx$

解 (1) $\int x^3dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+C=\frac{x^4}{4}+C$。

(2) $\int \frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$。

(3) $\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$。

隨堂練習

試求下列各不定積分：

(1) $\int x^4dx$　(2) $\int \frac{1}{x^3}dx$　(3) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

例題 2

試求不定積分 $\int(3x^2-4x+5)dx$。

解 $\int(3x^2-4x+5)dx$

$=3\int x^2dx-4\int xdx+\int 5dx$

$=3\times\dfrac{x^3}{3}-4\times\dfrac{x^2}{2}+5x+C$

$=x^3-2x^2+5x+C$。

隨堂練習

試求不定積分 $\int(5x^4-6x^2+4x-2)dx$。

3-5.2 定積分的幾何意義

設 $f(x)$ 為多項式函數，故在閉區間 $[a,b]$ 上連續，且 $f(x)\geq 0$ 對 $[a,b]$ 中任一實數都成立，則 $y=f(x)$ 與 x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成的區域 R 的面積，可由下列步驟求得：

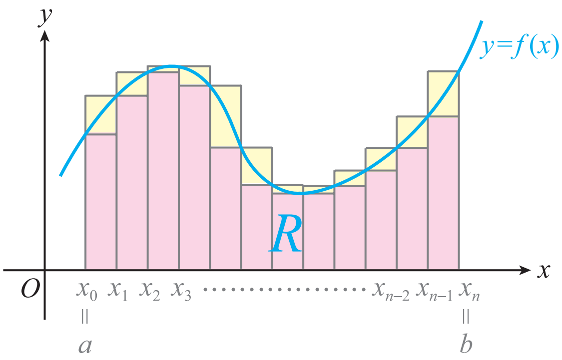


圖 3-11

(1) 將閉區間 $[a,b]$ 分成 n 等分，每一等分的長度為 $\dfrac{b-a}{n}$，其分割點依次為

$a=x_0$、x_1、x_2、…、x_{n-1}、$x_n=b$，即$x_1-x_0=x_2-x_1=\cdots=x_n-x_{n-1}=\dfrac{b-a}{n}$。

(2) 設 $f(x)$ 在區間 $[x_{i-1},x_i]$（其中 $1\le i\le n$）的最大值為 M_i，最小值為 m_i，

以 M_i 為高作出的 n 個矩形（寬度為 $\dfrac{b-a}{n}$）面積和為 $U_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i\times\dfrac{b-a}{n})$

（稱為上和），又以 m_i 為高作出的 n 個矩形（寬度為 $\dfrac{b-a}{n}$）面積和為

$L_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i\times\dfrac{b-a}{n})$（稱為下和）。

(3) 當分割區段 n 愈多時，U_n 及 L_n 愈接近所求區域 R 的面積，即

$\lim\limits_{n\to\infty}L_n\le$ 區域 R 的面積 $\le\lim\limits_{n\to\infty}U_n$。

對於連續函數 $f(x)$ 來說，當 $n\to\infty$ 時，

$\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i\times\dfrac{b-a}{n})$ 與 $\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i\times\dfrac{b-a}{n})$ 有相同的極限。

由夾擠定理知：

區域 R 的面積 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i\times\dfrac{b-a}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i\times\dfrac{b-a}{n})$，

此極限值稱為函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上的定積分，記作 $\int_a^b f(x)dx$，其中 b、a 分別稱為定積分的上限與下限。

特別說明

在上述討論中，當 $n\to\infty$ 時，M_i 與 m_i 都會趨近於 $f(x_i)$，故得

$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta_x$（其中 $\Delta_x=\dfrac{b-a}{n}$）。

由上面的討論，我們得結論如下：

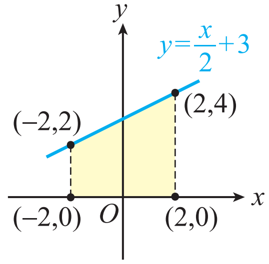
定積分的幾何意義

設 $f(x)$ 為閉區間 $[a,b]$ 上的多項式函數，且 $f(x)\ge0$ 對 $[a,b]$ 中任一實數都成立，則定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 就是曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成區域的面積。

例題 3

試由幾何圖形的面積求定積分 $\int_{-2}^{2}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx$。

解 $\int_{-2}^{2}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx$ 表示函數 $f(x)=\frac{x}{2}+3$ 的圖形與 x 軸在 $x=-2$、$x=2$ 之間所圍成的區域面積，其圖形如右，為一梯形區域。



$$\text{面積}=\frac{1}{2}(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}$$

$$=\frac{1}{2}(2+4)\times 4=12，$$

所以 $\int_{-2}^{2}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx=12$。

隨堂練習

試由幾何圖形的面積求定積分 $\int_{-1}^{3}(-x+4)dx$。

在此我們討論的將僅限於多項式函數的積分，根據定積分的定義，我們可得一些定積分的性質如下：

定積分的性質

設 $f(x)$、$g(x)$ 為多項式函數，a、b 為實數且 $a<b$，k 為任意常數，則

(1) $\int_{a}^{a}f(x)dx=0$

(2) $\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$

(3) $\int_{a}^{b}kf(x)dx=k\int_{a}^{b}f(x)dx$

(4) $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx$（其中 $a<c<b$）

(5) $\int_{a}^{b}[f(x)+g(x)]dx=\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{a}^{b}g(x)dx$

(6) $\int_{a}^{b}[f(x)-g(x)]dx=\int_{a}^{b}f(x)dx-\int_{a}^{b}g(x)dx$

小考箱

(　) 8. 設 $f(x)$、$g(x)$ 為多項式函數，則 $\int_{-2}^{3}[3f(x)+5g(x)]dx=3\int_{-2}^{3}f(x)dx+5\int_{-2}^{3}g(x)dx$。

例題 4

設 $f(x)$ 為多項式函數，已知 $\int_{0}^{5}f(x)dx=10$，$\int_{0}^{2}f(x)dx=5$，試求 $\int_{2}^{5}3f(x)dx$ 的值。

解　由定積分的性質可得

$\int_{0}^{5}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx$，

亦即 $10=5+\int_{2}^{5}f(x)dx$，

故得 $\int_{2}^{5}f(x)dx=10-5=5$，

所以 $\int_{2}^{5}3f(x)dx=3\int_{2}^{5}f(x)dx=3\times5=15$。

隨堂練習

設 $f(x)$為多項式函數，已知 $\int_{1}^{3}f(x)dx=4$，$\int_{3}^{6}f(x)dx=6$，試求 $\int_{1}^{6}4f(x)dx$ 的值。

例題 5

設 $f(x)$、$g(x)$ 為多項式函數，a、b 為實數且 $a<b$，已知 $\int_{a}^{b}f(x)dx=3$，$\int_{a}^{b}g(x)dx=5$，試求 $\int_{a}^{b}[3f(x)+2g(x)]dx$ 的值。

解　由定積分的性質可得

$$\int_{a}^{b}[3f(x)+2g(x)]dx=3\int_{a}^{b}f(x)dx+2\int_{a}^{b}g(x)dx$$
$$=3\times3+2\times5=19$$。

隨堂練習

設 $f(x)$、$g(x)$ 為多項式函數，a、b 為實數且 $a<b$，已知 $\int_a^b f(x)dx=7$，$\int_a^b g(x)dx=3$，試求 $\int_a^b [2f(x)-5g(x)]dx$ 的值。

在前面定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 與面積的討論中，限制函數 $f(x)\geq 0$，但是多項式函數的值可以是正的也可以是負的。設 $f(x)$ 為閉區間 $[a,b]$ 上的多項式函數，且 $f(x)\leq 0$，如右圖 3-12 所示，則 $-f(x)\geq 0$。

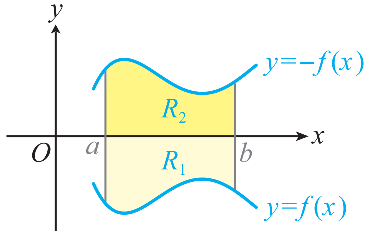


圖 3-12

上圖 R_1 與 R_2 分別為 $y=f(x)$ 與 $y=-f(x)$ 在 $x=a$、$x=b$ 間與 x 軸所圍成的區域，顯然 R_1 與 R_2 對稱於 x 軸，故得 R_1 與 R_2 的面積相等，所以 R_1 面積 $=R_2$ 面積 $=\int_a^b [-f(x)]dx=-\int_a^b f(x)dx$。

換句話說，當 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上恆有 $f(x)\leq 0$，則 $y=f(x)$ 在 $x=a$、$x=b$ 間與 x 軸所圍成區域的面積為 $-\int_a^b f(x)dx$。

因此，我們可得結論如下：

定積分與面積的關係

設 $f(x)$ 為閉區間 $[a,b]$ 上的多項式函數，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 相當於曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成的區域中，在 x 軸上方部分的面積減去在 x 軸下方部分的面積。

特別說明

函數 $f(x)$ 的圖形如圖 3-13 所示，則

$\int_a^b f(x)dx=R_1$ 的面積 $-R_2$ 的面積 $+R_3$ 的面積

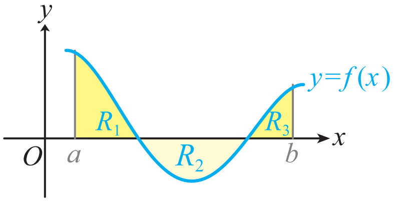
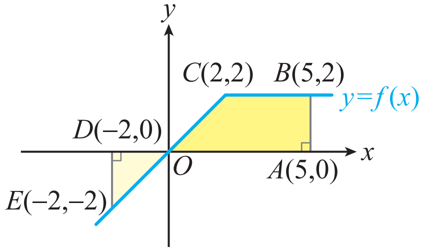


圖 3-13

例題 6

設函數 $y=f(x)$ 的圖形如右，試求定積分 $\int_{-2}^{5} f(x)dx$ 的值。



解 由定積分與面積的關係得知 $\int_{-2}^{5} f(x)dx$ 的值相當於圖中梯形 $OABC$ 的面積減去三角形 ODE 的面積，

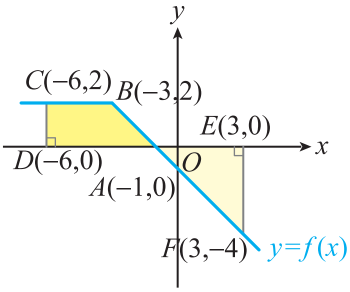
梯形 $OABC$ 面積 $=\frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{OA})\times\overline{AB}=\frac{1}{2}(3+5)\times 2=8$，

三角形 ODE 面積 $=\frac{1}{2}\overline{OD}\times\overline{DE}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，

故得 $\int_{-2}^{5} f(x)dx=8-2=6$。

隨堂練習

設函數 $y=f(x)$ 的圖形如右，試求定積分 $\int_{-6}^{3} f(x)dx$ 的值。



習題 3-5

1. 試求下列各不定積分：

(1) $\int x^2 dx$ (2) $\int \sqrt{x}\, dx$ (3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

2. 試求不定積分 $\int (4x^3+6x-5)dx$。

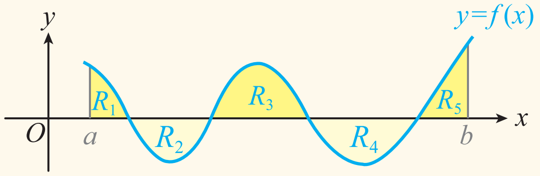
3. 試由幾何圖形的面積求定積分 $\int_{-2}^{3} |x| dx$。

4. 試由幾何圖形的面積求定積分 $\int_{-4}^{2} (x+2)dx$。

5. 設 $f(x)$ 為多項式函數，已知 $\int_1^8 3f(x)dx=24$，$\int_1^5 5f(x)dx=15$，試求 $\int_5^8 f(x)dx$ 的值。

6. 設 $f(x)$、$g(x)$ 為多項式函數，已知 $\int_2^4 f(x)dx=6$，$\int_4^7 f(x)dx=4$，$\int_2^{10} g(x)dx=12$，$\int_7^{10} g(x)dx=5$，試求 $\int_2^7 [3f(x)+4g(x)]dx$ 的值。

7. 函數 $f(x)$ 的圖形如下，設 a、b 為實數且 $a<b$，已知 $\int_a^b f(x)dx=-2$，又 R_1、R_2、R_3、R_4 的面積分別為 4、9、10、12，試求 R_5 的面積。



＊3-6 多項式函數的積分

3-6.1 代換積分

某些函數的積分，無法直接用積分公式求得其反導函數，則可將變數作適當的變換，使被積分函數予以簡化，方便利用公式來積分，這種方法稱為代換積分法。事實上，代換積分就是微分公式中連鎖規則的一種反運算。

設 $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$，則 $\int f(x)dx=F(x)+C$，由連鎖規則得知

$$\frac{d}{dx}F(g(x))=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)，$$

則 $\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C$。

令 $u=g(x)$，則 $\dfrac{du}{dx}=g'(x)$，可記作 $du=g'(x)dx$，故得

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du。$$

代換積分

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du \text{（其中 } u=g(x)\text{）}$$

小考箱

(　) 9. 求不定積分 $\int(2x^2+3x+4)^3(4x+3)dx$，若令 $u=2x^2+3x+4$，則

$$\int(2x^2+3x+4)^3(4x+3)dx=\int u^3du=\frac{1}{4}u^4+C$$

$$=\frac{1}{4}(2x^2+3x+4)^4+C。$$

3-6.2 微積分基本定理

接著，我們要介紹連結微分與積分運算關係的一個重要定理，那就是微積分基本定理。在此我們不予證明，留待大學微積分課程中做更進一步的探討。

微積分基本定理

設 $f(x)$ 為閉區間 $[a,b]$ 上的一個多項式函數，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數，則

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

特別說明　在微積分基本定理中 $F(b)-F(a)$，為方便起見，可簡記為 $F(x)\Big|_a^b$，亦即 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$。

因為不定積分 $\int f(x)dx$ 就是 $f(x)$ 的反導函數，利用微積分基本定理，我們可以直接由不定積分 $\int f(x)dx$ 來求定積分 $\int_a^b f(x)dx$。

例題 1

試求定積分 $\int_1^4 (x+1)(2x-1)dx$。

解

$$\int_1^4 (x+1)(2x-1)dx=\int_1^4 (2x^2+x-1)dx$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_1^4$$

$$=\left(\frac{2}{3}\times4^3+\frac{1}{2}\times4^2-4\right)-\left(\frac{2}{3}\times1^3+\frac{1}{2}\times1^2-1\right)$$

$$=\left(\frac{128}{3}+8-4\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-1\right)=46\frac{1}{2}\text{。}$$

隨堂練習

試求定積分 $\int_{-2}^3 (6x^2+2x+5)dx$。

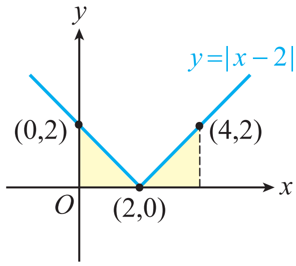
例題 2

試求定積分 $\int_0^4 |x-2|dx$。

解 因為 $|x-2|=\begin{cases} x-2, & \text{當 } x\geq 2 \\ 2-x, & \text{當 } x<2 \end{cases}$，

利用分段積分：

$$\int_0^4 |x-2|dx=\int_0^2 |x-2|dx+\int_2^4 |x-2|dx$$
$$=\int_0^2 (2-x)dx+\int_2^4 (x-2)dx$$
$$=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2+\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_2^4$$
$$=(2-0)+[0-(-2)]=4。$$



隨堂練習

試求定積分 $\int_{-3}^4 |x+1|\,dx$。

例題 3

試求定積分 $\int_2^3 (2x-5)^4dx$。

解 利用代換積分法：

令 $u=2x-5$，則 $\dfrac{du}{dx}=2$，即 $du=2dx$，故得 $dx=\dfrac{1}{2}du$，

因此 $\int(2x-5)^4dx=\int u^4\times\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int u^4du=\frac{1}{2}\times\frac{u^5}{5}+C$

$$=\frac{1}{10}(2x-5)^5+C，$$

所以 $\int_2^3 (2x-5)^4dx=\frac{1}{10}(2x-5)^5\Big|_2^3$

$$=\frac{1}{10}(2\times3-5)^5-\frac{1}{10}(2\times2-5)^5=\frac{1}{10}-\left(-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{5}。$$

隨堂練習

試求定積分 $\int_{0}^{1}(4x-3)^3dx$。

例題 4

試求定積分 $\int_{-2}^{1}6(x+1)(x^2+2x-1)^2dx$。

解 利用代換積分法：

令 $u=x^2+2x-1$，則 $\dfrac{du}{dx}=2x+2$，

即 $du=(2x+2)dx$，故得 $(x+1)dx=\dfrac{1}{2}du$，

因此 $\int 6(x+1)(x^2+2x-1)^2dx$

$=\int 6(x^2+2x-1)^2(x+1)dx$

$=\int 6u^2\times\dfrac{1}{2}du=\int 3u^2du$

$=u^3+C=(x^2+2x-1)^3+C$

所以 $\int_{-2}^{1}6(x+1)(x^2+2x-1)^2dx$

$=(x^2+2x-1)^3\Big|_{-2}^{1}$

$=(1^2+2\times1-1)^3-[(-2)^2+2\times(-2)-1]^3$

$=9$。

隨堂練習

試求定積分 $\int_{-1}^{2}4(4x-3)(2x^2-3x-5)^3dx$。

3-6.3 定積分的應用

在前面 3-5 節中我們討論到，當多項式函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上恆有 $f(x)\geq 0$，則曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸在 $x=a$、$x=b$ 之間所圍成區域面積為 $\int_a^b f(x)dx$；當 $f(x)\leq 0$ 時，則所圍成區域面積為 $-\int_a^b f(x)dx$。

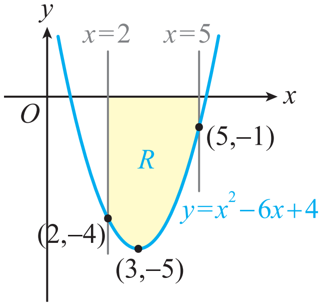
小考箱

( ) 10. 設多項式函數 $f(x)$ 在閉區間 $[-2,3]$ 上恆有 $f(x)\leq 0$，則曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸在 $x=-2$、$x=3$ 之間所圍成區域面積為 $\int_{-2}^3 f(x)dx$。

例題 5

試求函數 $f(x)=x^2-6x+4$ 與 x 軸、$x=2$、$x=5$ 所圍成區域的面積。

解 $f(x)=x^2-6x+4=(x-3)^2-5$ 圖形為一拋物線，
頂點坐標為 $(3,-5)$，與 x 軸、$x=2$、$x=5$
所圍成區域 R，如右圖所示。



$f(x)$ 在區間 $[2,5]$ 恆有 $f(x)\leq 0$，
所以所圍成區域 R 的面積為

$$-\int_2^5 f(x)dx$$
$$=-\int_2^5 (x^2-6x+4)dx$$
$$=-\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+4x\right)\Big|_2^5$$
$$=-\left(\frac{1}{3}\times 5^3-3\times 5^2+4\times 5\right)+\left(\frac{1}{3}\times 2^3-3\times 2^2+4\times 2\right)$$
$$=\frac{40}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)$$
$$=12。$$

隨堂練習

試求函數 $f(x)=-x^2+4x+2$ 與 x 軸、$x=1$、$x=4$ 所圍成區域的面積。

習題 3-6

1. 試求定積分 $\int_{-1}^{1}(2x-3)(2x^2+5)dx$。

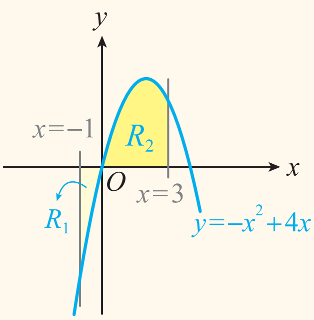
2. 試求定積分 $\int_{0}^{1}(2x-1)^9dx$。

3. 試求定積分 $\int_{-1}^{1}15x^2(x^3+1)^4dx$。

4. 試求定積分 $\int_{-3}^{1}|x+1|dx$。

5. 試求函數 $f(x)=6-x^2$ 與 x 軸、$x=-1$、$x=2$ 所圍成的區域面積。

6. 設函數 $f(x)=-x^2+4x$ 與 x 軸、$x=-1$、$x=3$ 所圍成的區域為下圖 R_1 與 R_2，試求 R_1 與 R_2 面積的和。



本章彙總

3-1重點

1. **無窮數列的極限：**

設 $\langle a_n \rangle$ 為一無窮數列，α 為一實數，當 n 趨向無限大時，a_n 趨近於 α，則稱數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂於 α，或稱數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限為 α，記作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$。

2. **數列極限的運算性質：**

設 $\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$ 為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$，$k$ 為一常數，則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n=k(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)=k\alpha$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n-\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\times b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\times\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$（其中 $\beta\neq 0$ 且 $b_n\neq 0$ 對所有很大的 n 值都成立）。

3. **分式型數列的極限：**

設 $f(n)$、$g(n)$ 為 n 的多項式，則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases}0\text{，當 }\deg f(n)<\deg g(n)\\ f(n)\text{ 與 }g(n)\text{ 領導係數的比值，當 }\deg f(n)=\deg g(n)\\ \text{不存在，當 }\deg f(n)>\deg g(n)\end{cases}$$

4. **夾擠定理：**

設 $\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$、$\langle c_n \rangle$ 為三個無窮數列，且從某一項起恆有 $a_n\leq b_n\leq c_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\alpha$（其中 α 為實數），則 $\langle b_n \rangle$ 亦為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha$。

5. **函數的極限：**

設 a、α 為實數，若函數 $f(x)$，當 x 趨近於 a 時（由 a 的左、右兩邊趨近，且 $x \neq a$），函數 $f(x)$ 的值會趨近於某一個固定的值 α，則稱「當 x 趨近於 a 時，函數 $f(x)$ 的極限為 α」，記作 $\lim\limits_{x \to a} f(x)=\alpha$。

6. **函數的左、右極限：**

(1) 設函數 $f(x)$，當 x 從 a 的右邊趨近於 a（$x \neq a$）時，函數 $f(x)$ 的值會趨近於定值 α，則稱 α 為 $f(x)$ 於 a 的右極限，記作 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=\alpha$。

(2) 設函數 $f(x)$，當 x 從 a 的左邊趨近於 a（$x \neq a$）時，函數 $f(x)$ 的值會趨近於定值 β，則稱 β 為 $f(x)$ 於 a 的左極限，記作 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)=\beta$。

《註》設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的鄰近區域有定義，則

$$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^+} f(x)=\lim_{x \to a^-} f(x)=\alpha。$$

7. **函數極限的運算性質：**

設函數 $f(x)$、$g(x)$ 在 $x=a$ 的極限分別為 α、β，即 $\lim\limits_{x \to a} f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x \to a} g(x)=\beta$，又 k 為一常數，則

(1) $\lim\limits_{x \to a} kf(x)=k(\lim\limits_{x \to a} f(x))=k\alpha$。

(2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x \to a} f(x)+\lim\limits_{x \to a} g(x)=\alpha+\beta$。

(3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x \to a} f(x)-\lim\limits_{x \to a} g(x)=\alpha-\beta$。

(4) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)\times g(x)]=\lim\limits_{x \to a} f(x)\times\lim\limits_{x \to a} g(x)=\alpha\beta$。

(5) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$（$\beta \neq 0$）。

本章彙總

8. 多項式函數極限的性質：

設 $f(x)$、$g(x)$ 為二實係數多項式函數，a 為實數，則

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

(2) 當 $g(a)\neq 0$ 時，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$。

9. 區間的表示法：

設 a、b 為實數且 $a<b$，$\mathbb{R}$ 為全部實數的集合，則

(1) $[a,b]=\{x\mid a\leq x\leq b，x\in\mathbb{R}\}$。

(2) $(a,b)=\{x\mid a<x<b，x\in\mathbb{R}\}$。

(3) $[a,b)=\{x\mid a\leq x<b，x\in\mathbb{R}\}$。

(4) $(a,b]=\{x\mid a<x\leq b，x\in\mathbb{R}\}$。

(5) $(-\infty,a]=\{x\mid x\leq a，x\in\mathbb{R}\}$。

(6) $(-\infty,a)=\{x\mid x<a，x\in\mathbb{R}\}$。

(7) $[a,\infty)=\{x\mid x\geq a，x\in\mathbb{R}\}$。

(8) $(a,\infty)=\{x\mid x>a，x\in\mathbb{R}\}$。

10. 函數的連續：

函數 $f(x)$ 滿足下列三個條件：

(1) $f(x)$ 在 $x=a$ 有定義（即 $f(a)$ 存在）。

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在。

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

則稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續。

當函數 $f(x)$ 在定義域中的每一個點都連續，則稱函數 $f(x)$ 為連續函數。

《註》函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在。反之，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 未必連續。

3-2 重點

1. **導數的定義：**

   設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 及鄰近區域都有意義，若極限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在，則稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數存在，並稱此極限值為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數，記作 $f'(a)$，即 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$。

   《註》若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數 $f'(a)$ 存在，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分，否則稱為不可微分。

2. 設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分，則函數 $y=f(x)$ 的圖形在點 $A(a,f(a))$ 的切線斜率為 $f'(a)$。

3. 函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$，若令 $x-a=h$，則 $x=a+h$。當 $x\to a$ 時，意指 $h\to 0$，因此函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數亦可表示為 $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。

4. **可微分與連續的關係：**

   函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 必連續。反之，函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，但 $f(x)$ 在 $x=a$ 未必可微分。

本章彙總

5. **導函數：**

設函數 $f(x)$ 的定義域為 D（$D\subset\mathbb{R}$），又 C 為 D 中導數存在的所有數所成的集合（$C\subset D$），對於 C 中的每一個數 a，都恰有一個數 $f'(a)$ 與之對應，這種對應形成一種函數關係，稱為 $f(x)$ 的導函數，記作 $f'(x)$，其定義域為 C。當 $f'(x)$ 與 $f(x)$ 定義域相同（亦即 $C=D$）時，表示函數 $f(x)$ 在定義域 D 中每一個數的導數都存在，則稱 $f(x)$ 為可微分函數。

《註》$f(x)$ 的導函數 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$。

3-3 重點

1. **微分公式：**（設 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數）
   (1) 若 $f(x)=c$（c 為常數），則 $f'(x)=0$。
   (2) 若 $f(x)=x^n$（n 為有理數），則 $f'(x)=nx^{n-1}$。
   (3) 若 $h(x)=kf(x)$（k 為常數），則 $h'(x)=kf'(x)$。
   (4) 若 $h(x)=f(x)+g(x)$，則 $h'(x)=f'(x)+g'(x)$。
   (5) 若 $h(x)=f(x)-g(x)$，則 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$。
   (6) 若 $h(x)=f(x)g(x)$，則 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$。
   (7) 若 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，則 $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$（$g(x)\neq 0$）。

2. **多項式函數的導函數：**

設 n 為正整數且 $a_n\neq 0$，實係數多項式函數
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，則
$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$。

3. **連鎖規則**：（設 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數）

若 $h(x)=f(g(x))$，則 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$。

《註》設 $f(x)$ 為可微分函數，n 為有理數，若 $h(x)=[f(x)]^n$，則

$h'(x)=n[f(x)]^{n-1}\times f'(x)$。

4. **第二階導函數**：

設 $f(x)$ 為可微分函數，其導函數為 $f'(x)$。若 $f'(x)$ 仍可微分，則其導函數記作 $f''(x)$，稱為函數 $f(x)$ 的第二階導函數。函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的第二階導數為 $f''(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$。

3-4 重點

1. **函數的遞增與遞減**：

設區間 $[a,b]$ 在函數 $f(x)$ 的定義域內，對於 $[a,b]$ 中任意相異兩個數 x_1 與 x_2：

(1) 當 $x_1<x_2$ 時，恆有 $f(x_1)\leq f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為遞增函數；若將上述中不等號「 $\leq$ 」改成「 $<$ 」，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為嚴格遞增函數。

(2) 當 $x_1<x_2$ 時，恆有 $f(x_1)\geq f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為遞減函數；若將上述中不等號「 $\geq$ 」改成「 $>$ 」，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為嚴格遞增函數。

2. **導數的正負與函數的遞增、遞減關係**：

設 $f(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的多項式函數，對於任意 $x\in(a,b)$：

(1) 若 $f'(x)>0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上為嚴格遞增函數。

(2) 若 $f'(x)<0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上為嚴格遞減函數。

本 章 彙 總

3. **函數圖形的凹向：**

   設 $f(x)$ 為區間 (a,b) 上的多項式函數：

   (1) 若 $f'(x)$ 在區間 (a,b) 為嚴格遞減函數，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向下。

   (2) 若 $f'(x)$ 在區間 (a,b) 為嚴格遞增函數，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向上。

4. **利用第二階導函數判斷函數圖形的凹向：**

   設 $f(x)$ 為區間 (a,b) 上的多項式函數，對於任意 $x\in(a,b)$：

   (1) 若 $f''(x)<0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向下。

   (2) 若 $f''(x)>0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向上。

   《註》函數圖形凹向改變的分界點，稱為反曲點。

5. **函數的極值：**

   (1) 設 x_1、x_2 為函數 $f(x)$ 定義域中的實數，若在定義域中 x_1 鄰近區域的每個實數 x，恆有 $f(x_1)\geq f(x)$，則稱 $f(x_1)$ 為函數 $f(x)$ 的一個極大值；若在定義域中 x_2 鄰近區域的每個實數 x，恆有 $f(x_2)\leq f(x)$，則稱 $f(x_2)$ 為函數 $f(x)$ 的一個極小值。

   (2) 設 α、β 為函數 $f(x)$ 定義域中的實數，對於函數 $f(x)$ 定義域中的每個實數 x 都滿足 $f(\alpha)\geq f(x)$ 且 $f(\beta)\leq f(x)$，則稱 $f(\alpha)$ 為函數 $f(x)$ 的最大值，$f(\beta)$ 為函數 $f(x)$ 的最小值。

6. **多項式函數極值可能發生的點：**

   設 $f(x)$ 為定義在 $[a,b]$ 上的多項式函數，則 $f(x)$ 極值可能發生的點為

   (1) 在閉區間 $[a,b]$ 中滿足 $f'(x)=0$ 的點（亦即函數 $f(x)$ 的臨界點）。

   (2) 閉區間 $[a,b]$ 的端點 a 和 b。

7. **利用第一階導函數判別極大、極小值：**

設 $f(x)$ 為多項式函數且 $f'(c)=0$：

(1) 在 $x=c$ 的鄰近區域，當 $x<c$ 時，$f'(x)>0$；當 $x>c$ 時，$f'(x)<0$，則函數 $f(x)$ 有極大值 $f(c)$。

(2) 在 $x=c$ 的鄰近區域，當 $x<c$ 時，$f'(x)<0$；當 $x>c$ 時，$f'(x)>0$，則函數 $f(x)$ 有極小值 $f(c)$。

8. **利用第二階導函數判別極大、極小值：**

設 $f(x)$ 為多項式函數且 $f'(c)=0$，則

(1) 當 $f''(c)<0$ 時，函數 $f(x)$ 有極大值 $f(c)$。

(2) 當 $f''(c)>0$ 時，函數 $f(x)$ 有極小值 $f(c)$。

3-5 重點

1. **反導函數：**

設函數 $F(x)$ 的導函數為 $f(x)$，亦即 $F'(x)=f(x)$，則稱 $F(x)$ 是函數 $f(x)$ 的一個反導函數。

2. **不定積分：**

設 $F(x)$ 是函數 $f(x)$ 的一個反導函數，C 為任意常數，則 $F(x)+C$ 稱為函數 $f(x)$ 的不定積分，以符號 $\int f(x)dx$ 表示，亦即 $\int f(x)dx=F(x)+C$。

3. **不定積分的公式：**

(1) 設 $n \neq -1$ 的有理數，則 $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$（$C$ 為常數）。

(2) 設 k 為常數，則 $\int kdx=kx+C$（C 為常數）。

本章彙總

(3) 設 k 為常數，則 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$。

(4) $\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$。

(5) $\int [f(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$。

4. **定積分的性質：**

設 $f(x)$、$g(x)$ 為多項式函數，a、b 為實數且 $a<b$，k 為任意常數，則

(1) $\int_a^a f(x)dx=0$。

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$。

(3) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$。

(4) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$（其中 $a<c<b$）。

(5) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$。

(6) $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$。

5. **定積分與面積的關係：**

設 $f(x)$ 為閉區間 $[a,b]$ 上的多項式函數，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 相當於曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成的區域中，在 x 軸上方部分的面積減去在 x 軸下方部分的面積。

3-6 重點

1. **代換積分：**

$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$（其中 $u=g(x)$）。

2. **微積分基本定理：**

設 $f(x)$ 為閉區間 $[a,b]$ 上的一個多項式函數，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數，則 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

自我評量

( ) 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(2n-1)}{(3n-1)^2}=$ (A)$\dfrac{1}{3}$ (B)$\dfrac{2}{3}$ (C)$\dfrac{2}{9}$ (D)2。 【3-1】

( ) 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+4^n}{3^n+4^{n-1}}=$ (A)4 (B)$\dfrac{4}{3}$ (C)3 (D)1。 【3-1】

( ) 3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{4}\right)=$ (A)0 (B)$\dfrac{1}{2}$ (C)$\dfrac{1}{4}$ (D)$-\dfrac{1}{4}$。 【3-1】

( ) 4. 設函數 $f(x)=\begin{cases}x^2+3，當 x\geq 1\\ 2x^2+3x-1，當 x<1\end{cases}$，則 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$ (A)3 (B)4 (C)5 (D)不存在。 【3-1】

( ) 5. 設函數 $f(x)=\begin{cases}x^2+kx-3，當 x\geq 2\\ 3kx-5，當 x<2\end{cases}$，若函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 連續，則 $k=$ (A)1 (B)$\dfrac{2}{3}$ (C)$\dfrac{3}{2}$ (D)2。 【3-1】

( ) 6. 設 $f(x)=x\sqrt{4x^2+1}$，則 $f(x)$ 在 $x=0$ 的導數 $f'(0)=$ (A)-1 (B)$-\dfrac{1}{4}$ (C)0 (D)1。 【3-2】

( ) 7. 過函數 $f(x)=4x^2-3x+1$ 的圖形上一點 $P(1,2)$ 的切線方程式為 (A)$5x-y-3=0$ (B)$5x+y-7=0$ (C)$x-5y+9=0$ (D)$x+5y-11=0$。 【3-2】

( ) 8. 設函數 $f(x)=x^2+5$，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{4h}=$ (A)$\dfrac{3}{4}$ (B)$\dfrac{3}{2}$ (C)$\dfrac{2}{3}$ (D)$\dfrac{1}{2}$。 【3-2】

( ) 9. 若 $f(x)=(x^2+3x+1)(x^2-3x+5)$，則 $f'(1)=$ (A)15 (B)10 (C)4 (D)-5。 【3-3】

( ) 10. 設 $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-1}$，則 $f(x)$ 在 $x=2$ 的導數 $f'(2)=$ (A)$\dfrac{8}{3}$ (B)$-\dfrac{3}{8}$ (C)$\dfrac{7}{9}$ (D)$-\dfrac{7}{9}$。 【3-3】

自我評量

(　　) 11. 設 $f(x)=(2x^2+3x-4)^8$，則 $f'(1)$ 的值為　(A) 56　(B) 48　(C) 40　(D) 32。【3-3】

(　　) 12. 若 $f(x)=(2x-3)(x+2)^2$，則 $f''(-1)$ 的值為　(A) -8　(B) -6　(C) -2　(D) 4。【3-3】

(　　) 13. 已知點 $A(2,3)$ 在函數 $f(x)=\sqrt{3x^2-2x+1}$ 的圖形上，則過點 A 的切線斜率為　(A) $\frac{5}{3}$　(B) $-\frac{5}{3}$　(C) $\frac{5}{2}$　(D) $-\frac{5}{2}$。【3-3】

(　　) 14. 函數 $f(x)=3x-x^3$ 在下列哪一區間內為嚴格遞增？　(A) $(-\infty,-1)$　(B) $(-1,1)$　(C) $(-\infty,1)$　(D) $(-1,\infty)$。【3-4】

(　　) 15. 函數 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5$ 在下列哪一區間內圖形凹口向上？　(A) $(-\infty,-4)$　(B) $(-4,2)$　(C) $(0,2)$　(D) $(2,\infty)$。【3-4】

(　　) 16. 下列哪一點是函數 $f(x)=-x^3-3x^2+9x+11$ 圖形的反曲點？　(A) $(1,16)$　(B) $(-3,-16)$　(C) $(-1,0)$　(D) $(2,9)$。【3-4】

(　　) 17. 設函數 $f(x)=x^3-3x^2-24x+10$ 的極大值為 M，極小值為 m，則 $M+m=$　(A) -32　(B) -2　(C) 13　(D) 26。【3-4】

(　　) 18. 函數 $f(x)=ax^3-6x^2+9x+b$ 在 $x=1$ 有極大值 9，則 $a-b=$　(A) 3　(B) -3　(C) 4　(D) -4。【3-4】

(　　) 19. 下列何者是函數 $f(x)=15x^2-8x+3$ 的一個反導函數？　(A) $5x^3-4x^2+3$　(B) $5x^3-4x^2+3x+2$　(C) $-5x^3+4x^2-3$　(D) $-5x^3+4x^2-3x+2$。【3-5】

(　　) 20. 已知 $\int_a^b f(x)dx=6$，$\int_a^b g(x)dx=12$，$\int_a^b h(x)dx=4$，若 $\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=13$，$\int_a^b [\alpha g(x)-\beta h(x)]dx=5$，則 $6\alpha+8\beta=$　(A) 6　(B) 8　(C) 10　(D) 12。【3-5】

(　　) 21. 已知 $\int_2^5 f(x)dx=2$，$\int_5^8 f(x)dx=3$，$\int_2^8 g(x)dx=4$，則 $\int_2^8 [5f(x)+3g(x)]dx=$　(A) 32　(B) 34　(C) 36　(D) 37。【3-5】

(　　) 22.定積分 $\int_1^{27}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=$　(A)3　(B)6　(C)8　(D)12。 【3-6】

(　　) 23.定積分 $\int_{-1}^{1}(x+1)(2x+1)dx=$　(A)5　(B)$\frac{10}{3}$　(C)2　(D)$\frac{4}{3}$。 【3-6】

(　　) 24.定積分 $\int_0^3(x-2)(x^2-4x+1)^2dx=$　(A)$\frac{7}{2}$　(B)$\frac{3}{2}$　(C)$-\frac{3}{2}$　(D)$-\frac{7}{2}$。 【3-6】

(　　) 25.函數 $f(x)=1-x^2$ 的圖形與 x 軸在區間 $[0,2]$ 所圍區域的面積為　(A)2　(B)4　(C)$\frac{2}{3}$　(D)$\frac{4}{3}$。 【3-6】