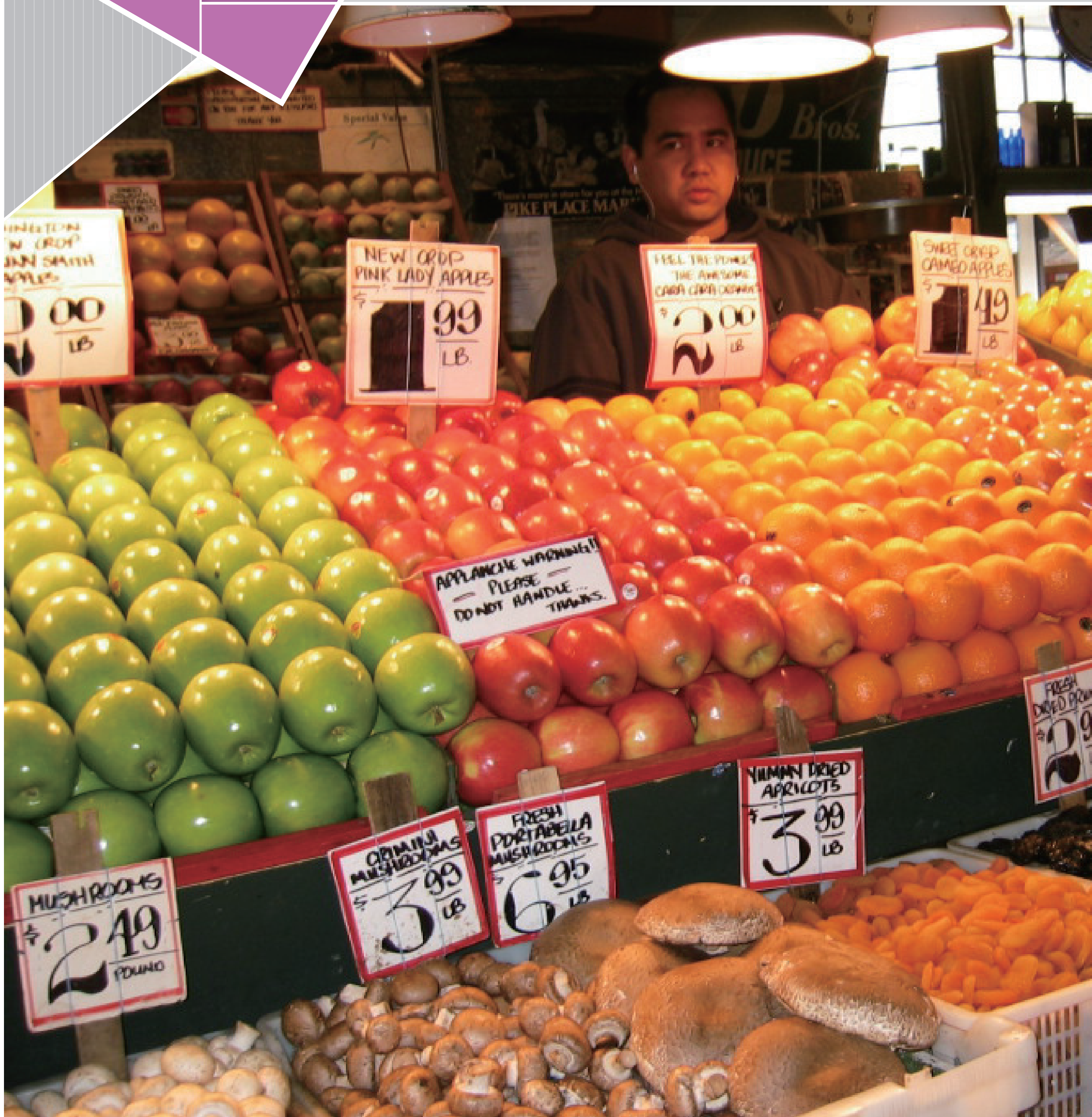
3 排列組合


NEW CROP
PINK LADY APPLES
$ 1 99 LB.
AVALANCHE WARNING!!
PLEASE
DO NOT HANDLE... THANKS.
MUSHROOMS
$ 2 49 POUND
CRIMINI MUSHROOMS
$ 3 99 LB
FRESH
PORTABELLA
MUSHROOMS
6 95 LB
DRIED
APRICOTS
$ 3 99 LB

數學小天地

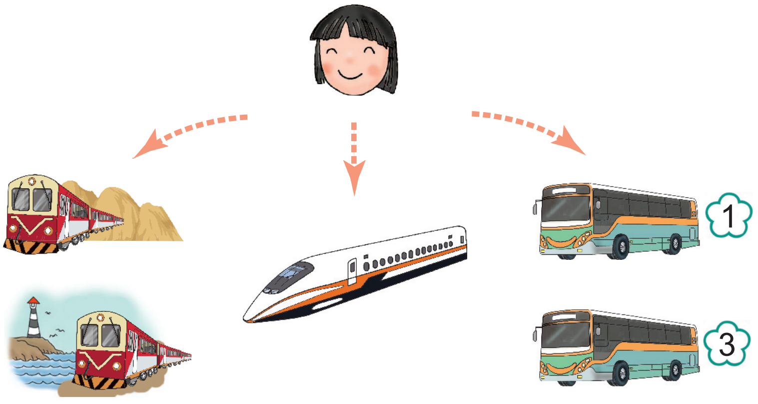
排列組合是初等數學中較為獨特的內容之一，它在機率論、組合數學及級數論等高等數學分支中也有著廣泛的應用。排列組合發展的歷史也是十分悠久的，在中國最早的文獻記載見於《周易》中關於卦符問題的研究。此後，張遂、沈括等人的棋局都數問題，及楊輝三角形等，都包含了排列組合思想和方法。本章將從加法原理、乘法原理及樹狀圖有系統討論排列組合的各種類型及其計算方法。

＊ 3-1 乘法原理與樹狀圖

在國中所學的機率，我們用樹狀圖來呈現各種可能的結果。當情況有規律時，可以透過加法原理與乘法原理計算其總數，這是解排列組合問題的理論基礎。因此在學習排列與組合之前，必須先熟習這兩個最基本的原理。

3-1.1 加法原理

丞凌要從高雄到臺北參加同學的婚禮，其交通工具可搭乘火車（山、海 2 線）、高速鐵路，或巴士（國道 1 號、3 號 2 線）。因此丞凌有 $2+1+2=5$ 條路線到臺北。像這樣依分類方式，求得方法總數的原理稱為加法原理。



加法原理

若完成某件工作的方法可區分成 k 類，且第 1 類有 m_1 種方法，第 2 類有 m_2 種方法，……，第 k 類有 m_k 種方法，則完成這件工作的方法共有 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k$ 種。

例題 1

丞凌到便當店用餐，此家供應的主食中，魚類有虱目魚、鱈魚及吳郭魚 3 種，雞肉類有炸雞塊、烤雞腿 2 種，豬肉類有炸排骨、梅干扣肉 2 種，試問丞凌點餐的主食共有多少種選擇方式？

解　選擇魚類有 3 種，選擇雞肉類有 2 種，選擇豬肉類有 2 種，
由加法原理知，共有 $3+2+2=7$ 種點餐的選擇方式。

隨堂練習

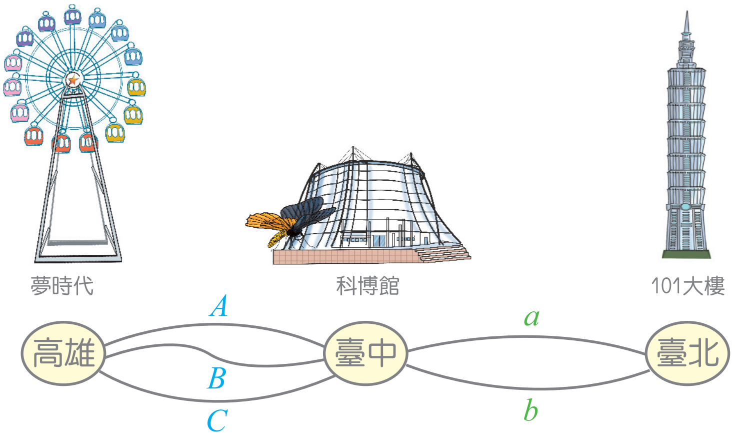
1. 書架上有 7 種不同的中文書和 3 種不同的英文書，若志翔從書架上任選一本書，試問共有多少種選法？

3-1.2 乘法原理與樹狀圖

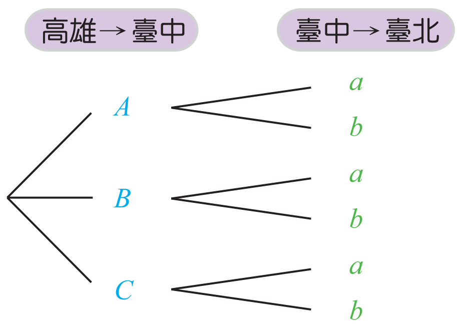
丞凌要從高雄到臺北，必須先到臺中，若從高雄到臺中可利用 A、B、C 三種交通工具，從臺中到臺北可利用 a、b 兩種交通工具，則

【第一步驟】從高雄到臺中有 3 種不同的選擇。

【第二步驟】臺中到臺北有 2 種不同的選擇。



我們可以利用樹狀圖描述所有不同的選擇方式。



▲ 圖 3-1

因此，共有 Aa、Ab、Ba、Bb、Ca、Cb 六種方式。由樹狀圖我們可以發現這樣的規律：「從高雄到臺中的 A、B、C 三種選擇後，分別可以再選擇 a、b 兩種到臺北」，因此，從高雄到臺北有 $3 \times 2 = 6$ 種選擇方式。像這樣利用乘法將方法數求出的原理稱為乘法原理。

乘法原理

若完成某件工作的方法須經過 k 個步驟，且第 1 步驟中有 m_1 種方法，第 2 步驟中有 m_2 種方法，……，第 k 步驟中有 m_k 種方法，則完成這件工作的方法共有 $m_1 \times m_2 \times \cdots\cdots \times m_k$ 種。

例題 2

丞凌到餐飲店用餐，此家供應有主菜、湯及飲料 3 樣餐點。其中主菜有牛排、魚排、雞排與羊排 4 種，湯有玉米濃湯與酸辣湯 2 種，飲料有柳橙汁、紅茶與咖啡 3 種，每位客人只能從主菜、湯及飲料種類中，各任選一種，試問丞凌有多少種不同的點餐方式？

解

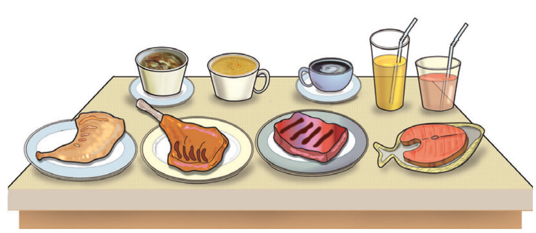
選擇一種主菜有 4 種，

選擇一種湯有 2 種，

選擇一種飲料有 3 種。

由乘法原理知，

共有 $4 \times 2 \times 3 = 24$ 種點餐的選擇方式。



隨堂練習

2. 書架上有 7 種不同的中文書和 3 種不同的英文書，若志翔從書架上選中文和英文書各一本，試問共有多少種選法？

小考箱

（　）1. 班上有 15 位男同學、12 位女同學，今欲選出 2 名班級代表參加高三畢業旅行籌備會，且男女各一人，則共有 27 種推舉方法？

例題 3

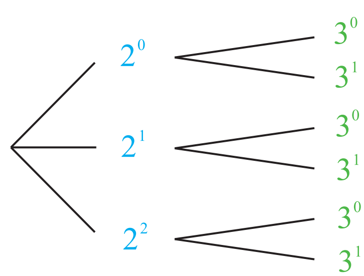
試利用樹狀圖，求 12 的正因數個數。

解 將 12 作質因數分解得 $12 = 2^2 \times 3$，

因為 12 的正因數必為 $2^a \times 3^b$ 的形式，

其中 a 可為 0 , 1 , 2，b 可為 0 , 1，

所以 a 有 3 種選擇，b 有 2 種選擇。由樹狀圖列出



再由乘法原理知，有 $3 \times 2 = 6$ 個正因數個數

隨堂練習

3. 試利用樹狀圖，求 75 的正因數個數。

例題 4

丞凌要參加同學的婚禮，欲穿著正式服裝，她有 5 套不同的洋裝，3 件不同的線衫，4 件不同的裙子，3 雙不同的高跟鞋及 4 雙不同的涼鞋，若穿著洋裝要配高跟鞋，穿著線衫要配裙子且穿涼鞋（洋裝與線衫不同時穿），試問丞凌共有多少種搭配方法？

解 需分成兩類：洋裝與線衫。

若穿著洋裝要配高跟鞋，有 $5\times3=15$ 種搭配方法，

若穿著線衫要配裙子且穿涼鞋，有 $3\times4\times4=48$ 種搭配方法，

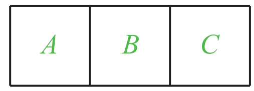
因此共有 $15+48=63$ 種搭配方法。

隨堂練習

4. 志翔到麵攤吃麵，此麵攤賣有 5 種不同的湯麵，3 種不同的乾麵，3 種不同的湯與 4 種不同的小菜。若點湯麵，則不必配湯；若點乾麵，則必配湯（湯麵與乾麵不同時點），不論點湯麵或乾麵，一定會點 1 種小菜，試問志翔共有多少種不同的點餐方式？

例題 5

丞凌以 5 種不同的顏色塗在右圖 A、B、C 三個區域，每個區域都要塗，試問：



(1) 若顏色可重複使用，則共有多少種塗法？

(2) 若顏色可重複使用且相鄰區域不同色，則共有多少種塗法？

(3) 若顏色不可重複使用，則共有多少種塗法？

解 (1) 若顏色可重複使用，分三步驟：

①塗 A 區域有 5 種選擇；

②塗 B 區域有 5 種選擇；

③塗 C 區域有 5 種選擇。

由乘法原理知，共有 $5\times5\times5=125$ 種塗法。

(2) 若顏色可重複使用且相鄰區域不同色，分三步驟：

①塗 A 區域有 5 種選擇；

②塗 B 區域，因為不能與 A 區域同色，所以只剩 4 種選擇；

③再塗 C 區域，因為不能與 B 區域同色，所以只剩 4 種選擇。

由乘法原理知，共有 $5\times4\times4=80$ 種塗法。

(3) 若顏色不可重複使用，分三步驟：

①塗 A 區域有 5 種選擇；

②塗 B 區域，因為不能與 A 區域同色，所以只剩 4 種選擇；

③再塗 C 區域，因為不能與 A、B 區域同色，所以只剩 3 種選擇。

由乘法原理知，共有 $5\times4\times3=60$ 種塗法。

隨堂練習

5. 志翔用 1、2、3、4 四個數字排成三位數，試問：

(1) 若數字可重複使用，則可組成幾個不同的三位數？

(2) 若數字不可重複使用，則可組成幾個不同的三位數？

習題 3-1

1. 九月四日在藝術館有雲門舞集的表演，藝術館的右側有 3 個門，左側有 2 個門，後方有 2 個門，試問：
   (1) 丞凌若要進入藝術館欣賞雲門舞集的表演，有多少種進入的方法？
   (2) 若雲門舞集的表演結束後，丞凌由不同的門走出來，有多少種進出的方法？

2. 電子科甲、乙兩班，甲班有 40 人，乙班有 41 人，若老師依照下列方式選出學生，問分別有多少種選擇方式：
   (1) 甲、乙兩班中選出一位參加金手獎比賽。
   (2) 甲、乙兩班中各選出一位參加金手獎比賽。

3. 試利用樹狀圖，求 24 的正因數個數。

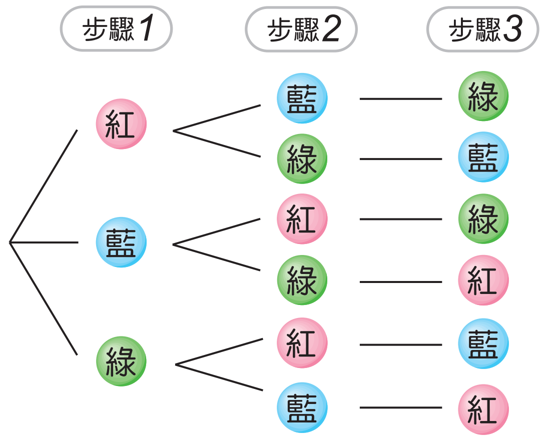
4. 用 1、2、3、4、5 五個數字排成三位數，試問：
   (1) 若數字可重複使用，則可組成幾個不同的三位數？
   (2) 若數字可重複使用，則可組成幾個不同的三位數奇數？
   (3) 若數字不可重複使用，則可組成幾個不同的三位數？
   (4) 若數字不可重複使用，則可組成幾個不同的三位數偶數？

＊ 3-2 排 列

「排列」與「組合」都是屬於計數問題，利用上一節已學過計數的基本原理—加法原理與乘法原理，進而解決日常生活中所遇到的實際問題。本節先探討基本的「排列」問題：從 n 個不同的事物，任取 m 個並排定次序的方法數，進而討論其他變化的情形。

3-2.1 直線排列

有紅、藍、綠三顆球，要將此三球排列在桌上，可排列出多少種不同的結果？讓我們先畫樹狀圖計算一下：



▲ 圖 3-2

共有「紅藍綠、紅綠藍、藍紅綠、藍綠紅、綠紅藍、綠藍紅」這 6 種不同的排法。觀察上述的樹狀圖，我們也可以將它分成如下的 3 個步驟來討論：

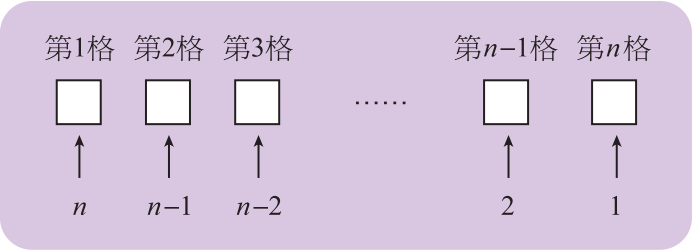
【第 1 步驟】從紅、藍、綠三球中選出一球排在第一個位置，有 3 種選擇。

【第 2 步驟】從剩下的兩球中選出一球排在第二個位置，有 2 種選擇。

【第 3 步驟】最後剩下一球排在第三個位置，僅有 1 種選擇。

由乘法原理知，共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 種不同的排列方式。

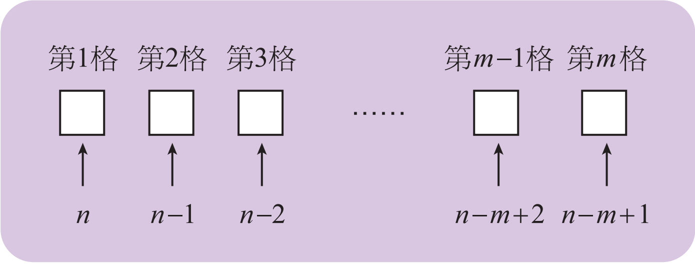
一般而言，將 n 個不同的事物（即相異物）排成一列，想要知道有多少種排列方法，我們可以仿照上面的步驟。首先畫出 n 個空格，再將 n 個不同的事物從左到右一一排入 n 個空格。



▲ 圖 3-3

由乘法原理知，要填完 n 個空格總共有 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times2\times1$ 種方法。我們以符號 P^n_n 表示由 n 個不同的事物排成一列的方法數 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times2\times1$，通常又用 $n\,!$表示 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times2\times1$ 的連乘積，稱為 n 的階乘，故 $P^n_n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times2\times1=n\,!$。

接著討論：從 n 個不同的事物中任選 m 個（不一定全取）排成一列，總共有多少種排法？我們可以仿照上面的方式。首先畫出 m 個空格，再將 n 個不同的事物從左到右一一排入 m 個空格。



▲ 圖 3-4

由乘法原理知，要填完 m 個空格總共有 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times(n-m+2)\times(n-m+1)$種方法。我們以符號 P^n_m 表示由 n 個不同的事物任選 m 個($m\le n$)排成一列的方法數 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times(n-m+2)\times(n-m+1)$，故

$$P^n_m=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times(n-m+2)\times(n-m+1)=\frac{n\,!}{(n-m)\,!}$$

$$=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times(n-m+1)\times(n-m)\times\cdots\cdots\times2\times1}{(n-m)\times\cdots\cdots\times2\times1}$$

由以上的討論，可得排列總數的公式如下：

完全相異物的直線排列

(1) 將 n 個不同的事物排成一列的排列總數為

$$P_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots\cdots \times 2 \times 1 = n\,!$$

(2) 從 n 個不同的事物中任選 m 個($m \le n$)排成一列的排列總數為

$$P_m^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots\cdots \times (n-m+2) \times (n-m+1) = \frac{n\,!}{(n-m)\,!}$$

如果我們規定 $0\,! = 1$，則不論 $m = n$ 或 $m < n$，

$$P_m^n = \frac{n\,!}{(n-m)\,!}$$ 均成立

小考箱

(　) 2. 想一想：「$2\,!$」之值為 2，「$1\,!$」之值為 1，「$0\,!$」之值是否為 0？

例題 1

試求下列各式的值：

(1) $4\,!$　(2) $\dfrac{6\,!}{4\,!}$　(3) P_3^{10}　(4) P_6^6

解

(1) $4\,! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$　(2) $\dfrac{6\,!}{4\,!} = \dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = 6 \times 5 = 30$

(3) $P_3^{10} = \dfrac{10\,!}{(10-3)\,!} = \dfrac{10\,!}{7\,!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

(4) $P_6^6 = \dfrac{6\,!}{(6-6)\,!} = \dfrac{6\,!}{0\,!} = 6\,! = 720$

隨堂練習

1. 試求下列各式的值：

(1) $5\,!$　(2) P_2^8　(3) P_3^3

例題 2

甲、乙、丙、丁、戊五個人排成一列，試問：

(1) 任意排有多少種排法？

(2) 甲為班長必排在首位，有多少種排法？

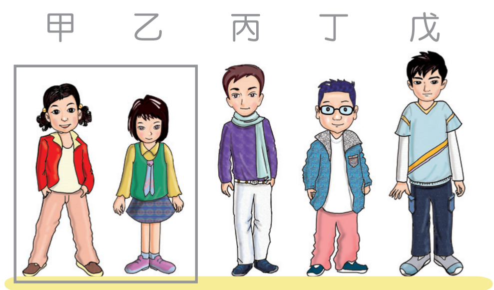
(3) 甲、乙兩人一定要相鄰，有多少種排法？

(4) 甲、乙兩人必不相鄰，有多少種排法？

解 (1) 任意作直線排列有 $5!=120$ 種排法。

(2) 甲必排在首位，有 1 種選擇，其餘四人任意作直線排列有 $4!$ 種排法，所以有 $1\times 4!=24$ 種排法。

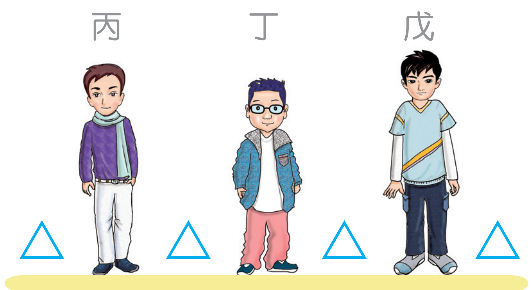
(3) 將甲、乙兩人視為一體與其餘三人作直線排列有 $4!$ 種排法，



又甲、乙兩人之間有 $2!$ 種排法（可對調），

所以甲、乙兩人一定要相鄰有 $4!\times 2!=48$ 種排法。

(4) 先將甲、乙兩人除外剩下的三人作直線排列有 $3!$ 種排法，



再將甲、乙兩人排入三人的間隔中（即圖中的△）有 P^4_2 種排法，

所以甲、乙兩人必不相鄰有 $3!\times P^4_2=72$ 種排法。

【註】作直線排列的特殊情況：

1. 若有特別條件的先排入，再排其他。
2. 若必相鄰的條件，先將其視為一體與其他一起排，再考慮相鄰之間的排列。
3. 若必不相鄰的條件，先將其除外，其他先作排列，再插入間隔中。

隨堂練習

2. 男同學 4 人與女同學 2 人排成一列，合拍團體照，試問：

   (1) 任意排有多少種排法？

   (2) 男同學 4 人一定要相鄰，有多少種排法？

   (3) 男同學 4 人一定要相鄰且女同學 2 人也要相鄰，有多少種排法？

   (4) 女同學 2 人必不相鄰，有多少種排法？

前面談到的排列，所討論的事物都是不同的。如果事物中有些相同，其結果是否與前面所討論的相同？我們舉個簡單的例子：將相同的白球 3 個與紅球 1 個排成一列，可排列出多少種不同的結果？分別將 3 個白球標上 1 號、2 號、3 號與紅球排成一列。

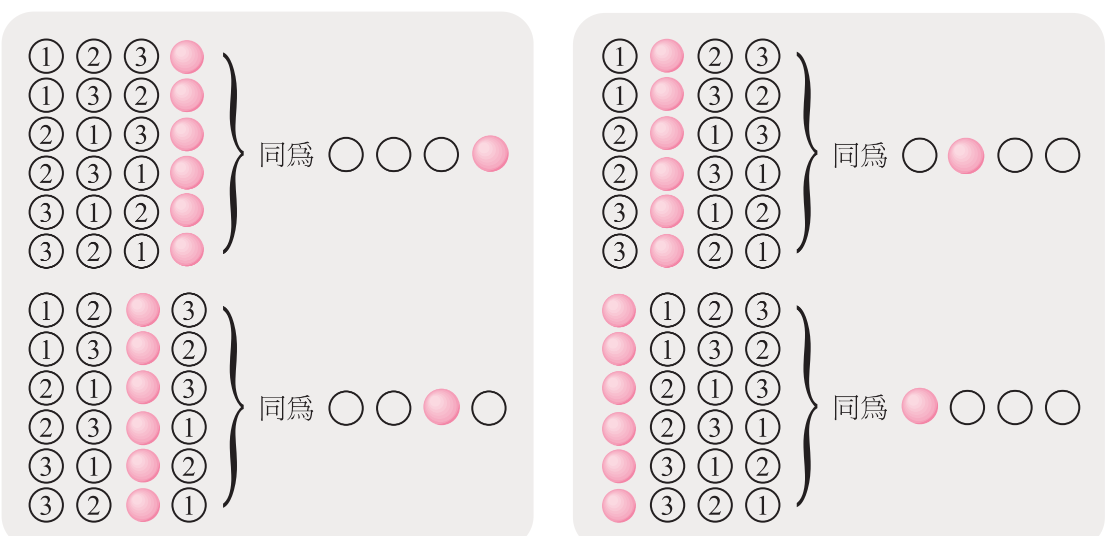


圖 3-5

從上面的討論知道，將編有號碼的 3 個白球與 1 個紅球作直線排列時，每 $3!$種排法會對應到同一種 3 個相同白球與 1 個紅球的排列，因此將相同的白球 3 個與紅球 1 個排成一列，共有 $\frac{4!}{3!}$ 種排法。

由以上的討論，可得排列總數的公式如下：

有相同物的直線排列

(1) 設 n 個事物有 p 個相同，其餘皆不同，排成一列的總數為

$$\frac{n!}{p!}$$

(2) 設有 n 個事物，共有 k 種不同種類（同類中的事物相同），第 1 類有 p_1 個，第 2 類有 p_2 個，……，第 k 類有 p_k 個（即 $n=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k$），將此 n 個事物排成一列的總數為

$$\frac{n!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_k!}$$

例題 3

將相同的原子筆 3 枝與相同的鉛筆 2 枝分給 5 個小朋友，每人各得 1 枝，共有多少種分法？

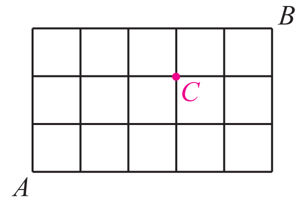
解 5 枝筆分給 5 個小朋友，就是將 5 枝筆做排列，其中相同的原子筆 3 枝、相同的鉛筆 2 枝，利用有相同物的直線排列，有 $\frac{5!}{3!\,2!}=10$ 種分法。

隨堂練習

3. 將「*better*」一字所有的字母重新排列，有多少種不同的排法？

例題 4

如圖棋盤街道中，試問：



(1) 從 A 到 B 的捷徑走法，共有幾種？

(2) 從 A 到 B 且要經過 C 的捷徑走法，共有幾種？

(3) 從 A 到 B 且不經過 C 的捷徑走法，共有幾種？

解 (1) 從 A 到 B 的捷徑須向右走 5 格，向上走 3 格，也就是每一路徑都是由 5 個「右」與 3 個「上」所組成，即「右右右右右上上上」的排列，利用有相同物的直線排列，有 $\dfrac{8!}{5!\,3!}=56$ 種不同的走法。

(2) 從 A 到 C 的捷徑須向右走 3 格，向上走 2 格，即「右右右上上」的排列，有 $\dfrac{5!}{3!\,2!}$ 種不同的走法。

從 C 到 B 的捷徑須向右走 2 格，向上走 1 格，即「右右上」的排列，有 $\dfrac{3!}{2!\,1!}$ 種不同的走法。

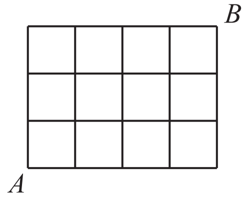
因此，從 A 到 B 經過 C 的捷徑有 $\dfrac{5!}{3!\,2!}\times\dfrac{3!}{2!\,1!}=10\times 3=30$ 種不同的走法。

(3) 利用反面作法：A 到 B 的捷徑走法減去 A 到 B 且經過 C 的捷徑走法，就是 A 到 B 且不經過 C 的捷徑走法。

即（全部）－（經過 C 點）$=56-30=26$ 種不同的走法。

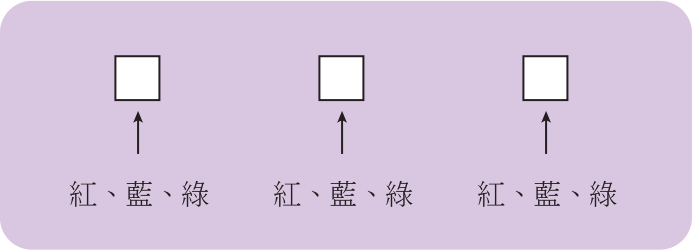
隨堂練習

4. 如圖棋盤街道中，從 A 到 B 的捷徑走法，共有幾種？



◎ 3-2.2 重複排列

排列時，若物件可重複選取，稱為重複排列。我們舉個簡單的例子：有紅、藍、綠三種球，要取三球排列在桌上（顏色可相同），可排列出多少種不同的結果？



▲ 圖 3-6

根據乘法原理得，共有 $3\times3\times3=27$ 種不同的結果。

由以上的討論，可得排列總數的公式如下：

重複排列

從 n 種不同事物中，任選 m 個排成一列，若每種事物都可以重複出現的排列總數為

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\cdots\times n}_{m\text{ 個 }n\text{ 相乘}}=n^m$$

【註】將 m 個不同的物品分給 n 個不同的人或物，同於重複排列，有 n^m 種分法。

例題 5

將 4 件不同的獎品分給甲、乙、丙三人，試問：

(1) 任意分，每人可重複得獎，有幾種分法？

(2) 甲恰得 1 件，有幾種分法？

(3) 甲至少得 1 件，有幾種分法？

解 (1) 因為 4 件不同的獎品每件都有 3 種分法，

所以有 $3\times3\times3\times3=3^4=81$ 種分法。

(2) 先從 4 件不同的獎品選 1 件給甲，剩下的 3 件再分給乙、丙兩人，所以有 $4\times2^3=32$ 種分法。

(3) 當甲未得時，每件獎品都有 2 種分法，此時有2^4種分法。

故甲至少得 1 件=（任意分法）－（甲未得的分法）$=3^4-2^4$

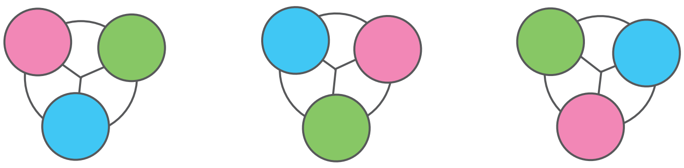
$=65$ 種分法。

隨堂練習

5. 小健利用週末時，從打網球、打羽球、游泳、慢跑與騎腳踏車等 5 種運動中選 1 種，那麼這個月有 4 個週末，共有多少種不同的安排？

◎ 3-2.3 環狀排列

前面所講的都是排成一列的情形，現在要討論的是另一型式的排列。將 n 個不同的物件沿著一圓周而排列，這樣的排列稱為環狀排列，此種排列只考慮這 n 個物件的相關位置，而不計較各物件所在的實際位置；也就是說，若將某一環狀排列任意轉動，可得相同的結果皆視為同一種排列。我們舉個簡單的例子：在一風車裝上紅、藍、綠 3 個顏色的葉片，如果從正面觀看，風車扇葉會有幾種不同的排列方法？首先將環狀看成直線排列，則紅、藍、綠 3 個顏色有 $P_3^3=3!$ 種排法，在每一種排法中，如圖，紅、藍、綠的相對位置均未改變，故三種圖形都表示同一種的環狀排列。



▲ 圖 3-7

由以上的討論，可得排列總數的公式如下：

環狀排列

(1)將 n 個不同的事物作環狀排列的總數為

$$\frac{P_n^n}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times 2\times 1=(n-1)!$$

(2)從 n 個不同的事物中任選 m 個作環狀排列的總數為

$$\frac{P_m^n}{m}=\frac{n!}{m(n-m)!}$$

例題 6

中秋佳節，夫婦兩人和子女 4 人吃團圓飯，圍一圓桌而坐，試問：

(1) 任意坐有多少種坐法？

(2) 夫婦兩人一定要相鄰而坐，有多少種坐法？

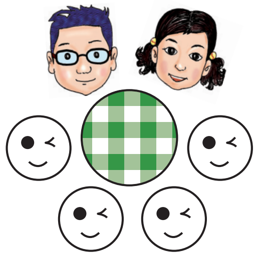
(3) 最小的女兒必須坐於夫婦之間，有多少種坐法？

(4) 夫婦兩人必不相鄰而坐，有多少種坐法？

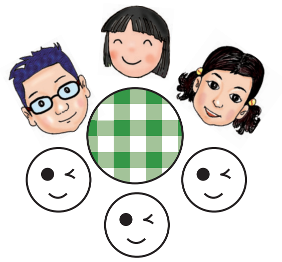
解 (1) 依題意作環狀排列，任意坐有 $\frac{6!}{6}=5!=120$ 種坐法。

(2) 夫婦兩人一定要相鄰，先將夫婦兩人視為一體，再與子女 4 人作環狀排列有 $\frac{5!}{5}=4!$ 種坐法。

又夫婦兩人之間有 $2!$ 種排法（可對調），所以共有 $4!\times 2!=48$ 種排法。

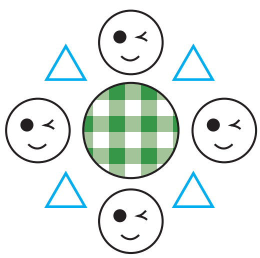


(3) 最小的女兒必須坐於夫婦之間，先將夫婦兩人與最小的女兒視為一體，再與其餘的子女 3 人作環狀排列有 $\frac{4!}{4}=3!$ 種坐法。又夫婦兩人之間有 $2!$ 種排法（可對調），所以共有 $3!\times2!=12$ 種排法。



(4) 夫婦兩人必不相鄰，先將夫婦兩人除外的子女 4 人作環狀排列有 $\frac{4!}{4}=3!$ 種排法。

將夫婦兩人排入 4 人的間隔中（即圖中的△）有 P^4_2 種排法，所以夫婦兩人必不相鄰有 $3!\times P^4_2=72$ 種排法。



隨堂練習

6. 有 7 位同學在操場手拉手圍成一個圓圈，共有多少種不同的排法？

習題 3-2

1. 試求下列各式的值：(1) $\dfrac{5!}{3!}$　(2) P^6_4　(3) P^5_5

2. 若 $P^{n+1}_2 = 2P^n_3$，試求 n 的值。

3. 甲、乙、丙等 8 人排成一列，則：
   (1) 若甲、乙、丙三人一定要相鄰，有多少種排法？
   (2) 若甲、乙必須排前面二位，有多少種排法？
   (3) 若甲、乙、丙三人必不相鄰，有多少種排法？

4. 志翔從家裡到學校的途中共遇到了 4 個紅燈與 3 個綠燈，試問有多少種不同的情形？

5. 將 5 種不同的酒，倒入 3 個不同的酒杯，且每一個酒杯只能倒一種酒，試問：
   (1) 每個杯子內的酒皆不同，有幾種倒法？
   (2) 每個杯子內的酒可相同，有幾種倒法？

6. 用 0、1、2、3、4、5 六個數字排成三位數，試問：
   (1) 若數字可重複使用，則可組成幾個不同的三位數？
   (2) 若數字不可重複使用，則可組成幾個不同的三位數？

7. 主人夫婦與三對客人夫婦圍一圓桌而坐，試問：
   (1)任意坐，有幾種坐法？　(2)每對夫婦不能分離，有幾種坐法？

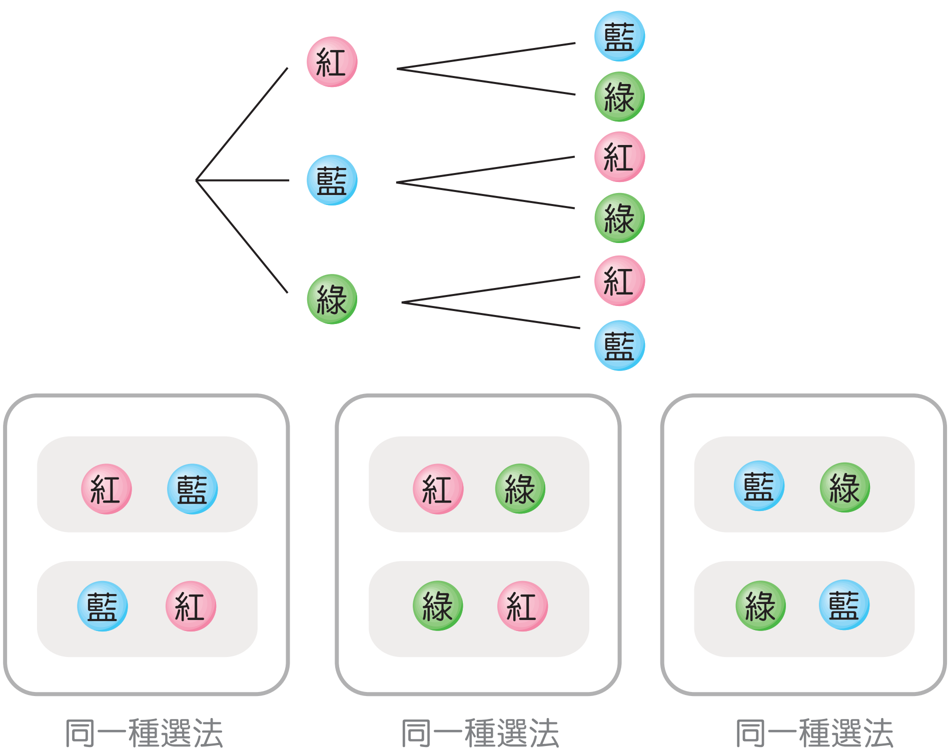
*3-3 組　合

本節要探討的是基本的「組合」問題：從 n 個不同的事物，任取 m 個不排定次序的方法數，再討論可重複的情形。「排列」與「組合」最大的差別在於排定次序與不排定次序。

3-3.1 相異物的組合

從 n 個不同的事物中，任取 m 個為一組($m \leq n$)，同一組內的事物若不計其前後次序，就叫做「n 中取 m 的組合」，所有組合的總數稱為組合數，以符號 C_m^n 表示。

我們舉個簡單的例子：有紅、藍、綠三顆球，要從這 3 顆球中任選 2 顆，可以有多少種選法？先作排列 P_2^3，以樹狀圖可清楚地看出 6 種排列方式：



▲ 圖 3-8

其中{紅藍、藍紅}，{紅綠、綠紅}，{綠藍、藍綠}，各視為同一種選法，也就是說取出的 2 球不考慮前後次序，因此共有 $\dfrac{P_2^3}{2!}$ 種選法。根據上述的例子，我們可以將 n 個不同的事物，任取 m 個的排列總數 P_m^n，分成如下的兩個步驟來討論：

【第 1 步驟】先作 n 中任取 m 的組合數 C_m^n。

【第 2 步驟】所選的 m 個作排列有 $m!$ 種方法。

因此，由乘法原理得 $C_m^n \times m! = P_m^n$，故 $C_m^n = \dfrac{P_m^n}{m!} = \dfrac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。

由以上的討論，可得組合數的公式如下：

相異物的組合

從 n 個不同的事物中，取 m 個($m \le n$)為一組，其組合數為

$$C_m^n = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

另外，$C_{n-m}^n = \dfrac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = \dfrac{n!}{(n-m)!\ m!} = C_m^n$，故 $C_m^n = C_{n-m}^n$（若 $m = n$，則 $C_n^n = C_0^n = 1$）。

此式告訴我們：從 n 個不同的事物中，取出 m 個，則必留下 $n-m$ 個，每次取 m 個的組合數 C_m^n 與每次取 $n-m$ 個的組合數 C_{n-m}^n 相等。

例題 1

試求下列各式的值：(1) C_3^{10}　　(2) C_5^8

解

(1) $C_3^{10} = \dfrac{10!}{3!(10-3)!} = \dfrac{10!}{3!\ 7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$

(2) $C_5^8 = \dfrac{8!}{5!(8-5)!} = \dfrac{8!}{5!\ 3!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

隨堂練習

1. 試求下列各式的值：(1) C_2^5　　(2) C_6^7

小考箱

(　) 3. 若 $C_\alpha^n = C_\beta^n$，則 $\alpha = \beta$？

例題 2

(1) 設 $C_5^n = C_6^n$，試求 n 之值。

(2) 設 $C_{k+2}^8 = C_{2k-3}^8$，試求 k 之值。

解 (1) 已知 $C_5^n = C_6^n$，又 $C_5^n = C_{n-5}^n$

所以 $6 = n - 5$，故 $n = 11$

(2) 已知 $C_{k+2}^8 = C_{2k-3}^8$，又 $C_{k+2}^8 = C_{8-(k+2)}^8$

所以 $k + 2 = 2k - 3$ 或 $8 - (k + 2) = 2k - 3$，故 $k = 5$ 或 3

隨堂練習

2. (1) 設 $C_2^n = C_7^n$，試求 n 之值。

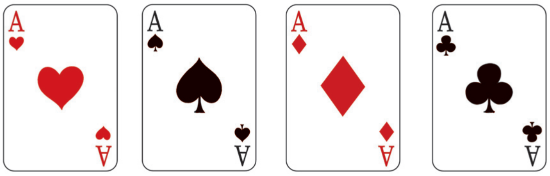
(2) 設 $C_k^{16} = C_{2k-5}^{16}$，試求 k 之值。

例題 3

一副 52 張的撲克牌有 4 種花色，每種花色各有 13 張，試問：

(1) 丞凌任取 2 張的情形有幾種？

(2) 丞凌任取 2 張，此 2 張均為同一花色的情形有幾種？



解 (1) 所抽出的兩張牌沒有前後順序之別，此為組合問題，故有

$C_2^{52} = \dfrac{52!}{2!\ 50!} = 26 \times 51 = 1326$ 種情形。

(2) 先從 4 種花色中任選一色有 C_1^4 種方法，再從選定的花色中有 13 張牌，任取 2 張有 C_2^{13} 種方法，故 2 張均為同一花色的情形有 $C_1^4 C_2^{13} = 4 \times \dfrac{13!}{2!\ 11!} = 312$ 種。

隨堂練習

3. 承例題 3，丞凌任取 2 張，此 2 張均為同點數的情形有幾種？

例題 4

平面共有相異的 8 個點，沒有 3 點在同一條直線上，試問：

(1) 可連成多少條直線？

(2) 可連成多少個三角形？

解 (1) 平面上，相異兩點可決定一條直線，又相異的 8 點中沒有 3 點在同一條直線上，故可連成 $C_2^8 = \dfrac{8!}{2!\ 6!} = \dfrac{8 \times 7}{2!} = 28$ 條直線。

(2) 平面上，不在同一條直線上相異的 3 點可決定一個三角形，故可連成 $C_3^8 = \dfrac{8!}{3!\ 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$ 個三角形。

隨堂練習

4. 試求凸九邊形的對角線共有幾條？

例題 5

學校要從 4 位男生與 5 位女生選出 5 人組成啦啦隊，試問：

(1) 任意選有多少種方法？

(2) 若其中 3 人為女生，則有多少種方法？

(3) 若男女生至少各有 2 人，則有多少種方法？

解 (1) 所選出的 5 人沒有前後順序之別，此為組合問題，

故有 $C_5^9=\dfrac{9!}{5!\,4!}=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$ 種方法。

(2) 先從 5 位女生中選出 3 位有 C_3^5 種方法，

再從 4 位男生中選出 2 人有 C_2^4 種方法，

故其中 3 人為女生有 $C_3^5C_2^4=\dfrac{5!}{3!\,2!}\times\dfrac{4!}{2!\,2!}=10\times6=60$ 種方法。

(3) 因為男女生至少各有 2 人，所以分成兩種情形：

①選出 2 位男生和 3 位女生有

$C_2^4\,C_3^5=\dfrac{4!}{2!\,2!}\times\dfrac{5!}{3!\,2!}=6\times10=60$ 種方法，

②選出 3 位男生和 2 位女生有

$C_3^4\,C_2^5=\dfrac{4!}{3!\,1!}\times\dfrac{5!}{2!\,3!}=4\times10=40$ 種方法，

故男女生至少各有 2 人有 $60+40=100$ 種方法。

隨堂練習

5. 由 8 位籃球隊員中選出 5 位上場打球，若志翔與小鬼是主力戰將必上場，則有多少種選法？

◎ 3-3.2 重複組合

從 n 種不同的事物中，任取 m 個為一組，若各組中每種事物可以重複選取 2 次 , 3 次 , ⋯ , m 次，則稱此種組合為「 n 中取 m 的重複組合」，所有重複組合的總數以符號 H_m^n 表示。在重複組合中，每種事物可重複取用，故 m 的數值可大於 n（m、n 為自然數）。

我們舉個簡單的例子：有紅、藍、綠三種球，每一種球的個數均超過 4 個，要從這三種球中任選 4 顆，此重複組合數為 H_4^3，其值為多少呢？我們以 x 表示某一組合中紅球的個數，以 y 表示藍球的個數，以 z 表示綠球的個數，則得方程式 $x+y+z=4$，其中 x、y、z 為 0 或自然數（即非負整數）。若把三種球以「○」表示，根據 $x+y+z=4$，就是 4 個「○」和 2 個「＋」作有相同物的直線排列，即「○○○○＋＋」的排列方式。如「○○＋○○＋」表示 $x=2$，$y=2$，$z=0$，因為第一個「＋」號前的「○」個數表示 x 之值，兩個「＋」之間的「○」個數表示 y 之值，第二個「＋」號後的「○」個數表示 z 之值。

因此，重複組合數為 $H_4^3=\dfrac{(4+2)!}{4!\ 2!}=\dfrac{6!}{4!\ 2!}=15=C_4^6$。

此外，將 4 個相同的球全部分給甲、乙、丙 3 人，以 x 表示甲所分得的球，以 y 表示乙所分得的球，以 z 表示丙所分得的球，則得方程式 $x+y+z=4$，其分法同為 H_4^3。一般而言，從 n 種不同的事物中，任取 m 個的重複組合總數相當於 m 個「○」和 $n-1$ 個「＋」的排列總數。

由以上的討論，可得重複組合數的公式如下：

重複組合

從 n 種不同的事物中，每次取 m 個為一組，若各組中每種事物可以重複選取，則 n 中取 m 的重複組合數為

$$H_m^n=\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}=C_m^{m+n-1}$$

【註】以下的情況同於上式的重複組合數：

(1)方程式 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=m$ 的非負整數解有 H_m^n 組。

(2)將 m 個相同的球全部分給 n 個人有 H_m^n 種分法。

例題 6

體育館的桌球室要購買 6 支球拍供大家使用，若球拍有刀板、直拍與大陸拍 3 種，試問桌球室有多少種購買方式？

解 設桌球室購買刀板 x_1 支、直拍 x_2 支與大陸拍 x_3 支，

依題意知為 $x_1+x_2+x_3=6$ 的非負整數解，

故有 $H_6^3=C_6^{6+3-1}=C_6^8=\dfrac{8!}{6!\ 2!}=28$ 種購買方式。

隨堂練習

6. 冰淇淋有香草、草莓、巧克力與咖啡 4 種口味，要買 8 份，問有多少種不同的買法？

例題 7

方程式 $x+y+z=10$，試問：

(1)此方程式共有多少組非負整數解？

(2)此方程式共有多少組正整數解？

解 (1) 此方程式共有 $H_{10}^3=C_{10}^{10+3-1}=C_{10}^{12}=\dfrac{12!}{10!\ 2!}=66$ 組非負整數解。

(2) 若方程式為正整數解，則 $x\geq 1$，$y\geq 1$，$z\geq 1$，

我們可以令 $x'=x-1$，$y'=y-1$，$z'=z-1$，

使得 $x'\geq 0$，$y'\geq 0$，$z'\geq 0$（x'、y'、z' 非負整數），

將 $x=x'+1$，$y=y'+1$，$z=z'+1$

代入 $x+y+z=10$ 得 $(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=10$，

整理得 $x'+y'+z'=7$ 且 x'、y'、z'非負整數，

因此共有 $H_7^3=C_7^{7+3-1}=C_7^9=\dfrac{9!}{7!\,2!}=36$ 組正整數解。

隨堂練習

7. 方程式 $x+y+z+w=10$，試問：

(1) 此方程式共有多少組非負整數解？

(2) 若 $x\geq 0$，$y\geq 1$，$z\geq 2$，$w\geq 3$，此方程式共有多少組整數解？

例題 8

將 8 枝相同的筆全部分給甲、乙、丙三人，試問：

(1) 任意分有多少種分法？

(2) 若甲恰得 1 枝，則有幾種分法？

(3) 若每人至少分得 1 枝，則有多少種分法？

解 (1) 8 枝相同的筆全部分給甲、乙、丙三人，任意分有

$H_8^3=C_8^{8+3-1}=C_8^{10}=\dfrac{10!}{8!\,2!}=45$ 種分法。

(2) 先將 8 枝筆分給甲 1 枝，問題就變成將 7 枝相同的筆全部分給乙、丙兩人，則有 $H_7^2=C_7^{7+2-1}=C_7^8=\dfrac{8!}{7!\,1!}=8$ 種分法。

(3) 若每人至少分得 1 枝，先將 8 枝筆分給每人 1 枝，問題就變成將 5 枝相同的筆全部分給甲、乙、丙三人，則有 $H_5^3=C_5^{5+3-1}=C_5^7$ $=\dfrac{7!}{5!\,2!}=21$ 種分法。

隨堂練習

8. 將 9 本相同的書全部分給甲、乙、丙、丁四人，試問：

(1) 任意分有多少種分法？

(2) 若甲、乙至少分得 1 本，丙、丁至少分得 2 本，則有多少種分法？

◎ 3-3.3 排列組合的綜合問題

以下列出排列組合的綜合問題，請同學比較一下。

例題 9

依下列條件，試求各有多少種方法？

(1) 4 顆不同的球任意分配到 3 個不同的箱子。

(2) 4 顆相同的球任意分配到 3 個不同的箱子。

解 (1) 因為每一個球都有 3 種方法，

所以有 $3\times3\times3\times3=3^4=81$ 種方法。

(2) 設 3 個不同的箱子分別有 x、y、z 顆球，

則得 $x+y+z=4$ 且 x、y、z 為非負整數，

故有 $H_4^3=C_4^{4+3-1}=C_4^6=\dfrac{6\,!}{4\,!\;2\,!}=15$ 種方法。

隨堂練習

9. 依下列情形分配，試求各有多少種方法？

(1) 5 本不同的筆記本任意分配給 3 位學生。

(2) 5 本相同的筆記本任意分配給 3 位學生。

習題 3-3

1. 試求下列各式的值：

　(1) C^6_2　　(2) C^9_7　　(3) C^8_8

2. 設 $C^{2n}_5 = C^{2n}_7$，試求 P^n_2 的值。

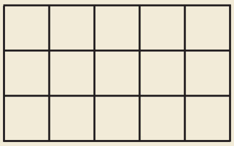
3. 舞蹈社有男學生 10 人，女學生 8 人，從中選出男學生 3 人、女學生 2 人參加比賽，有多少種不同的選法？

4. 平面上共有相異的 10 點，試問：

　(1)若沒有 3 點共線（在同一條直線上），求可連成多少條直線？多少個三角形？

　(2)若有 4 點共線，其餘無 3 點共線，求可連成多少條直線？多少個三角形？

5. 求右圖中的線段所圍成的矩形有多少個？



6.方程式 $x + y + z + w = 8$，試問：

　(1) 此方程式共有多少組非負整數解？

　(2) 此方程式共有多少組正整數解？

7. (1) 將 3 封不同的信，任意投入 4 個不同的郵筒，問共有幾種投法？

　(2) 將 3 封相同的信，任意投入 4 個不同的郵筒，問共有幾種投法？

＊3-4 二項式定理

利用多項式的乘法運算，可得下列的展開式：

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

如上式中，將$(x+y)$的冪次方$(x+y)^n$ 展開成為 x、y 的式子，我們通稱為二項式公式。我們就以$(x+y)^3$ 為例，探討展開後的一般形式。

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

(1) 展開式中每一項的次數都是 3 次，也就是冪次方數。

(2) 每一項中，令 x 的次方為 a，y 的次方為 b，則得 $a+b=3$，故項數有

$H_3^2 = C_3^{3+2-1} = C_3^4 = 4$，其中

x^3 項的係數可視為 0 個「y」與 3 個「x」的排列數 $\dfrac{3!}{0!\ 3!} = C_0^3$

x^2y 項的係數可視為 1 個「y」與 2 個「x」的排列數 $\dfrac{3!}{1!\ 2!} = C_1^3$

xy^2 項的係數可視為 2 個「y」與 1 個「x」的排列數 $\dfrac{3!}{2!\ 1!} = C_2^3$

y^3 項的係數可視為 3 個「y」與 0 個「x」的排列數 $\dfrac{3!}{3!\ 0!} = C_3^3$

故得$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

由上述可推廣得$(x+y)^n$ 的展開式：

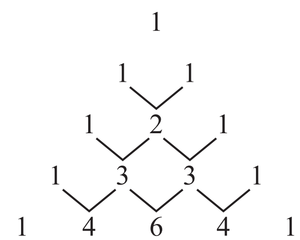
二項式定理

對於任意正整數 n，恆有

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + \cdots\cdots + C_r^n x^{n-r} y^r + \cdots\cdots + C_n^n y^n$$

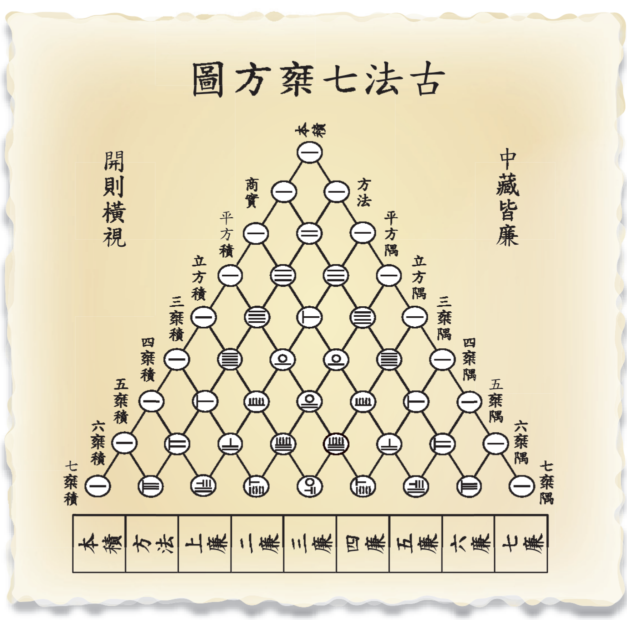
$$= \sum_{r=0}^{n} C_r^n x^{n-r} y^r$$

其中 $C_r^n\, x^{n-r}\, y^r$ 稱為此展開式的一般項，又 C_r^n 為展開式中第 $r+1$ 項的係數，所以稱 C_r^n 為二項式係數。觀察上列的二項展開式中，若將式子中的 x、y 省略，只列出各項係數，就可得二項式係數的巴斯卡三角形：



▲ 圖 3-9

這個三角形的左右兩側邊緣都是 1，而內部的數都是他的左上方和右上方兩數的和，利用此方法可以方便地直接寫出二項展開式的係數。這巴斯卡三角形早在西元 1261 年，我國宋朝的數學家楊輝寫了一本詳解九章算法的書，其中記載「古法七乘方圖」已詳列，如圖，所以此三角形也稱為楊輝三角形。



▲ 圖 3-10

小考箱

(　　) 4. 在$(x+y)^n$展開式中，第 r 項為 $C_r^n x^{n-r} y^r$？

例題 1

利用二項式定理，寫出$(x+y)^5$的展開式。

解 $(x+y)^5 = C_0^5 x^5 + C_1^5 x^4 y + C_2^5 x^3 y^2 + C_3^5 x^2 y^3 + C_4^5 xy^4 + C_5^5 y^5$
$= x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5xy^4 + y^5$

隨堂練習

1. 利用二項式定理，寫出$(x+y)^4$的展開式。

例題 2

利用二項式定理，寫出$(2x-3y)^4$的展開式。

解 $(2x-3y)^4 = [2x+(-3y)]^4$
$= C_0^4 (2x)^4 + C_1^4 (2x)^3 (-3y) + C_2^4 (2x)^2 (-3y)^2$
$+ C_3^4 (2x)(-3y)^3 + C_4^4 (-3y)^4$
$= 16x^4 - 96x^3 y + 216x^2 y^2 - 216xy^3 + 81y^4$

隨堂練習

2. 利用二項式定理，寫出$(3x-y)^3$的展開式。

例題 3

試求 $\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^8$ 展開式中，(1) x^2 項的係數　　(2) 常數項。

解　由一般項 $C_r^n x^{n-r} y^r$

$n=8$，$y=-\dfrac{1}{2x}$

代入得 $C_r^8 x^{8-r}\left(-\dfrac{1}{2x}\right)^r = C_r^8\left(-\dfrac{1}{2}\right)^r x^{8-r}x^{-r} = C_r^8\left(-\dfrac{1}{2}\right)^r x^{8-2r}$

(1) 所求的項為 x^2，因此 $8-2r=2$，即 $r=3$

故 x^2 項的係數為 $C_3^8\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{8!}{3!\,5!}\times\left(-\dfrac{1}{8}\right) = -7$

(2) 所求的常數項為 x^0，因此 $8-2r=0$，即 $r=4$

故常數項為 $C_4^8\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{8!}{4!\,4!}\times\dfrac{1}{16} = \dfrac{35}{8}$

隨堂練習

3. 試求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的展開式中，

(1) x^4 項的係數　　(2) 常數項。

我們利用二項式定理，將 x、y 的特殊值代入可得以下的結果：

(1) $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$

說明：令 $x=y=1$ 代入 $(x+y)^n$ 的展開式

$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + \cdots\cdots + C_n^n y^n$ 中

得 $(1+1)^n = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots\cdots + C_n^n$

故得 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$

(2) $C_0^n - C_1^n + C_2^n - \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

說明：令 $x = 1$，$y = -1$ 代入$(x+y)^n$ 的展開式

$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 + \cdots\cdots + C_n^n y^n$ 中

得 $[1+(-1)]^n = C_0^n + C_1^n \times (-1) + C_2^n \times (-1)^2 + \cdots\cdots + C_n^n (-1)^n$

故得 $C_0^n - C_1^n + C_2^n - \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

例題 4

試求下列各式的值：

(1) $C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + \cdots\cdots + C_{10}^{10}$

(2) $C_0^{10} - C_1^{10} + C_2^{10} - \cdots\cdots + C_{10}^{10}$

解 (1) 由 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$

可得 $C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + \cdots\cdots + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$

(2) 由 $C_0^n - C_1^n + C_2^n - \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

可得 $C_0^{10} - C_1^{10} + C_2^{10} - \cdots\cdots + C_{10}^{10} = 0$

隨堂練習

4. 試求下列各式的值：

(1) $C_1^9 + C_2^9 + C_3^9 + \cdots\cdots + C_9^9$

(2) $C_0^9 - C_1^9 + C_2^9 - \cdots\cdots + C_8^9 - C_9^9$

習題 3-4

1. 試求$(x+y)^6$ 的展開式。

2. 試求$(x-2y)^5$ 的展開式。

3. 試求$(2x-1)^{10}$ 展開式中 x^3項的係數。

4. 試求$(x+3y^2)^6$ 展開式中 x^4y^4 項的係數。

5. 試求 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^{10}$ 展開式中 x^6 的係數。

6. 試求下列各式的值：
   (1) $C_0^{11}+C_1^{11}+C_2^{11}+\cdots\cdots+C_{11}^{11}$
   (2) $C_0^{11}-C_1^{11}+C_2^{11}-\cdots\cdots-C_{11}^{11}$

本章彙總

3-1　乘法原理與樹狀圖

1. 加法原理：

   若完成某件工作的方法可區分成 k 類，且第 1 類有 m_1 種方法，第 2 類有 m_2 種方法，……，第 k 類有 m_k 種方法，則完成這件工作的方法共有 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k$ 種。

2. 乘法原理：

   若完成某件工作的方法須經過 k 個步驟，且第 1 步驟中有 m_1 種方法，第 2 步驟中有 m_2 種方法，……，第 k 步驟中有 m_k 種方法，則完成這件工作的方法共有 $m_1\times m_2\times\cdots\cdots\times m_k$ 種。

3-2　排　列

1. 完全相異物的直線排列：

   (1) 將 n 個不同的事物排成一列的排列總數為

   $$P^n_n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times2\times1=n!$$

   (2) 從 n 個不同的事物中任選 m 個($m\le n$)排成一列的排列總數為

   $$P^n_m=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times(n-m+2)\times(n-m+1)$$
   $$=\frac{n!}{(n-m)!}$$

2. 有相同物的直線排列：

(1) 設 n 個事物有 p 個相同排成一列的總數為

$$\frac{n!}{p!}$$

(2) 設有 n 個事物，共有 k 種不同種類（同類中的事物相同），第 1 類有 p_1 個，第 2 類有 p_2 個，……，第 k 類有 p_k 個（即 $n = p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_k$），將此 n 個事物排成一列的總數為

$$\frac{n!}{p_1!\, p_2! \cdots\cdots p_k!}$$

3. 重複排列：

從 n 種不同事物中，任選 m 個排成一列，若每種事物都可以重複出現的排列總數為

$$\underbrace{n \times n \times \cdots\cdots \times n}_{m\text{ 個 } n \text{ 相乘}} = n^m$$

4. 環狀排列：

(1) 將 n 個不同的事物作環狀排列的總數為

$$\frac{P^n_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1) \times (n-2) \times \cdots\cdots \times 2 \times 1 = (n-1)!$$

(2) 從 n 個不同的事物中任選 m 個作環狀排列的總數為

$$\frac{P^n_m}{m} = \frac{n!}{m(n-m)!}$$

本章彙總

3-3 組　合

1. 相異物的組合：

從 n 個不同的事物中，取 m 個($m \le n$)為一組，其組合數為

$$C^n_m = \frac{P^n_m}{m\,!} = \frac{n\,!}{m\,!\,(n-m)\,!}$$

2. 重複組合：

從 n 種不同的事物中，每次取 m 個為一組，若各組中每種事物可以重複選取，則 n 中取 m 的重複組合數為

$$H^n_m = \frac{(m+n-1)\,!}{m\,!(n-1)\,!} = C^{m+n-1}_m$$

3-4 二項式定理

1. 二項式定理：

對於任意正整數 n，

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= C^n_0\,x^n + C^n_1\,x^{n-1}\,y + \cdots\cdots + C^n_r\,x^{n-r}\,y^r + \cdots\cdots + C^n_n\,y^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} C^n_r\,x^{n-r}\,y^r\end{aligned}$$

其中 $C^n_r\,x^{n-r}\,y^r$ 稱為此展開式的一般項，C^n_r 恰為展開式中第 $r+1$ 項的係數。

2. 性質：

(1) $C^n_0 + C^n_1 + C^n_2 + \cdots\cdots + C^n_n = 2^n$

(2) $C^n_0 - C^n_1 + C^n_2 - \cdots\cdots + (-1)^n\,C^n_n = 0$

自我評量

(　　) 1. 山路 5 條，A、B兩人由不同路上下山，且兩人都不由原路下山，則其全部方法有　(A) 36　(B) 72　(C) 260　(D) 630　種。　【3-1】

(　　) 2. 問 180 有多少個正因數？　(A) 4　(B) 12　(C) 18　(D) 24。【3-1】

(　　) 3. 試求 $P_4^5 + P_2^7$ 之值為　(A) 66　(B) 162　(C) 262　(D) 330。　【3-2】

(　　) 4. 由 0、1、2、3、4、5 中取四個相異數字，作四位數，試求共有多少個不同的四位數？　(A) 100　(B) 200　(C) 300　(D) 400　種。【3-2】

(　　) 5. 「一寸光陰一寸金」排成一列，共有多少種排法？　(A) 540　(B) 720　(C) 1260　(D) 5040　種。　【3-2】

(　　) 6. 將相同的電影票 6 張、音樂票 4 張分給 10 位同學，每人各得 1 張，共有多少種分法？　(A) 180　(B) 210　(C) 240　(D) 320　種。【3-2】

(　　) 7. 某校的班際排球比賽中，若每兩隊必須對打一次，共計 28 場賽事，則共有幾隊比賽？　(A) 8　(B) 7　(C) 6　(D) 5　隊。　【3-3】

(　　) 8. 在數學測驗中，規定考生由 12 題中任選 8 題作答，若選題方式為：前 4 題中任選 2 題，後 8 題中任選 6 題，則共有多少種選法？　(A) 32　(B) 168　(C) 256　(D) 495　種。【3-3】

(　　) 9. 新生 4 人平均分配到甲、乙兩班，則分法有幾種？　(A) 3　(B) 6　(C) 12　(D) 24　種。【3-3】

(　　) 10. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ 展開式中 $\frac{1}{x^4}$（即 x^{-4}）的係數為　(A) 20　(B) 120　(C) -120　(D) -720。【3-4】

(　　) 11. 試求 $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^6$ 展開式中常數項為　(A) 15　(B) 120　(C) 240　(D) 480。【3-4】