關於拋物線方程式的標準式與準標準式

◎葉善雲／台北市東山高中

95 年大學指考數學甲選擇第 5 題：

在坐標平面上以 Γ 表示拋物線 $y=x^2$ 的圖形。試問以下哪些方程式的圖形可以由 Γ 經適當的平移或旋轉得到？ (1) $y=2x^2$ (2) $y=-x^2$ (3) $x=y^2$ (4) $y=x^2+4x+3$ (5) $x+y=(x-y)^2$。

此考題前 4 個選項很容易判別（(1)不能，(2)(3)(4)可以），至於第 5 個選項，一般（標準）解題都將 $x+y=(x-y)^2$ 旋轉 45° 或 –45°，將它化成拋物線的標準式：$x^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot y$ 或 $y^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot x$，然後判定它不能由 $\Gamma: y=x^2$ 經適當的平移或旋轉得到。我們的想法：從拋物線的正焦弦長切入，拋物線的圖形經平移或旋轉後，正焦弦長不會改變，也就是說，只要兩拋物線的正焦弦長相等，它們就可經適當的平移或旋轉得到。

說明：拋物線 $\Gamma: y=x^2$ 的正焦弦長為 1。

(1) $x^2=\dfrac{1}{2}y$ 的正焦弦長為 $\dfrac{1}{2}$，它不能由 Γ 經平移或旋轉得到。

(2) $x^2=-y$ 的正焦弦長為 1（實際上，它可由 Γ 繞原點旋轉 $180°$ 得到）。

(3) $y^2=x$ 的正焦弦長為 1（實際上，它可由 Γ 繞原點旋轉 $-90°$ 得到）。

(4) $y=x^2+4x+3$ 的準標準式為

$$(x+2)^2=4\cdot\frac{1}{4}\cdot(y+1)$$

其正焦弦長為 1（實際上，它可由 Γ 經向量 $(-2,-1)$ 平移得到）。

(5) $(x+y)=(x-y)^2$ 的準標準式為

$$\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2=4\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$$（後文說明）

其正焦弦長為 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，它不能由 Γ 經平移或旋轉得到。

所以正確選項為(2)(3)(4)。

首先，我們引進「直線的單位法向量式」的概念。二元一次方程式 $ax+by+c=0$ 與 $k\cdot(ax+by+c)=0$（其中 $k\neq 0$）的圖形是同一條直線 L，為了方便起見，我們取方程式

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(ax+by+c)=0 \quad 或$$

$$\frac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(ax+by+c)=0$$

來表示直線 L，並稱它為**直線 L 的單位法向量式**。例如：$L: 3x-4y+5=0$ 的單位法向量式為 $\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}y+1=0$ 或 $-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-1=0$；然後，我們導出拋物線方程式的另一種形式—「準標準式」。

定理（拋物線的準標準式）：

設 Γ 為以 $F(h\,,k)$ 為焦點，$L:g(x\,,y)=0$（單位法向量式）為準線，$M:f(x\,,y)=0$（單位法向量式）為對稱軸（過焦點且垂直準線的直線）的拋物線，則

(1) Γ 的方程式為

$$\left[f(x\,,y)\right]^2=4\cdot\frac{g(h\,,k)}{2}\cdot\left[g(x\,,y)-\frac{g(h\,,k)}{2}\right]$$

呈現此形式的拋物線方程式稱為**拋物線的準標準式**。

關於此定理，我們引入下面的口訣來幫助記憶：「軸$^2=4c\cdot$頂線」

(2) Γ 的頂點 $V(x\,,y)$ 滿足

$$\begin{cases}M:f(x\,,y)=0\\ M':g(x\,,y)=\dfrac{g(h\,,k)}{2}\end{cases}$$

此時直線 M' 為通過頂點 V 而垂直 M 的直線（簡稱為頂線）。

(3) 令 $c=\dfrac{g(h\,,k)}{2}$，則 $4c$ 的絕對值為拋物線 Γ 的正焦弦長。

在證明上述定理之前，我們先舉例說明此定理的涵義，它可以涵蓋拋物線的標準式：$y^2=4cx$ 或 $x^2=4cy$，同時從準標準式可以直接讀出拋物線的訊息：對稱軸、準線、正焦弦長以及頂線。例如：

(1) 以 $F(c\,,0)$ 為焦點，$L:x+c=0$ 為準線的拋物線（此時對稱軸為 $y=0$）之準標準式為 $y^2=4\cdot c\cdot\left[(x+c)-c\right]$，即標準式 $y^2=4cx$。

(2) 以 $F(0\,,c)$ 為焦點，$L:y+c=0$ 為準線的拋物線（此時對稱軸為 $x=0$）之準標準式為 $x^2=4\cdot c\cdot\left[(y+c)-c\right]$，即標準式 $x^2=4cy$。

(3) 以 $F(1,1)$ 為焦點，$L:x+y+2=0$ 為準線的拋物線（此時對稱軸為 $x-y=0$，頂點為 $V(0\,,0)$）之準標準式為

$$\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2=4\cdot\frac{4}{2\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{x+y+2}{\sqrt{2}}-\frac{4}{2\sqrt{2}}\right)$$

即 $(x-y)^2=8(x+y)$（已不是準標準式）或 $x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$。

定理證明：

(1) 設 $g(x\,,y)=ax+by+d$，其中 $a^2+b^2=1$，且 $P(x\,,y)$ 為拋物線上任意點，則根據拋物線的定義 $\overline{PF}=d\left(P\,,L\right)$，得

$$(x-h)^2+(y-k)^2=(ax+by+d)^2$$

展開並合併相同項得

$$\begin{aligned}&(1-a^2)x^2-2abxy+(1-b^2)y^2\\&=2adx+2bdy+2hx+2ky+d^2-h^2-k^2\end{aligned}$$

利用 $a^2+b^2=1$ 得

$$\begin{aligned}&(bx-ay)^2\\&=2d(ax+by)+2(hx+ky)+2d^2-d^2-h^2-k^2\end{aligned}\quad\cdots\cdots①$$

由於

$$\begin{aligned}&-2(bx-ay)(bh-ak)\\&=-2(hx+ky)+2(ax+by)(ah+bk)\end{aligned}$$

且

$$(bh-ak)^2=h^2+k^2-(ah+bk)^2$$

在①式左右兩側分別加上

$-2(bx-ay)(bh-ak)+(bh-ak)^2$ 與

$-2(hx+ky)+2(ax+by)(ah+bk)$

$+h^2+k^2-(ah+bk)^2+\left[2d(ah+bk)-2d(ah+bk)\right]$

得

$$\begin{aligned}&\left[(bx-ay)-(bh-ak)\right]^2\\&=2\left[(ax+by+d)(ah+bk+d)\right]-\left[(ah+bk)+d\right]^2\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\left[(bx-ay)-(bh-ak)\right]^2\\&=4\cdot\frac{ah+bk+d}{2}\cdot\left[(ax+by+d)-\frac{ah+bk+d}{2}\right]\end{aligned}$$

亦即 Γ 的方程式為

$$\left[f(x\,,y)\right]^2=4\cdot\frac{g(h\,,k)}{2}\cdot\left[g(x\,,y)-\frac{g(h\,,k)}{2}\right]$$

（此為準標準式）

(2) 另一方面，對稱軸 M 與準線 L 的交點為

$$H(b^2h-abk-ad\,,-bd-abh+a^2k)$$

故頂點坐標為

$$V\left(\frac{b^2h+h-abk-ad}{2}\,,\frac{a^2k+k-bd-abh}{2}\right)$$

由於

$$g\left(\frac{b^2h+h-abk-ad}{2},\frac{a^2k+k-bd-abh}{2}\right)$$

$$=a\cdot\frac{b^2h+h-abk-ad}{2}$$

$$+b\cdot\frac{a^2k+k-bd-abh}{2}+d$$

$$=\frac{ah+bk-(a^2+b^2)d+2d}{2}$$

$$=\frac{ah+bk+d}{2}\qquad\left(因為\ a^2+b^2=1\right)$$

$$=\frac{g(h,k)}{2}$$

所以頂點

$$V\left(\frac{b^2h+h-abk-ad}{2},\frac{a^2k+k-bd-abh}{2}\right)$$

在直線 $g(x,y)=\dfrac{g(h,k)}{2}$ 上。

(3) 由於拋物線的正焦弦長為焦點到準線距離的 2 倍，故 Γ 的正焦弦長為

$$2\cdot d(F,L)=2\cdot|ah+bk+d|=2\cdot|2c|=|4c|\ 。$$

＊例題 1＊

（取材自 龍騰版數學甲(上), P85 習題 8）

求通過點 $A(1,0)$, $B(1,1)$，且以 $L:y=x$ 為對稱軸的拋物線方程式。

【說明】

以 $L:y=x$ 為對稱軸的拋物線方程式可設為

$$\Gamma:(x-y)^2=m\cdot(x+y+k)$$

將 $A(1,0)$，$B(1,1)$ 代入

$\Gamma:(x-y)^2=m\cdot(x+y+k)$ 可解得 $k=-2$，$m=-1$，故 Γ 的方程式為 $(x-y)^2=-(x+y-2)$ 或 $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$ 。

＊例題 2＊

（取材自 南一版數學甲(上), P165 例題 3）

討論二元二次方程式

$\Gamma:4x^2-4xy+y^2-2x-4y+8=0$ 的圖形。

【說明】

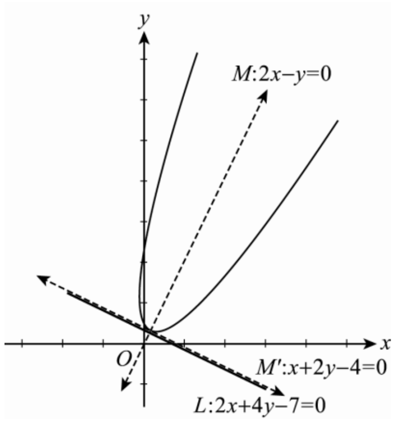
將 Γ 化成準標準式

$$\Gamma:\left(\frac{2x-y+\alpha}{\sqrt{5}}\right)^2=4c\cdot\left(\frac{x+2y+\beta}{\sqrt{5}}\right)$$

顯然可得 $\alpha=0,\ c=\dfrac{1}{2\sqrt{5}},\ \beta=-4$，即 Γ 可化成

$$\Gamma:\left(\frac{2x-y}{\sqrt{5}}\right)^2=4\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{x+2y-\frac{7}{2}}{\sqrt{5}}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5}}\right)$$

（準標準式），可知 Γ 的圖形為一拋物線。



其進一步的訊息如下：

① 正焦弦長 $4\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

② 對稱軸方程式為 $M:2x-y=0$

③ 頂線方程式為 $M':x+2y-4=0$

④ 頂點坐標為 M 與 M' 的交點 $V\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\right)$

⑤ 準線方程式為 $L:2x+4y-7=0$

⑥ L 與 M 的交點 $H\left(\dfrac{7}{10},\dfrac{7}{5}\right)$

⑦ 焦點坐標 F 為

$$F=2V-H=\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)-\left(\frac{7}{10},\frac{7}{5}\right)=\left(\frac{9}{10},\frac{9}{5}\right)$$

＊例題 3＊

若已知二元二次方程式

$\Gamma: x^2-6xy+9y^2-(k+2)x+(k^2+2)y+1=0$ 的圖形為兩平行線，求 k 之值。

【說明】

Γ 的圖形為兩平行線意謂 Γ 可化成

$$\Gamma:(x-3y+\alpha)^2=\beta \text{ ，其中 } \beta>0$$

比較 x 、 y 項係數及常數項可得方程式組

$$\begin{cases} 2\alpha=-(k+2) \\ -6\alpha=k^2+2 \\ \alpha^2-\beta=1 \end{cases}$$

並解得 $k^2+2-3(k+2)=0 \Leftrightarrow k=-1$ 或 $k=4$ 。

當 $k=-1$ 時， $\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=\alpha^2-1<0$（不合）；

當 $k=4$ 時， $\alpha=-3,\ \beta=\alpha^2-1=8$ 。

此時

$$\Gamma:(x-3y-3)^2=8$$

圖形為兩平行線，所以 $k=4$ 。

＊例題 4＊

（取材自 92 年指考數學甲選填題第 D 題）

坐標平面上，當點 $P(x\,,y)$ 在曲線

$\Gamma: x^2+2xy+y^2-2x+6y+1=0$ 上變動時，求點 P 到直線 $l: x-y+4=0$ 的距離的最小值。

【分析】若直線 l 與 Γ 不相交且與準線平行，則所求最小值即為頂點（在對稱軸上）到直線 l 的距離，亦即頂線到直線 l 的距離。

【說明】

將 $\Gamma:(x+y)^2=2\left(x-3y-\frac{1}{2}\right)$ 化成

$$\Gamma:\left(\frac{x+y+1}{\sqrt{2}}\right)^2=4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

可知 Γ 的圖形為一拋物線，其頂點為對稱軸 $M: x+y+1=0$ 與頂線 $M': x-y=0$ 的交點 $V\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$。由於直線 $l: x-y+4=0$ 與準線 $x-y+1=0$ 平行，且準線在直線 l 與頂線之間，推得直線 l 與 Γ 不相交，於是當點 P 變動到頂點 $V\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 時，點 P 到直線 l 的距離之最小值為 $d(V\,,l)=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 。

底下，我們運用「拋物線的準標準式定理」，探討決定唯一一條拋物線的條件。當拋物線之對稱軸為鉛直線時，設拋物線之對稱軸為 $x-h=0$，準標準式為 $\Gamma:(x-h)^2=4c(y-k)$ ，其中 $c\neq 0$ ，此時仍需三個獨立條件才可決定唯一一條拋物線；當拋物線之對稱軸不是鉛直線時，設拋物線之對稱軸為 $y=mx+d$（其中 m 為其斜率），拋物線方程式為 $\Gamma:(mx-y+d)^2=4c(x+my+e)$ ，其中 $c\neq 0$，此時仍需四個獨立條件才可決定唯一一條拋物線。

＊例題 5＊

（取材自 94 年指考數學甲選擇題第 9 題）

有一條拋物線位於坐標平面之上半面（即其 y 坐標 ≥ 0 ），並與 x 軸、直線 $y=x-1$、直線 $y=-x-1$ 相切，則下列選項何者正確？

(1) 此拋物線的對稱軸必為 y 軸。

(2) 若此拋物線的對稱軸為 y 軸，則其焦距為 1。

(3) 此拋物線的頂點必在 x 軸上。

(4) 有不只一條拋物線滿足此條件。

【說明】

就對稱軸是否有斜率分別討論，將條件代入標準式或準標準式求解。

1. 當拋物線之對稱軸為鉛直線時：

設拋物線之對稱軸為 $x-h=0$ ，準標準式為

$$\Gamma:(x-h)^2=4c(y-k) \text{ ，其中 } c\neq 0 \text{ 。}$$

若 Γ 與 x 軸相切，則頂點在 x 軸上，於是 $k=0$ ，此時 $\Gamma:(x-h)^2=4cy$ 。

若 Γ 與直線 $y=x-1$ 相切，則方程式 $(x-h)^2=4c(x-1)$ 有重根，即 $x^2-2(h+2c)x+(h^2+4c)=0$ 有重根，於是

$$h+c=1\cdots\cdots①$$

由 Γ 與直線 $y=-x-1$ 相切，可得

$$h-c=-1 \cdots\cdots ②$$

由①②解得 $h=0,\ c=1$，此時拋物線為

$\Gamma: x^2=4y$，其焦距為 1。

2. 當拋物線之對稱軸不是鉛直線時：

設拋物線之對稱軸為 $y=mx+d$（其中 m 為其斜率），拋物線方程式為

$\Gamma:(mx-y+d)^2=4c(x+my+e)$，其中 $c\neq 0$。

若 Γ 與 x 軸（$y=0$）相切（此時 $m\neq 0$），則方程式 $(mx+d)^2=4c(x+e)$ 有重根，即 $m^2x^2+2(md-2c)x+(d^2-4ce)=0$ 有重根，由判別式得 $(md-2c)^2-m^2(d^2-4ce)=0$，於是

$$c-md+m^2e=0 \cdots\cdots ③$$

由 Γ 與直線 $y=x-1$ 相切（此時 $m\neq 1$），得

$$(m+1)^2c-(m^2-1)(d+1)-(m-1)^2(m-e)=0 \cdots\cdots ④$$

由 Γ 與直線 $y=-x-1$ 相切(此時 $m\neq -1$)，得

$$(m-1)^2c+(m^2-1)(d+1)-(m+1)^2(m-e)=0 \cdots\cdots ⑤$$

由③④⑤解得

$$c=\frac{m(m-1)(m+1)}{m^2+1},\ e=\frac{2m}{m^2+1},\ d=\frac{3m^2-1}{m^2+1},$$

此時拋物線方程式為

$$\Gamma:\left(mx-y+\frac{3m^2-1}{m^2+1}\right)^2=\frac{4m(m-1)(m+1)}{m^2+1}\left(x+my+\frac{2m}{m^2+1}\right)$$

（若拋物線 Γ 在上半平面，則對稱軸的斜率 $m>1$ 或 $m<-1$。）

此拋物線的相關訊息如下：

(1) 正焦弦長為 $\left|\dfrac{4m(m-1)(m+1)}{(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}\right|$

(2) 對稱軸方程式為 $M: mx-y+\dfrac{3m^2-1}{m^2+1}=0$

(3) 頂線方程式為 $M': x+my+\dfrac{2m}{m^2+1}=0$

(4) 頂點坐標為 M 與 M' 的交點為

$$V\left(\frac{-m(3m^2+1)}{(m^2+1)^2},\frac{m^2-1}{(m^2+1)^2}\right)$$

(5) 準線方程式為 $L: x+my+m=0$

(6) L 與 M 的交點為 $H\left(\dfrac{-4m^3}{(m^2+1)^2},\dfrac{-(m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}\right)$

(7) 焦點坐標為 $F=2V-H=\left(\dfrac{-2m}{m^2+1},\dfrac{m^2-1}{m^2+1}\right)$

＊例題 6＊

（取材自 92 年指考數學乙選填題第 C 題）

已知坐標平面上的四個點，

$$A(-1,2),\ B(0,0),\ C(1,2),\ D(x,y)$$

其中 D 為 $\overline{AB}$ 中點與 $\overline{BC}$ 中點的連線段的中點。設有一拋物線通過 $A,\ D,\ C$ 三點，求此拋物線的焦點坐標。

【說明】

$\overline{AB}$ 中點為 $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$，$\overline{BC}$ 中點為 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，$D$ 點坐標為 $(0,1)$。就對稱軸是否有斜率分別討論，將條件代入標準式或準標準式求解。

1. 當拋物線之對稱軸為鉛直線時：

設拋物線之對稱軸為 $x-h=0$，方程式為

$\Gamma:(x-h)^2=4c(y-k)$，其中 $c\neq 0$

將 $A(-1,2)$，$C(1,2)$，$D(0,1)$ 三點分別代入

方程式得 $\begin{cases}(-1-h)^2=4c(2-k)\\(1-h)^2=4c(2-k)\\h^2=4c(1-k)\end{cases}$

解得 $h=0,\ k=1,\ c=\dfrac{1}{4}$，此時拋物線為

$\Gamma: x^2=y-1$，其正焦弦長為 1，頂點坐標為 $V(0,1)$，焦點坐標為 $F\left(0,\dfrac{5}{4}\right)$。

2. 當拋物線之對稱軸不是鉛直線時：

設拋物線之對稱軸為 $y=mx+d$（其中 m 為其斜率），拋物線方程式為

$\Gamma:(mx-y+d)^2=4c(x+my+e)$，其中 $c\neq 0$

將 $A(-1,2),\ C(1,2),\ D(0,1)$ 三點分別代入方

程式得 $\begin{cases}(-m-2+d)^2=4c(-1+2m+e)\\(m-2+d)^2=4c(1+2m+e)\\(d-1)^2=4c(m+e)\end{cases}$

可解得

$$c=\frac{m(m-1)(m+1)}{4(m^2+1)},$$
$$d=\frac{5m^2+3}{2(m^2+1)},$$
$$e=\frac{(3m^2+1)^2}{4m(m-1)(m+1)(m^2+1)}-m,$$

此時拋物線方程式為

$$\Gamma:\left(mx-y+\frac{5m^2+3}{2(m^2+1)}\right)^2=\frac{m(m-1)(m+1)}{m^2+1}\times\left(x+my+\frac{(3m^2+1)^2}{4m(m-1)(m+1)(m^2+1)}-m\right)$$

（對稱軸的斜率不可能為 $m=0,\ 1,\ -1$，即對稱軸不平行 $\overleftrightarrow{AC},\ \overleftrightarrow{CD},\ \overleftrightarrow{AD}$ ）。

以 $m=2$ 為例，

拋物線 $\Gamma:\left(2x-y+\frac{23}{10}\right)^2=\frac{6}{5}\left(x+2y-\frac{71}{120}\right)$，將它化成準標準式

$$\Gamma:\left(\frac{2x-y+\frac{23}{10}}{\sqrt{5}}\right)^2=4\cdot\frac{3}{10\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{x+2y-\frac{35}{120}}{\sqrt{5}}-\frac{\frac{3}{10}}{\sqrt{5}}\right)$$

可得下列訊息：

(1) 對稱軸為 $M:20x-10y+23=0$

(2) 頂線為 $120x+240y-71=0$

(3) 頂點坐標為 $V\left(-\frac{481}{600},\frac{209}{300}\right)$

(4) 準線方程式為 $L:120x+240y-35=0$

(5) L 與 M 的交點為 $H\left(-\frac{517}{600},\frac{173}{300}\right)$

(6) 焦點坐標為 $F\left(-\frac{89}{120},\frac{49}{60}\right)$

後記：

本文利用「拋物線的準標準式」提出關於拋物線的看法與解析，不論「94 年指考數學甲選擇題第 9 題」或「92 年指考數學乙選填題第 C 題」，解題的關鍵觀念均為：「若拋物線之對稱軸平行坐標軸，則由三個獨立條件可決定唯一一條拋物線；否則需要四個獨立條件才能決定唯一一條拋物線。」因此，在解題策略上，我們針對對稱軸的斜率，寫出符合給定條件的拋物線通解，並舉一特例作說明。一些出版社或雜誌也有相關的討論，羅列如下：

1. 南一「高中數學新視界第 3 期」（代數解法）。
2. 南一「教學快訊之 94 年指考解析」（至少可找到三條拋物線）。
3. 翰林「數學天地第 19 期：拋物線的爭議」（給準線斜率 m，其中 $-1<m<1$，就有一條拋物線）。
4. 龍騰「數學新天地第 12 期：用 Lambert 定理作拋物線」（在上半單位圓取一點為焦點，由幾何作圖得出拋物線）。
5. 龍騰「數學新天地第 10 期：誰怕坐標平移旋轉」。
6. 中研院「數學傳播第 117 期：94 年指定科目考試數學的一疑題（以明）及 94 數學(甲)指考中的拋物線（劉紹正）」。