數學公式卡 >>第一冊

直線方程式

1. 兩點關係

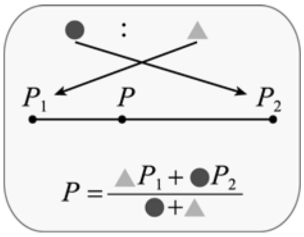
設 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$ 為坐標平面上相異兩點，則

(1) $\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

(2) $\overline{PQ}$ 的中點 M 坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$。

2. 內分點

設 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P(x,y)$ 為同一直線相異三點，且 P 為 $\overline{P_1P_2}$ 的內分點，若 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=m:n$，則 $x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}$，$y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$



3. 重心

設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，則$\triangle ABC$ 的重心 G 坐標為

$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

4. 平行、垂直之直線

設相異直線 L_1、L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，則

(1) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$

(2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1\times m_2=-1$

《註》當一直線斜率不存在(即此直線垂直 x 軸)，另一直線斜率為 0(即此直線平行 x 軸)，則此兩直線亦互相垂直。

5. 直線方程式的求法

(1) 點斜式：

過點 (x_1,y_1) 且斜率為 m 的直線方程式為 $y-y_1=m(x-x_1)$。

(2) 斜截式：

斜率為 m 且 y 截距為 b 的直線方程式為 $y=mx+b$。

《註》斜率為 m 且 x 截距為 a 的直線方程式為 $y=m(x-a)$。

(3) 兩點式：

過相異兩點 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 的直線方程式

①若 $x_1\neq x_2$，直線方程式為 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$。

②若 $x_1=x_2$，直線垂直 x 軸，方程式為 $x-x_1=0$。

(4) 截距式：

x 截距為 a，y 截距為 b（$ab\neq 0$）的直線方程式為 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。

6. 直線斜率

設直線 $L: ax+by+c=0$

(1) 當 $b\neq 0$ 時：直線 L 的斜率為 $-\dfrac{a}{b}$。

(2) 當 $b=0$ 時：直線 L 垂直 x 軸，且斜率不存在。

7. 點到直線的距離公式

設點 $P(x_1,y_1)$，直線 $L: ax+by+c=0$，則點 P 到直線 L 的距離為 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

8. 兩平行線間的距離公式

設兩平行線 $L_1: ax+by+c_1=0$ 與 $L_2: ax+by+c_2=0$，則 L_1、L_2 的距離為 $d=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

9. 線型函數（函數圖形為一直線）

$f(x)=ax+b$（a、b 為常數）

(1) 當 $a\neq 0$ 時：$f(x)=ax+b$ 稱為一次函數。

(2) 當 $a=0$ 時：$f(x)=b$ 稱為常數函數。

10. 二次函數

$f(x)=ax^2+bx+c$（a、b、c 為常數，$a\neq 0$）

11. $\boldsymbol{f(x)=ax^2}$（$\boldsymbol{a\neq 0}$）**的圖形**

以原點為頂點，y 軸為對稱軸的拋物線。

(1) 當 $a>0$ 時，圖形開口向上，頂點為最低點，a 的值愈大，圖形開口愈小；a 的值愈小，圖形開口愈大。

(2) 當 $a<0$ 時，圖形開口向下，頂點為最高點，a 的絕對值愈大，圖形開口愈小；a 的絕對值愈小，圖形開口愈大。

12. $\boldsymbol{f(x)=a(x-h)^2+k}$（$\boldsymbol{a\neq 0}$）**的圖形**

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 經配方可得 $f(x)=a(x-h)^2+k$，圖形是以 (h,k) 為頂點，$x-h=0$ 為對稱軸的拋物線。

(1) 當 $a>0$ 時，圖形開口向上，頂點為最低點，且在 $x=h$ 時，函數 $f(x)$ 有最小值 $f(h)=k$。

(2) 當 $a<0$ 時，圖形開口向下，頂點為最高點，且在 $x=h$ 時，函數 $f(x)$ 有最大值 $f(h)=k$。

三角函數

1. 角度的換算

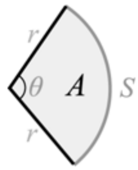
利用 π（弧度）$=180^\circ$

$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$（弧度）

1（弧度）$=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

2. 扇形的弧長與面積

設一扇形的半徑為r，弧長為S，圓心角為θ弧度，面積為A，則



(1) $S=r\theta$

(2) $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rS$

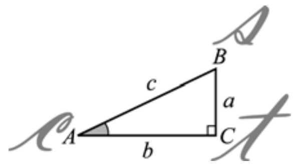
3. 同界角

(1) 具有相同始邊與終邊的有向角。

(2) 設θ與ϕ為同界角，n為整數，則$\theta-\phi=n\times360°$或$\theta-\phi=2n\pi$

4. 銳角三角函數

直角$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$



$\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}$

$\tan A=\dfrac{a}{b}$，$\cot A=\dfrac{b}{a}$

$\sec A=\dfrac{c}{b}$，$\csc A=\dfrac{c}{a}$

5. 三角恆等關係式

(1) 倒數關係式：

$\sin\theta\times\csc\theta=1$，即$\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

$\cos\theta\times\sec\theta=1$，即$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta\times\cot\theta=1$，即$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

(2) 商數關係式：

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(3) 平方關係式：

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

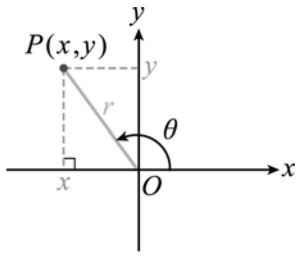
$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

6. 特別角的三角函數值

函數 / 角度θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$30°\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$45°\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 任意角的三角函數：$\boldsymbol{r=\sqrt{x^2+y^2}>0}$



$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$　　　　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$（$x\neq 0$）　　　　$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$（$y\neq 0$）

$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$（$x\neq 0$）　　　　$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$（$y\neq 0$）

8. 象限角的三角函數值

角度 θ \ 函數	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0°（0）	0	1	0	無意義	1	無意義
$90^\circ\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$	1	0	無意義	0	無意義	1
180°（π）	0	-1	0	無意義	-1	無意義
$270^\circ\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$	-1	0	無意義	0	無意義	-1

9. 三角函數的週期

函數	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
週期	2π	2π	π	π	2π	2π

向量

1. 向量的坐標表示

設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 為坐標平面上兩點，則

$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，

又 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2. 方向角

設向量 $\overrightarrow{p}$ 的方向角為 ϕ，則

$\overrightarrow{p}=\left(\left|\overrightarrow{p}\right|\cos\phi,\left|\overrightarrow{p}\right|\sin\phi\right)$

3. 向量加減的坐標表示

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，則

(1)　$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$

(2)　$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$

4. 向量與實數積的坐標表示

設向量 $\overrightarrow{a}=\left(a_1,a_2\right)$，$r$ 為實數，則 $r\overrightarrow{a}=\left(ra_1,ra_2\right)$。

5. 平行向量

設 $\overrightarrow{a}=\left(a_1,a_2\right)$、$\overrightarrow{b}=\left(b_1,b_2\right)$，若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，則

$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$（其中 $b_1b_2\neq 0$）或 $a_1b_2=a_2b_1$。

《註》設 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為二非零向量，若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，則存在一個實數 r，使得 $\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}$。

6. 向量內積的定義

設二非零向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，則

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$$

當 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 有一向量為零向量時，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 定義為 0。

7. 向量內積的坐標表示

設二向量 $\overrightarrow{a}=\left(a_1,a_2\right)$、$\overrightarrow{b}=\left(b_1,b_2\right)$，則

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

8. 向量的夾角

設二向量 $\overrightarrow{a}=\left(a_1,a_2\right)$、$\overrightarrow{b}=\left(b_1,b_2\right)$ 的夾角為 θ，則

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}$$

9. 向量垂直

設向量 $\overrightarrow{a}=\left(a_1,a_2\right)$、$\overrightarrow{b}=\left(b_1,b_2\right)$，若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，則 $a_1b_1+a_2b_2=0$

《註》設 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為二非零向量，則 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\iff\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$

指數與對數及其運算

1. 正整數的指數律

a、b 為實數，m、n 為正整數，則

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$　　(2) $\left(a^m\right)^n=a^{m\times n}$　　(3) $\left(ab\right)^n=a^n\times b^n$

2. 零指數與負整數指數

設 a 為實數，且 $a\neq 0$，m、n 為正整數，則

(1) $a^0=1$　　(2) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$　　(3) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

3. **分數指數**

設$a>0$，n為正整數，m為整數，則

(1) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$　　　　　　　　(2) $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

4. **對數的定義**

設$a>0$且$a\neq 1$，$b>0$，則

$\log_a b=x \quad \Leftrightarrow \quad a^x=b$

5. **對數運算性質**

設a、b、c為異於1的正實數，M、N、d均為正實數，r、s為實數且$r\neq 0$，則

(1) $\log_a 1=0$；$\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^r=r\log_a M$；$\log_{a^r} M=\dfrac{1}{r}\log_a M$

(5) $\log_a a^r=r$；$a^{\log_a M}=M$

(6) （換底公式）：$\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

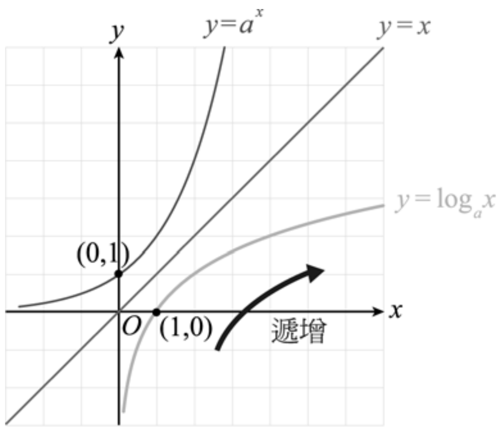
(7) $\log_a \dfrac{1}{M}=-\log_a M$

(8) $\left(\log_a b\right)\left(\log_b a\right)=1$（即$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$）

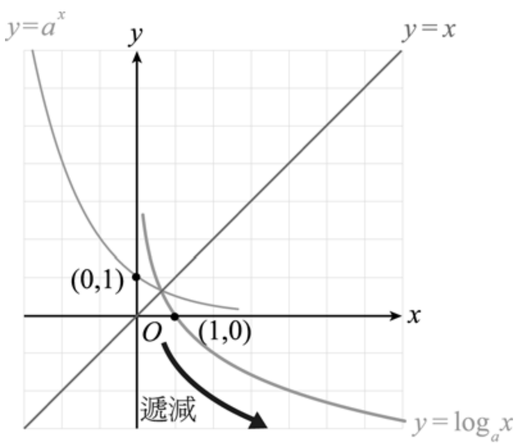
(9) $\log_{a^r} M^s=\dfrac{s}{r}\log_a M$

(10) $\left(\log_a b\right)\left(\log_b c\right)\left(\log_c d\right)=\log_a d$

6. **對數函數圖形：$y=\log_a x$（$a>0$且$a\neq 1$，$x>0$）**



$a>1$



$0<a<1$

(1) 圖形恆過定點$(1,0)$，且在y軸的右方。

(2) 當$a>1$時，f為嚴格增函數；當$0<a<1$時，f為嚴格減函數。

(3) $y=\log_a x$的圖形與$y=\log_{\frac{1}{a}} x$的圖形對稱於x軸。

(4) $y=\log_a x$的圖形與$y=a^x$的圖形對稱於直線$y=x$。

7. 對數不等關係

設 x_1 、 x_2 為正實數

(1) 當 $a>1$ 時： $\log_a x_1 < \log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x_2$

(2) 當 $0<a<1$ 時： $\log_a x_1 < \log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 > x_2$

8. 首數與尾數

$\log x = n$ （首數） $+\alpha$ （尾數）（其中 n 為整數， $0 \le \alpha < 1$ ）

(1) 若真數 $x>1$ 且 x 的整數部分為 m 位數時，則首數 $n=m-1$ 。

(2) 若真數 $x<1$（即 $0<x<1$ ）且 x 在小數點後第 m 位以前均為 0，而第 m 位開始出現不為 0 的數字，則首數 $n=-m$ 。

數列與級數

1. Σ的運算性質

(1) $\sum\limits_{n=1}^{m} c = mc$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{m} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{m} (a_n \pm b_n) = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{m} b_n$ 。

2. 等差

等差數列	數列$\langle a_n \rangle$滿足 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \cdots = d$（公差） (1) $a_n = a_1 + (n-1)d$ (2) $a_n = a_m + (n-m)d$ (3) $d = \dfrac{a_n - a_m}{n-m}$（$n \neq m$）
等差中項	設A為a、b的等差中項，則$A = \dfrac{a+b}{2}$ （A為a、b的算術平均數）
等差級數	$S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

3. 等比

等比數列	數列$\langle a_n \rangle$滿足 $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \cdots = r$（公比） (1) $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ (2) $a_n = a_m \times r^{n-m}$
等比中項	設G為a、b的等比中項，則$G = \pm\sqrt{ab}$ （$\sqrt{ab}$為a、b的幾何平均數）
等比級數	(1) 當公比$r = 1$時：$S_n = n \times a_1$ (2) 當公比$r \neq 1$時： $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ $S_n = \dfrac{a_1 - ra_n}{1-r} = \dfrac{ra_n - a_1}{r-1}$

4. 無窮等比級數求和

$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ 。

$\lvert r\rvert < 1$	$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \dfrac{a}{1-r}$ 為收斂級數
$\lvert r\rvert \geq 1$	$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ 為發散級數

式的運算

1. 多項式

(1) 多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ，

當 $a_n \neq 0$ 時： $\deg f(x) = n$ ，領導係數為 a_n 。

(2) 常數多項式 a_0 ： $\begin{cases} \text{零次多項式}(a_0 \neq 0) \\ \text{零多項式}(a_0 = 0) \end{cases}$ 。

2. 多項式除法原理

設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為二多項式，且 $g(x) \neq 0$ ，則恰存在二多項式 $q(x)$ 及 $r(x)$ 滿足

$f(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ ，其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 。

3. 綜合除法演算方法

$\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) \div (x-b)$

$$\begin{array}{lcccccc|l} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & b \\ +) & & b\times c_{n-1} & b\times c_{n-2} & \cdots & b\times c_1 & b\times c_0 & \\ \hline & c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 & r & \cdots\cdots \text{餘式} \\ & \| & & & & & & \\ & a_n & & & & & & \end{array}$$

商式 $q(x)$ 的各項係數

4. 餘式定理

(1) 多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的餘式為 $f(a)$ 。

(2) $a \neq 0$ ，多項式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的餘式為 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$ 。

5. 因式定理

設 $a \neq 0$ ， $ax-b$ 為多項式 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow$ $f\left(\dfrac{b}{a}\right) = 0$ 。

6. 整係數一次因式檢驗法

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 為一個整係數多項式，若整係數一次式 $ax-b$ 為 $f(x)$ 的因式，且 a 、 b 互質，則 a 為 a_n 的因數且 b 為 a_0 的因數。

7. 因式分解常用公式

(1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(2) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(3) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(4) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(5) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(6) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

(7) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

8. 根式的運算法則

設 a 、 b 為實數且 $b\neq 0$ ， m 、 n 為大於1的正整數（當 n 為偶數時，必須限制 a 、 b 為正數），則

(1) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$

(2) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

(3) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(4) $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

9. 雙重根式之化簡

設 A 、 B 為正數且 $\sqrt{B}$ 為無理數，若

$\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ （其中 $x>y>0$ ）

則 $x+y=A$ 且 $xy=B$ 。

方程式

1. 方程式求解

(1) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ （ a 、 b 、 c 為實數且 $a\neq 0$ ）的公式解為

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 。

(2) 二次方程式根的判別：

關於方程式 $ax^2+bx+c=0$ （ a 、 b 、 c 為實數且 $a\neq 0$ ）

判別式 $b^2-4ac>0$	方程式有相異二實數根
判別式 $b^2-4ac=0$	方程式有相等二實數根
判別式 $b^2-4ac<0$	方程式無實數解

2. 二次方程式根與係數關係

設 α 、 β 為二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根，則

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ， $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ 。

3. **二階行列式**

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 。

4. **二元一次方程組的解**

對二元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，設$L_1$為直線$a_1x+b_1y=c_1$，$L_2$為直線$a_2x+b_2y=c_2$，

令$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$。

$\Delta \neq 0$	恰有一組解 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$	相容方程組 L_1與L_2相交於一點
$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$	無限多組解	相依方程組 L_1與L_2重合為一直線
$\Delta = 0$，但Δ_x、Δ_y不全為0	無解	矛盾方程組 L_1與L_2互相平行

5. **三階行列式**

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ 。

6. **行列式基本性質**

(1) 在一行列式中，將行的元素與列的元素互換，行列式值不變。

(2) 在一行列式中，將兩行（列）的元素對調，行列式值變號。

(3) 在一行列式中，任一行（列）的元素可提出同一數。

(4) 在一行列式中，若兩行（列）的元素相同或成比例，則行列式值為0。

(5) 在一行列式中，若某一行（列）的元素可分成兩行（列）元素的和，則此行列式可分解成兩個行列式的和。

(6) 在一行列式中，將任一行（列）元素的k倍加到另一行（列）的對應元素上，行列式值不變。

《註》在一行列式中，若有一行（列）的元素均為0時，此行列式值為0。

7. **三元一次方程組的解（克拉瑪公式）**

對三元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$，

設$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$。

當$\Delta \neq 0$時：方程組之解為$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$。

不等式及其應用

1. 絕對值不等式

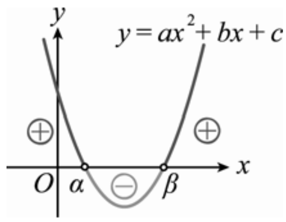
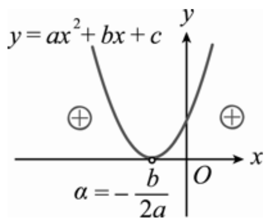
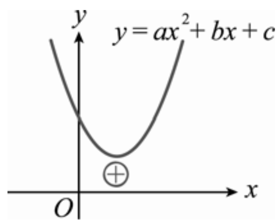
設 x 為實數，a 為一正數，則

(1) $|x|<a \quad \Leftrightarrow \quad -a<x<a$。

(2) $|x|>a \quad \Leftrightarrow \quad x>a$ 或 $x<-a$。

2. 一元二次不等式的解法

設 a、b、c 為實數且 $a>0$。

判別式	二次不等式的解	$y=ax^2+bx+c$ 圖形（$a>0$）
$b^2-4ac>0$	設 α、β 為 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，且 $\alpha<\beta$，則 (1) $ax^2+bx+c>0$ 之解： $x<\alpha$ 或 $x>\beta$ (2) $ax^2+bx+c\ge 0$ 之解： $x\le\alpha$ 或 $x\ge\beta$ (3) $ax^2+bx+c<0$ 之解： $\alpha<x<\beta$ (4) $ax^2+bx+c\le 0$ 之解： $\alpha\le x\le\beta$	
$b^2-4ac=0$	設 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$，則 (1) $ax^2+bx+c>0$ 之解： 不等於 α 的所有實數 (2) $ax^2+bx+c\ge 0$ 之解： 所有實數 (3) $ax^2+bx+c<0$ 之解： 無解 (4) $ax^2+bx+c\le 0$ 之解： $x=\alpha$	
$b^2-4ac<0$	(1) $ax^2+bx+c>0$ 之解： 所有實數 (2) $ax^2+bx+c\ge 0$ 之解： 所有實數 (3) $ax^2+bx+c<0$ 之解： 無解 (4) $ax^2+bx+c\le 0$ 之解： 無解	

《註》設 a、b、c 為實數，則不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恆成立的條件為 $a>0$ 且 $b^2-4ac<0$；又不等式 $ax^2+bx+c\ge 0$ 恆成立的條件為 $a>0$ 且 $b^2-4ac\le 0$。

3. **算幾不等式**

設a_1，a_2，⋯，a_n均為正數，則

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$ 。

上式等號成立的條件為$a_1=a_2=\cdots=a_n$。

4. **柯西不等式**

設a_1，a_2，⋯，a_n及b_1，b_2，⋯，b_n為$2n$個實數，則

$$\left(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\cdots+a_n^{\,2}\right)\left(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\cdots+b_n^{\,2}\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2$$ 。

上式等號成立的條件為$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，或$b_1=b_2=\cdots=b_n=0$，或存在一實數t，使得$b_k=a_kt$（其中$k=1$，2，⋯，n）。

5. **二元一次不等式圖形**

設直線L：$ax+by+c=0$且$a>0$，則

(1) $ax+by+c>0$的圖形為直線L的右側半平面。

(2) $ax+by+c\ge0$的圖形為直線L的右側半平面及直線L。

(3) $ax+by+c<0$的圖形為直線L的左側半平面。

(4) $ax+by+c\le0$的圖形為直線L的左側半平面及直線L。

6. **同側與異側**

設直線L：$ax+by+c=0$及$A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$兩點，則

(1) A、B在L的異側 $\Leftrightarrow$ $\left(ax_1+by_1+c\right)\left(ax_2+by_2+c\right)<0$

(2) A、B在L的同側 $\Leftrightarrow$ $\left(ax_1+by_1+c\right)\left(ax_2+by_2+c\right)>0$

7. **線性規劃**

(1) 線性規劃所探討的是「在二元一次聯立不等式的條件下，求得一個一次函數的最大值或最小值」，這組二元一次聯立不等式稱為限制條件，而待求最大值或最小值的函數稱為目標函數。

(2) 線性規劃問題中，滿足限制條件（即一組聯立不等式）的解稱為此問題的可行解，又可行解所成的區域，稱為可行解區域。在可行解區域內，使目標函數$f\left(x,y\right)$有最大值（或最小值）的這種點$\left(x,y\right)$，稱為此問題的最佳解。

數學公式卡 >>第三冊

排列組合

1. 相異物的直線排列

由 n 件不同的事物中，任選 m 件（ $m \le n$ ）的排列數為

$$P^n_m = \frac{n!}{(n-m)!} = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-m+1)\text{。}$$

《註》(1) $P^n_n = n! = n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1$

(2) $P^n_m = n\times P^{n-1}_{m-1} = (n-m+1)\times P^n_{m-1}$

2. 不盡相異物的直線排列

(1) 設 n 件事物中有 m 件相同，其餘均不同，則此 n 件事物全取排列的排列數為 $\dfrac{n!}{m!}$。

(2) 設 n 件事物中，共有 k 類，第一類有 m_1 件，第二類有 m_2 件，…，第 k 類有 m_k 件（此時 $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ ），則此 n 件事物全取排成一列的排列數為 $\dfrac{n!}{m_1!\times m_2!\times\cdots\times m_k!}$。

3. 重複排列

自 n 類不同的事物中，任選 m 件的重複排列數為 n^m。

4. 環狀排列

從 n 個不同的事件中，任取 m 個（ $m \le n$ ）作環狀排列，其排列數為 $\dfrac{P^n_m}{m} = \dfrac{1}{m}\times\dfrac{n!}{(n-m)!}$。

《註》 n 個不同事物全取的環狀排列數為 $(n-1)!$。

5. 組合

自 n 件相異的事物中，任選 m 件（ $0 \le m \le n$ ）為一組的組合數為

$$C^n_m = \frac{P^n_m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)}{m\times(m-1)\times\cdots\times2\times1}\text{。}$$

《註》(1) $C^n_n = 1$ ； $C^n_0 = 1$

(2) $C^n_m \times m! = P^n_m$

6. 重複組合

從 n 類不同的事物中（設每類皆不少於 m 個），每次取 m 個為一組，若各組中每類事物可以重複選取，則 n 中取 m 的重複組合數為 $H^n_m = C^{n+m-1}_m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$。

若限制每一類事物至少取一個（此時 $m \ge n$ ），則重複組合數為 $H^n_{m-n} = C^{m-1}_{m-n} = \dfrac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!}$。

7. 二項式定理

對於任意正整數n

$$(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}C_r^n x^{n-r}y^r$$

$$=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}y+C_2^n x^{n-2}y^2+\cdots+C_r^n x^{n-r}y^r+\cdots+C_n^n y^n$$

《註》$(x+y)^n$展開式中，依x的降冪排列，第$r+1$項為$C_r^n x^{n-r}y^r$，又稱為一般項，而C_r^n稱為二項係數。

8. 組合數基本公式

(1) $C_m^n=C_{n-m}^n$（$0\le m\le n$）

(2) $C_m^n=C_m^{n-1}+C_{m-1}^{n-1}$（$1\le m\le n-1$）

《註》a、b為不大於n的自然數，則$C_a^n=C_b^n \quad\Leftrightarrow\quad a=b$或$a+b=n$。

(3) $C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n$

(4) n為奇數時：$C_1^n+C_3^n+C_5^n+\cdots+C_n^n=C_0^n+C_2^n+C_4^n+\cdots+C_{n-1}^n=2^{n-1}$

(5) n為偶數時：$C_1^n+C_3^n+C_5^n+\cdots+C_{n-1}^n=C_0^n+C_2^n+C_4^n+\cdots+C_n^n=2^{n-1}$

機率

1. 集合的運算

(1) 聯集：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。

(2) 交集：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

(3) 差集：$A-B=\{x|x\in A$ 但 $x\notin B\}$。

(4) 宇集：在研究集合的問題中，若每一個集合都是某一固定集合的子集，則這個固定集合稱為宇集，通常以U表示。

(5) 補集：集合A的補集，以A'表示，即$A'=\{x|x\in U$ 但 $x\notin A\}$。

2. 古典機率的定義

設一隨機試驗的樣本空間S（$S\ne\varnothing$）中，每一個樣本點出現的機會均等，而$A\subset S$為一事件，則事件A發生機率為$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$。

3. 機率的性質

(1) $P(\varnothing)=0$。

(2) $P(S)=1$（$S\ne\varnothing$）。

(3) $A\subset S$，則$0\le P(A)\le 1$。

(4) 餘事件的機率：$A\subset S$，則$P(A')=1-P(A)$。

(5) 機率的加法性：A、B為S中的二互斥事件，則$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

(6) 機率的單調性：$A\subset S$且$B\subset S$，若$A\subset B$，則$P(A)\le P(B)$。

(7) 取捨原理：$A\subset S$且$B\subset S$，則$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

4. 條件機率

設 A 、 B 為樣本空間 S 中的二事件，且 $P(B)>0$，則在事件 B 發生的情況下，事件 A 發生的條件機率為 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ，顯然 $P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$ 。

5. 獨立事件

設 A 、 B 為樣本空間 S 中的任二事件，若 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ，則稱 A 、 B 為獨立事件，否則稱為相依事件。

6. 數學期望值

設一隨機試驗的樣本空間為 S ，$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 為樣本空間 S 的一個分割，且事件 A_i 發生的機率為 p_i（ $i=1$ 、2、⋯、 n ），若事件 A_i 發生可得數值 m_i（ $i=1$ 、2、⋯、 n ）的報酬，則 $E=p_1\times m_1+p_2\times m_2+\cdots+p_n\times m_n$ 稱為此隨機試驗的數學期望值，簡稱期望值。

統計

1. 抽樣調查的方法

(1) 簡單隨機抽樣
(2) 系統抽樣
(3) 分層隨機抽樣
(4) 部落抽樣

2. 算術平均數、加權平均數

(1) 算術平均數：

設一群數值為 x_1 、 x_2 、⋯、 x_n ，則其算術平均數 $\overline{X}$ 定義為 $\overline{X}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ 。

(2) 加權平均數：

設 w_1 、 w_2 、⋯、 w_n 分別為一群數值 x_1 、 x_2 、⋯、 x_n 的權數，則這一群數值的加權平均數 W 定義為 $W=\dfrac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}w_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i}$ 。

3. 中位數

將一群數值由小而大排列如下： $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$

當 $n=2k+1$ 為奇數時：中位數定義為 $Me=x_{k+1}$（排在正中間的數值）

當 $n=2k$ 為偶數時：中位數定義為 $Me=\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}$（排在正中間兩個數值的算術平均）

4. 眾數

一群數值資料中，出現次數最多的數值稱為眾數，通常用 Mo 來表示。

5. 百分等級

當某個資料數值，在整體資料中有 $k\%$ 的資料數值小於它，而且有 $(100-k)\%$ 的資料數值大於或等於它，我們稱這個資料數值的百分等級為 k ，記作 $\mathrm{PR}=k$ 。

6. 四分位距

設一群數值由小而大排列如下：$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$，其中 $n = 2k$ 或 $2k+1$，則

第 1 四分位數 Q_1 為 x_1、⋯、x_k 的中位數

第 3 四分位數 Q_3 為 x_{n-k+1}、⋯、x_n 的中位數

而 Q_3 與 Q_1 的差稱為四分位距，以 IQR 來表示，亦即 $IQR = Q_3 - Q_1$。

7. 標準差

(1) 母群體的變異數與標準差：

設母群體資料為 x_1、x_2、⋯、x_N，其算術平均數為 μ，則母群體的變異數為 $\sigma^2 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$，其中 $\mu = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$。

而母群體的標準差為 $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \mu^2}$。

(2) 樣本的變異數與標準差：

設一組樣本資料為 x_1、x_2、⋯、x_n，其算術平均數為 $\overline{X}$，則樣本的變異數為 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2$，其中 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$。

而樣本的標準差為 $S = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{X}^2\right)}$。

8. $Y = aX + b$ 線性變換

設一組抽樣數值資料 X 為 x_1、x_2、⋯、x_n，而另一組抽樣數值資料 Y 為 y_1、y_2、⋯、y_n，其中 $y_i = ax_i + b$，$i = 1$、2、⋯、n，又 a、b 為實數且 $a \ne 0$，以 $\overline{X}$、$\overline{Y}$ 分別代表資料組 X、Y 的算術平均數，以 S_x、S_y 分別代表資料組 X、Y 的樣本標準差，則 $\overline{Y} = a\overline{X} + b$，$S_y = |a| S_x$。

9. 常態分配 $68 - 95 - 99.7$ 規則（又稱 $\sigma - 2\sigma - 3\sigma$ 規則）

在任何常態分配當中，大約有

(1) 68% 的數據落在距平均數一個標準差的範圍內。

(2) 95% 的數據落在距平均數兩個標準差的範圍內。

(3) 99.7% 的數據落在距平均數三個標準差的範圍內。

數學公式卡 >>第四冊

三角函數的應用

1. 和差角公式

正弦函數	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
餘弦函數	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
正切函數	$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

2. 二倍角公式

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ 。

(2) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$ 。

(3) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ 。

3. $\boldsymbol{a\sin\theta+b\cos\theta}$ **的極值**（a 、 b均不為0 ，θ為任意角度）

$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin\theta+b\cos\theta\le\sqrt{a^2+b^2}$ 。

4. 三角形面積公式

在$\triangle ABC$中， $\Delta=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ 。

5. 正弦定理

在$\triangle ABC$中，

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（其中$R$為$\triangle ABC$之外接圓半徑），

即$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ 。

6. 餘弦定理

在$\triangle ABC$中，

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ，即$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 。

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ ，即$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ 。

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ，即$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 。

7. **海龍公式（Heron 公式）**

$\triangle ABC$中，設$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，則$\triangle ABC$的面積

$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

8. **三角測量**

將所欲求解的測量問題作圖，轉化成處理三角形邊與角的問題。

二次曲線

1. **圓的標準式**

以$C(h,k)$為圓心，半徑是r的圓方程式為$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 。

2. **圓的一般式**

$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

(1) 當$d^2+e^2-4f>0$時：

方程式的圖形為一圓，圓心是$\left(-\dfrac{d}{2},-\dfrac{e}{2}\right)$，半徑$r=\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$ 。

(2) 當$d^2+e^2-4f=0$時：

方程式的圖形為一點，即點$\left(-\dfrac{d}{2},-\dfrac{e}{2}\right)$。

(3) 當$d^2+e^2-4f<0$時：方程式沒有圖形。

3. **點與圓的位置關係**

設點$P(x_1,y_1)$ ，圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ ，則

(1) P在圓C的外部 $\Leftrightarrow$ ${x_1}^2+{y_1}^2+dx_1+ey_1+f>0$ 。

(2) P在圓C上 $\Leftrightarrow$ ${x_1}^2+{y_1}^2+dx_1+ey_1+f=0$ 。

(3) P在圓C的內部 $\Leftrightarrow$ ${x_1}^2+{y_1}^2+dx_1+ey_1+f<0$ 。

4. **圓與直線的位置關係**

設圓C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ，直線L：$ax+by+c=0$

又$d=\dfrac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$（圓心$(h,k)$與直線$L$的距離）

(1) 當$d>r$時：圓C與直線L不相交（即相離）。

(2) 當$d=r$時：圓C與直線L恰有一交點（即相切）。

(3) 當$d<r$時：圓C與直線L交於相異兩點（即相割）。

5. **過圓上一點（切點）的切線方程式**

利用過切點的半徑與切線互相垂直，斜率乘積等於-1，求出切線方程式。

6. **過圓外一點的切線方程式（有二解）**

設$P(x_1,y_1)$為圓外一點，則切線可設為L：$y-y_1=m(x-x_1)$ ，利用圓心到切線的距離等於半徑，求出m值（應有二解），若m只有一解，則另一切線斜率不存在，其方程式為$x-x_1=0$ 。

7. 圓的切線段長

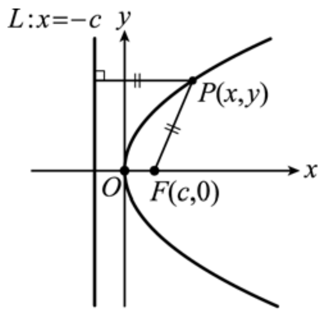
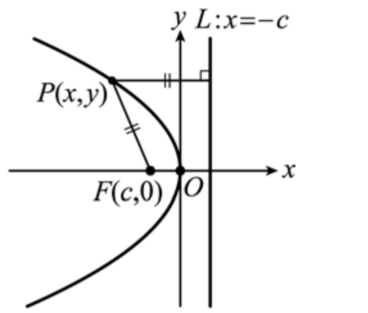
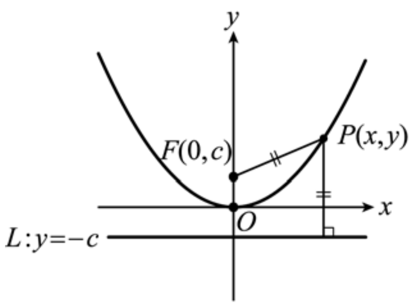
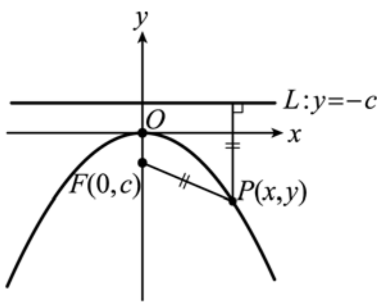
(1) 自點 $P(x_1,y_1)$ 到圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 的切線段長為

$t=\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2}$ 。

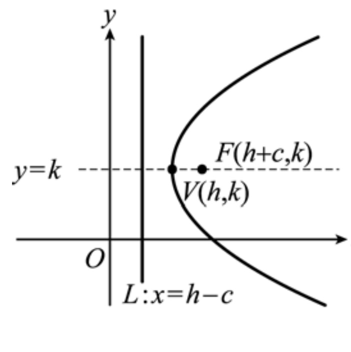
(2) 自點 $P(x_1,y_1)$ 到圓 C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的切線段長為

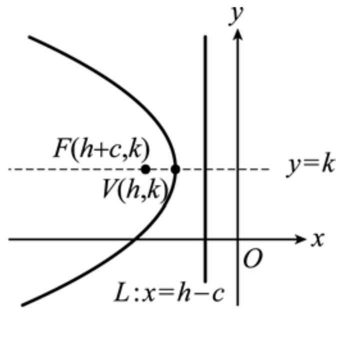
$t=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+dx_1+ey_1+f}$ 。

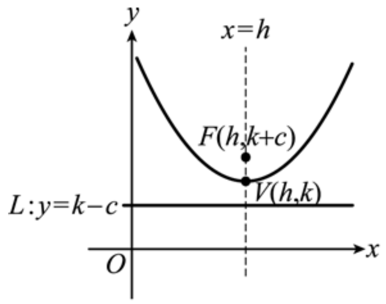
8. **頂點為原點 $(0,0)$ ，焦點在坐標軸上的拋物線**

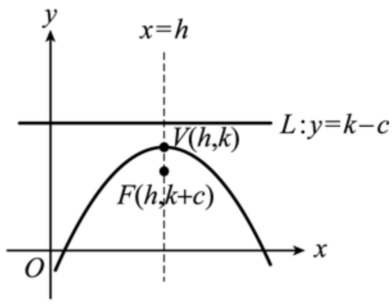
標準式	圖形	
$y^2=4cx$	 （當 $c>0$ 時）	 （當 $c<0$ 時）
$x^2=4cy$	 （當 $c>0$ 時）	 （當 $c<0$ 時）

9. 頂點為(h,k)，對稱軸平行坐標軸的拋物線

<table>
<tr><th>標準式</th><th>圖形</th></tr>
<tr><td>$(y-k)^2=4c(x-h)$</td><td>


（當$c>0$時）


（當$c<0$時）
</td></tr>
<tr><td>$(x-h)^2=4c(y-k)$</td><td>


（當$c>0$時）


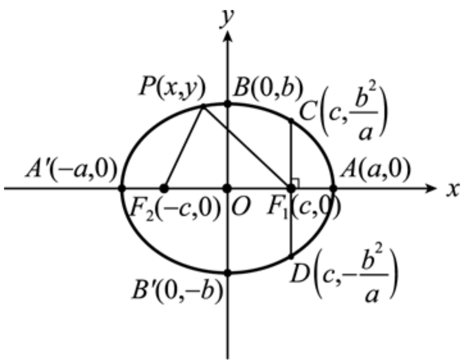
（當$c<0$時）
</td></tr>
</table>

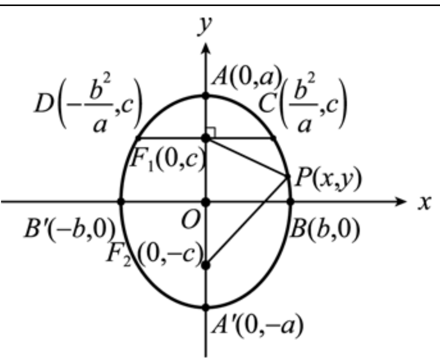
10. 拋物線的一般式

(1) 對稱軸平行y軸的拋物線方程式為$y=Ax^2+Bx+C$（其中$A\neq 0$）。

(2) 對稱軸平行x軸的拋物線方程式為$x=Ay^2+By+C$（其中$A\neq 0$）。

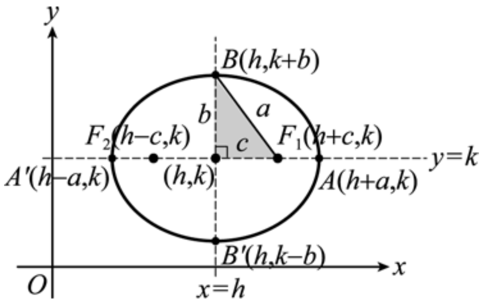
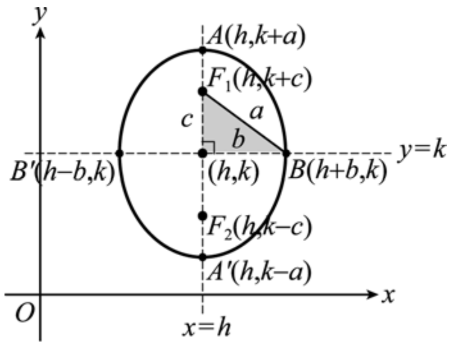
11. 中心為原點$(0,0)$，焦點在坐標軸上的橢圓

<table>
<tr><th>標準式</th><th>圖形</th></tr>
<tr><td>$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
（$a>b>0$且
$a^2=b^2+c^2$）</td><td>


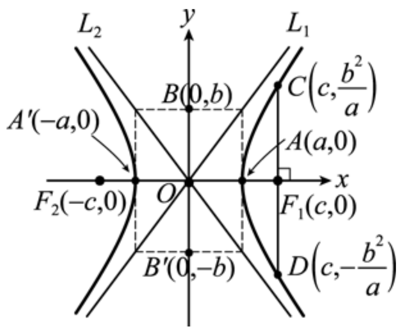
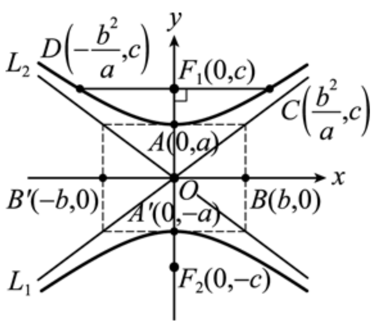
長軸長：$2a$
短軸長：$2b$
正焦弦長：$\dfrac{2b^2}{a}$
</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$
（$a>b>0$且
$a^2=b^2+c^2$）</td><td>


長軸長：$2a$
短軸長：$2b$
正焦弦長：$\dfrac{2b^2}{a}$
</td></tr>
</table>

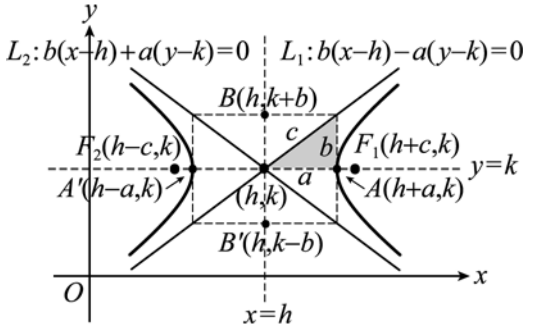
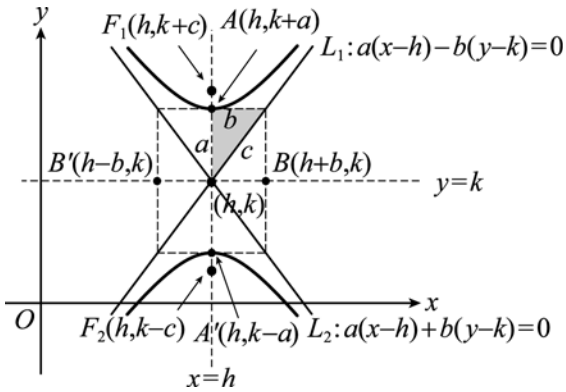
12. 中心為(h,k)，長、短軸平行坐標軸的橢圓

標準式	圖形
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ （$a>b>0$且 $a^2=b^2+c^2$）	
$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$ （$a>b>0$且 $a^2=b^2+c^2$）	

13. 中心為原點$(0,0)$，焦點在坐標軸上的雙曲線

標準式	圖形
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （$c^2=a^2+b^2$）	 貫軸長：$2a$ 共軛軸長：$2b$ 正焦弦長：$\dfrac{2b^2}{a}$ 漸近線： L_1：$bx-ay=0$ L_2：$bx+ay=0$
$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ （$c^2=a^2+b^2$）	 貫軸長：$2a$ 共軛軸長：$2b$ 正焦弦長：$\dfrac{2b^2}{a}$ 漸近線： L_1：$ax-by=0$ L_2：$ax+by=0$

14. 中心為 (h,k) ，貫軸、共軛軸平行坐標軸的雙曲線

標準式	圖形
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ （ $c^2=a^2+b^2$ ）	
$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ （ $c^2=a^2+b^2$ ）	

微積分及其應用

1. 無窮數列的極限

設 $\langle a_n\rangle$ 為一無窮數列，α 為一實數，當 n 趨向無限大時，a_n 趨近於 α，則稱數列 $\langle a_n\rangle$ 收斂於 α，或稱數列 $\langle a_n\rangle$ 的極限為 α ，記作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 。

2. 數列極限的運算性質

設 $\langle a_n\rangle$ 、 $\langle b_n\rangle$ 為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ ， k 為一常數，則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=k\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)=k\alpha$ 。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta$ 。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha-\beta$ 。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\times b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$ 。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ （其中 $\beta\neq 0$ 且 $b_n\neq 0$ 對所有很大的 n 值都成立）。

3. 分式型數列的極限

設 $f(n)$、$g(n)$ 為 n 的多項式，則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases}0\text{，當 }\deg f(n)<\deg g(n)\\ f(n)\text{與 }g(n)\text{領導係數的比值，當 }\deg f(n)=\deg g(n)\\ \text{不存在，當 }\deg f(n)>\deg g(n)\end{cases}$$

4. 夾擠定理

設 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$ 為三個無窮數列，且從某一項起恆有 $a_n\le b_n\le c_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$（其中 α 為實數），則 $\langle b_n\rangle$ 亦為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$。

5. 函數的極限

設 a、α 為實數，若函數 $f(x)$，當 x 趨近於 a 時（由 a 的左、右兩邊趨近，且 $x\ne a$），函數 $f(x)$ 的值會趨近於某一個固定的值 α，則稱「當 x 趨近於 a 時，函數 $f(x)$ 的極限為 α」，記作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$。

6. 函數的左、右極限

(1) 設函數 $f(x)$，當 x 從 a 的右邊趨近於 a（$x\ne a$）時，函數 $f(x)$ 的值會趨近於定值 α，則稱 α 為 $f(x)$ 於 a 的右極限，記作 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\alpha$。

(2) 設函數 $f(x)$，當 x 從 a 的左邊趨近於 a（$x\ne a$）時，函數 $f(x)$ 的值會趨近於定值 β，則稱 β 為 $f(x)$ 於 a 的左極限，記作 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\beta$。

《註》設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的鄰近區域有定義，則

$$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=\alpha\text{。}$$

7. 函數極限的運算性質

設函數 $f(x)$、$g(x)$ 在 $x=a$ 的極限分別為 α、β，即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$，又 k 為一常數，則

(1) $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=k\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)=k\alpha$。

(2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha+\beta$。

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha-\beta$。

(4) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\times\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$。

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$（$\beta\ne 0$）。

8. 多項式函數極限的性質

設 $f(x)$、$g(x)$ 為二實係數多項式函數，a 為實數，則

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$。

(2) 當 $g(a)\ne 0$ 時，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$。

9. 函數的連續

函數 $f(x)$ 滿足下列三個條件：

(1) $f(x)$ 在 $x=a$ 有定義（即 $f(a)$ 存在）。

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在。

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

則稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續。

當函數 $f(x)$ 在定義域中的每一個點都連續，則稱函數 $f(x)$ 為連續函數。

《註》函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在。反之，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 未必連續。

10. 導數的定義

設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 及鄰近區域都有意義，若極限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在，則稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數存在，並稱此極限值為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數，記作 $f'(a)$，即

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}。$$

《註》若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數 $f'(a)$ 存在，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分，否則稱為不可微分。

《註》函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$，若令 $x-a=h$，則 $x=a+h$。當 $x\to a$ 時，意指 $h\to 0$，因此函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數亦可表示為 $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。

11. 微分公式（設 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數）

(1) 若 $f(x)=c$（c 為常數），則 $f'(x)=0$。

(2) 若 $f(x)=x^n$（n 為有理數），則 $f'(x)=nx^{n-1}$。

(3) 若 $h(x)=kf(x)$（k 為常數），則 $h'(x)=kf'(x)$。

(4) 若 $h(x)=f(x)+g(x)$，則 $h'(x)=f'(x)+g'(x)$。

(5) 若 $h(x)=f(x)-g(x)$，則 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$。

(6) 若 $h(x)=f(x)g(x)$，則 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$。

(7) 若 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，則 $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$（$g(x)\neq 0$）。

12. 連鎖規則（設 $f(x)$、$g(x)$ 為可微分函數）

若 $h(x)=f(g(x))$，則 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$。

《註》設 $f(x)$ 為可微分函數，n 為有理數，若 $h(x)=\left[f(x)\right]^n$，則 $h'(x)=n\left[f(x)\right]^{n-1}\times f'(x)$。

13. 導數的正負與函數的遞增、遞減關係

設 $f(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的多項式函數，對於任意 $x\in(a,b)$：

(1) 若 $f'(x)>0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上為嚴格遞增函數。

(2) 若 $f'(x)<0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上為嚴格遞減函數。

14. 利用第二階導函數判斷函數圖形的凹向

設 $f(x)$ 為區間 (a,b) 上的多項式函數，對於任意 $x\in(a,b)$：

(1) 若 $f''(x)<0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向下。

(2) 若 $f''(x)>0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的圖形凹口向上。

《註》函數圖形凹向改變的分界點，稱為反曲點。

15. 利用第二階導函數判別極大、極小值

設 $f(x)$ 為多項式函數且 $f'(c)=0$，則

(1) 當 $f''(c)<0$ 時，函數 $f(x)$ 有極大值 $f(c)$。

(2) 當 $f''(c)>0$ 時，函數 $f(x)$ 有極小值 $f(c)$。

16. 不定積分

設 $F(x)$ 是函數 $f(x)$ 的一個反導函數，C 為任意常數，則 $F(x)+C$ 稱為函數 $f(x)$ 的不定積分，以符號 $\int f(x)dx$ 表示，亦即 $\int f(x)dx=F(x)+C$。

17. 不定積分的公式

(1) 設 $n\neq -1$ 的有理數，則 $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$（$C$ 為常數）。

(2) 設 k 為常數，則 $\int kdx=kx+C$（C 為常數）。

(3) 設 k 為常數，則 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$。

(4) $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$。

(5) $\int[f(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$。

18. 定積分的性質

設 $f(x)$、$g(x)$ 為多項式函數，a、b 為實數且 $a<b$，k 為任意常數，則

(1) $\int_a^a f(x)dx=0$。

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$。

(3) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$。

(4) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$（其中 $a<c<b$）。

(5) $\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$。

(6) $\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$。

19. 定積分與面積的關係

設 $f(x)$ 為閉區間 $[a,b]$ 上的多項式函數，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 相當於曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成的區域中，在 x 軸上方部分的面積減去在 x 軸下方部分的面積。