龍騰數學特刊－重複組合

作者：林世偉／成功高中

緣由

配合龍騰版課本融合一些自己上課補充的東西，和學生會遇到的問題，寫出一份學生能自行閱讀且老師也可以上課的教材。希望這樣的內容能適合一般程度的高中生學習，也希冀各位先進能給予批評指教。

重複組合

先來看底下的組合問題：

簡單飲料店提供紅茶、綠茶、奶茶三種不同茶飲，今天甲、乙、丙、丁四人到飲料店買茶(每個人都一定會買一杯茶飲)，請問：

(a) 這四人有幾種點茶的情形？

(b) 對店員來說，有幾種給茶飲的方式？

在問題(a)中，甲、乙、丙、丁四人每人都有紅茶、綠茶、奶茶三種不同的茶類可以點，所以這四人點茶的情形共有3^4種。

而問題(b)中對店員來說，店員不在乎誰點了那種茶，而是在乎了每種茶被點了幾次。我們思考一下，將這樣的問題做成數學式子的轉換並解決問題。因為這四人**不管如何點這三種茶，店員一定就是做好四杯茶飲**給他們。

如果我們假設紅茶、綠茶、奶茶分別點了x_1，x_2，x_3杯，那麼可將**不管如何點這三種茶，店員一定就是做好四杯茶飲**，轉換成三元一次方程式$x_1+x_2+x_3=4$。如此一來，店員給茶飲的方式就是滿足$x_1+x_2+x_3=4$的一組非負整數解(x_1,x_2,x_3)。

舉例來說一組非負整數解$(2,1,1)$對應了店員給出兩杯紅茶，一杯綠茶，一杯奶茶。所以$x_1+x_2+x_3=4$有幾個非負整數解，就是問題(b)的答案。如何找出有幾個非負整解呢？有同學會想到列舉的方法，就試試看吧！

隨堂練習

列舉出$x_1+x_2+x_3=4$所有的非負整數解。

下面的表格列舉出所有的情形，也可以先列出**(4,0,0)**、**(3,1,0)**、**(2,2,0)**、**(2,1,1)**的解後，對這些解進行排列。

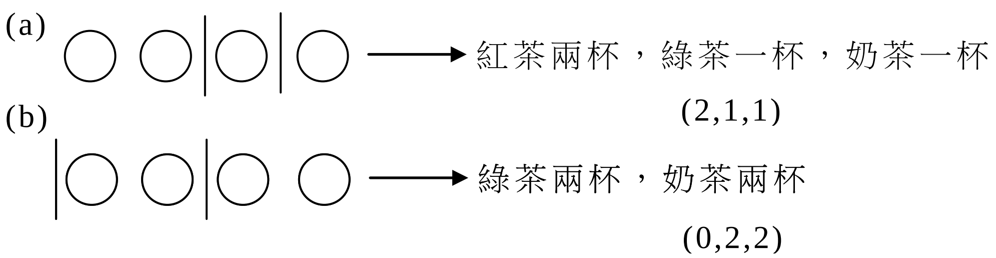
非負整數解 (x_1,x_2,x_3)	排列數
(4,0,0)(0,4,0)(0,0,4)	$\frac{3!}{2!}=3$
(3,1,0)(3,0,1)(1,0,3) (1,3,0)(0,3,1)(0,1,3)	3!=6
(2,2,0)(2,0,2)(0,2,2)	$\frac{3!}{2!}=3$
(2,1,1)(1,2,1)(1,1,2)	$\frac{3!}{2!}=3$

所以問題(b)中，對店員來說一共有 15 種給茶飲的方式。

剛剛試過使用列舉的方式列出三元一次方程式 $x_1+x_2+x_3=4$的所有非負整數解來計算店員有多少給茶飲的方式。但是應該發現這樣的過程很麻煩，所以我們嘗試用新的方法來解決這樣的問題，說明如下：

店員在準備製作飲料時會將 4 個空杯子與 2 根吸管共 6 個事物排成一列，2 根吸管會將空杯子分成左、中、右三區，然後將左區的杯子倒入紅茶，中區的杯子倒入綠茶，右區的杯子倒入奶茶。我們用「○」代表空杯子與用「|」代表吸管畫圖來說明店員的想法。

例如，圖 1(a)中的「○」和「|」的排列代表紅茶兩杯，綠茶一杯，奶茶一杯，也可以代表一組 $x_1+x_2+x_3=4$的非負整數解(2,1,1)。而圖 1(b)中的排列代表綠茶兩杯，奶茶兩杯，也可以代表一組 $x_1+x_2+x_3=4$的非負整數解(0,2,2)。



▲圖 1

因此，我們由一種「4 個○與 2 個|的排列」對應出一種「店員給茶飲的方式」，也對應到了一組「$x_1+x_2+x_3=4$的非負整數解」。那反過來呢？

隨堂練習

仿照圖 1，假設四人點了一杯紅茶、三杯奶茶，嘗試畫出「○」與「|」的排列？

由一一對應原理得知，店員給茶飲的方式對應到 4 個「○」與 2 個「|」作直線排列的排法。利用有相同物的排列公式，得排法共有

$$\frac{(4+2)!}{4!\,2!}=15（種）$$

利用這樣的想法，是不是比較快的解出問題(b)中，對店員來說一共有 15 種給茶飲的方式。

在問題(a)中，甲、乙、丙、丁這四人每人都有紅茶、綠茶、奶茶三種不同的茶類可以點，所以這四人點茶的情形共有 3^4 種。其中甲、乙、丙、丁點了(紅、紅、綠、紅)和(紅、綠、紅、紅)是視為不同的情形，茶是可以重複點但是有順序的差別這就是我們之前學習過的**重複排列**。而問題(b)中，茶還是可以重複點但是沒有順序的差別，例如甲、乙、丙、丁點了(紅、紅、綠、紅)和(紅、綠、紅、紅)，對店員來說都是三杯紅茶，一杯綠茶的組合，於是我們將這樣的情形稱為**重複組合**。

(紅、紅、紅、綠)
(紅、紅、綠、紅)
(紅、綠、紅、紅) ⟶ 三杯紅茶，一杯綠茶
(綠、紅、紅、紅)

$\boxed{\text{甲、乙、丙、丁的點茶情形}}$ $\boxed{\text{對店員來說，給茶飲的方式}}$

接著我們嘗試思考下面的問題：

(1)從紅茶、綠茶、奶茶三種飲料中選取 4 瓶，有多少種可能的選法？（每種飲料均至少有 4 瓶）

(2)三元一次方程式 $x_1+x_2+x_3=4$ 的非負整數解 (x_1, x_2, x_3) 有多少組？

(3)將 4 個相同的白球全部分給甲、乙、丙三人，有多少種分法？

在問題(1)中，如果紅茶、綠茶、奶茶分別選取 x_1，x_2，x_3 瓶，那麼 (x_1,x_2,x_3) 就是滿足 $x_1+x_2+x_3=4$ 的非負整數解，其實這跟之前討論的飲料店店員的給茶飲方式的問題類似;在問題(3)中，如果甲，乙，丙各分得 x_1， x_2 與 x_3 個白球，那麼 (x_1, x_2, x_3) 也是滿足 $x_1+x_2+x_3=4$ 的非負整數解;也就是說，問題(1)，(2)與(3)的答案是完全一樣都是 15。

一般而言，我們把像第(1)題中「從 n 類事物中選取 k 個為一組（每類均至少有 k 個且可以重複選取）」的組合方式稱為 n 中取 k 的**重複組合**，仿照前面的討論，可以知道其組合數與「n 元一次方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非負整數解個數」及「將 k 個相同的白球分給 n 個人的分法數」都相等，而且就是將 k 個「○」與 $n-1$ 個「|」作直線排列的排列數（圖 2），即

$$\frac{\left(k+\left(n-1\right)\right)!}{k!\left(n-1\right)!}=\frac{\left(n+k-1\right)!}{k!\left(n-1\right)!}=C_k^{n+k-1} .$$

▲圖 2

我們整理一下關於重複組合的想法：

重複組合

下列三個問題所求的組合數都是 C_k^{n+k-1}

(1)從 n 類事物中選取 k 個的組合（每類的個數均至少 k 個且可以重複選取）.

(2)n 元一次方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非負整數解 .

(3)將 k 個相同的事物全部分給 n 個人的分法 .

建議先將題目對應成求 n 元一次方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非負整數解。再將 k 個「○」與 $n-1$(未知數個數少一)個「|」作直線排列，得到

$$\frac{\left(k+\left(n-1\right)\right)!}{k!\left(n-1\right)!}=\frac{\left(n+k-1\right)!}{k!\left(n-1\right)!}=C_k^{n+k-1}$$

底下我們來作一些重複組合的問題 .

例 1.方程式 $x+y+z=10$ 有多少組非負整數解？

解：x，y，z 的所有非負整數解為

10 個「○」與 3−1(未知數少一)個「|」的直線排列 $\dfrac{\left(3+10-1\right)!}{10!\left(3-1\right)!}$

$$C_{10}^{3+10-1}=C_{10}^{12}=C_2^{12}=66\text{（組）}.$$ □

隨堂練習

方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=4$有多少組非負整數解？

例 2. 每碗剉冰可以任選 4 份配料，每種配料都可重複選取．如果冰店今天準備了 10 種不同的配料供客人選擇，那麼一碗剉冰會有多少種不同的組合？

解： 設在一碗剉冰中，10 種不同的配料各加了 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 份，且加起來要有 4 份配料。先根據題意對應成求

$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=4$的所有非負整數解

其所有非負整數解就是 4 個「○」與$10-1$(未知數少一)個「|」的直線排列 $\dfrac{13!}{9!4!}=C_4^{13}=715$（組），

故共有 715 種不同的組合． □

隨堂練習

老師擬在文具行購買 8 支原子筆給段考進步的同學，若文具行的原子筆有紅色、黑色與藍色 3 種，則老師買的原子筆有多少種不同的組合方式？

例 3. 將 9 本相同的練習簿全部分給 4 個小朋友．

(1)共有幾種分法？

(2)若要求每人至少分到 1 本，則有多少種分法？

解： (1)設 x_1, x_2, x_3, x_4 表示 4 人所得的簿本數，9 本相同的練習簿全部分給 4 個小朋友的分法對應至

$x_1+x_2+x_3+x_4=9$的所有非負整數解

其非負整數解有

$C_9^{12}=C_3^{12}=220$（種）.

(2)因為有要求每人至少分到一本，以 x_1, x_2, x_3, x_4 表示 4 人所得的簿本數時，就不可以為 0。所以將分法對應至

$x_1+x_2+x_3+x_4=9$的所有**正整數解**。

也就是 $x_1+x_2+x_3+x_4=9$ 且 $x_1\ge1,\quad x_2\ge1,\quad x_3\ge1,\quad x_4\ge1$ ．

將方程式改寫為

$$(x_1-1)+(x_2-1)+(x_3-1)+(x_4-1)=5 \ .$$

令

$$y_1 = x_1 - 1,\quad y_2 = x_2 - 1,\quad y_3 = x_3 - 1,\quad y_4 = x_4 - 1,$$

則方程式 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ 的正整數解與方程式

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$ 的非負整數解有一一對應的關係．由一一對應原理得知，兩方程式各有

$$C^8_5 = C^8_3 = 56 \text{組解}$$

，即每人至少分到 1 本的分法共有 56 種． □

隨堂練習

(1) 方程式 $x + y + z = 10$ 有多少組正整數解？

(2) 從全校高一的 4 個班級選出 12 人組成足球聯隊，規定每班至少有兩人參加．請問各班名額的分配共有多少種情形？

例 4. 班上優良學生選舉提名了 4 名候選人，全班有 18 位同學，每位同學都有一票且一定要投票.

(1)記名投票且不能有廢票時，共有多少種情形？

(2)不記名投票時且不能有廢票時，共有多少種情形？

(3)不記名投票時，且能有廢票時，共有多少種情形？

解： (1)記名投票，每位同學都有 4 種選擇，利用重複排列的想法可知記名投票且不能有廢票時情形有 4^{18}（種）.

(2)因為是不記名投票，最後投票的結果只會有這 4 名候選人各得到多少票。設 x_1, x_2, x_3, x_4 表示 4 名候選人所得的票數，根據題意對應成求

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \text{的所有非負整數解}$$

其非負整數解有

$$C^{21}_{18} = C^{21}_3 = 1330 \text{（種）}.$$

(3)因為是不記名投票，且可以有廢票。這 4 名候選人得到的總票數加上廢票數會是 18。設 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 表示 4 名候選人所得的票數和廢票數 x_5，根據題意對應成求

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18 \text{的所有非負整數解}$$

其非負整數解有

$$C^{22}_{18} = C^{22}_4 = 7315 \text{（種）}.$$

□

隨堂練習

甲、乙、丙、丁等 4 人到速食店點套餐，其中套餐共有 1~5 號 5 種，請問

(1)每人點一份套餐，這 4 個人有幾種點餐的情形？

(2)每人點一份套餐，店員有幾種給餐點的方式？

(3)每人最多點一份套餐，可以有人不點餐，店員有幾種給餐點的方式？

進階習題

1. 在下列情形下各有多少種分法？
   (1)將 6 枝相同的鉛筆全部分給 4 位小朋友，每人至少 1 枝 .
   (2)將 4 枝相同的鉛筆全部分給 6 位小朋友，每人至多 1 枝.

2. 方程式 $x+y+z+t\le 9$ 有幾組正整數解？

3. 媽媽想從奇異果、蘋果、鳳梨三種水果(每種水果至少有 7 顆)中，挑 7 顆來拜拜。為了擺盤的美觀，每種水果都要有，且鳳梨一定要有奇數個。請問媽媽有多少種不同的水果組合？

隨堂練習解答

P1 (4,0,0)(0,4,0)(0,0,4)(3,1,0)(3,0,1)(1,0,3)(1,3,0)(0,3,1)(0,1,3)
(2,2,0)(2,0,2)(0,2,2) (2,1,1)(1,2,1)(1,1,2)

P3 ○||○○○

P5 70 組

p5 轉換成 $x_1+x_2+x_3=8$的所有非負整數解，答案為 45 種。

P6 (1) 轉換成 $x'+y'+z'=7$的所有非負整數解，答案為 36 組。

(2) 轉換成 $x_1+x_2+x_3+x_4=4$的所有非負整數解，答案為 35 種。

P7 (1) $5^4=625$種

(2) 轉換成 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=4$的所有非負整數解，答案為 70 種。

(3) 轉換成 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=4$的所有非負整數解，答案為 126 種。

(如果有學生答案為 125 種，因為店員不接受都沒人點餐，這也合理)

進階題詳解

1. (1) 將分法對應至 $x_1+x_2+x_3+x_4=6$的所有**正整數解**

將方程式改寫為

$$(x_1-1)+(x_2-1)+(x_3-1)+(x_4-1)=2\ .$$

令

$y_1=x_1-1,\quad y_2=x_2-1,\quad y_3=x_3-1,\quad y_4=x_4-1,$則方程式

$x_1+x_2+x_3+x_4=6$的正整數解與方程式

$y_1+y_2+y_3+y_4=2$的非負整數解有一一對應的關係

故答案為 $C^5_2=10$種

(2) 將 4 枝相同的鉛筆全部分給 6 位小朋友，每人至多 1 枝。所以一定會有 2 人沒有得到鉛筆，4 人得到 1 枝。所以解法就是在 6 人中挑 2 人沒有得到鉛筆，鉛筆又都是相同的。故答案為 $C^6_4=15$種

2. $x+y+z+t\le 9$的正整數解對應至 $x+y+z+t\le 5$的非負整數解，再對應至 $x+y+z+t+s=5$的非負整數解，故答案為 $C^9_5=C^9_4=126$組。

3. 可以先就鳳梨個數去討論，設奇異果個數為 x，蘋果個數為 y，

如果鳳梨 1 顆時， $x+y=6$的正整數解為 5 組

鳳梨 3 顆時， $x+y=4$的正整數解為 3 組

鳳梨 5 顆時， $x+y=2$的正整數解為 1 組

故總共有 9 種不同的水果組合。