

龍騰數學特刊－條件機率與貝氏定理

作者：林世偉／成功高中

緣由

想分享自己教學中有趣的素材，這樣的素材在我的課程裡可以達到增加學生學習動機，或是幫助學生統整觀念的效果。希冀各位先進能給予批評指教。

蒙提霍爾問題

教學建議

本題是一題可以在進行條件機率教學前，引起學生動機的素材。教師可以先提出問題，讓班上同學討論發表意見，讓同學投票選擇「更換」還是「不更換」，接著進行條件機率與貝氏定理的教學後，讓同學再次討論發表後，給予正確答案。本題也可以等學生學習完條件機率後，教師將這份素材拿給程度較好的學生，讓學生自行閱讀並思考。在美國電影《決勝 21 點》中也有一段對話提到蒙提霍爾問題，有興趣的老師也可以自行上網搜尋影片當作教學素材。

本題源自美國益智電視節目中的主持人蒙提·霍爾(Monty Hall)，這個問題就是節目中的一個遊戲。遊戲說明如下：有一部汽車與二隻山羊，分別放在三道門後，由參賽者任選一道門。打開來如果是汽車，就獲得汽車；如果是山羊，就可將山羊牽回家牧養。當然，每個參賽者都想要得到汽車。

這個遊戲的猜獎程序如下：

1. 首先由參賽者選定一道門，暫時先不要打開。
2. 剩下兩個門由知道門後情形的主持人打開其中一個，發現裡面是一隻山羊。
3. 主持人對參賽者說：現在你有一次機會，可以「更換」或「不更換」剛才的選定的那道門。就在此刻：

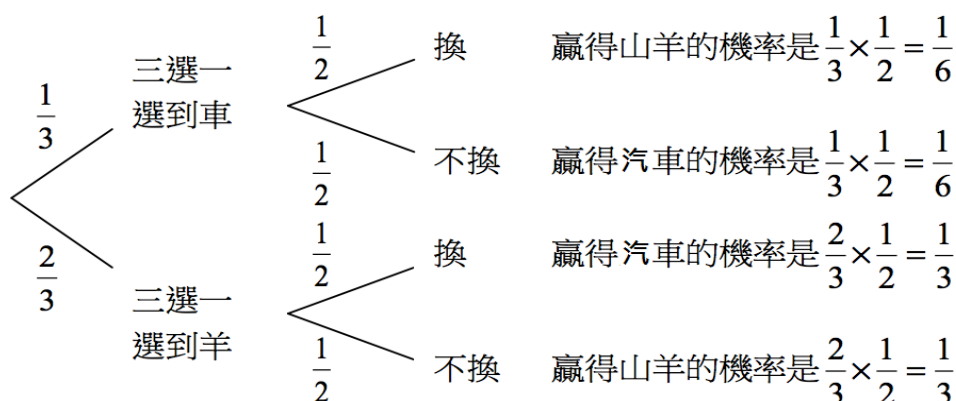
如果您就是這位參賽者，你會選擇「更換」還是「不更換」？

請問如果參賽者選擇「更換」，打開門後是汽車的機率又是多少？

這題大部分同學的直覺會覺得參賽者選擇「更換」還是「不更換」獲得汽車的機率都是一樣。就是兩扇門機會均等，但是真的是這樣嗎？

首先我們採取直觀的論證。參賽者一開始選到汽車的機率為 $\frac{1}{3}$ ，選到山羊的機率為 $\frac{2}{3}$ 。所以初選有較大的可能沒有選到汽車。因此在獲知主持人揭露了一個門後有山羊，大大降低不利的因素。參賽者應該更換房門這樣比較有利於贏得汽車。

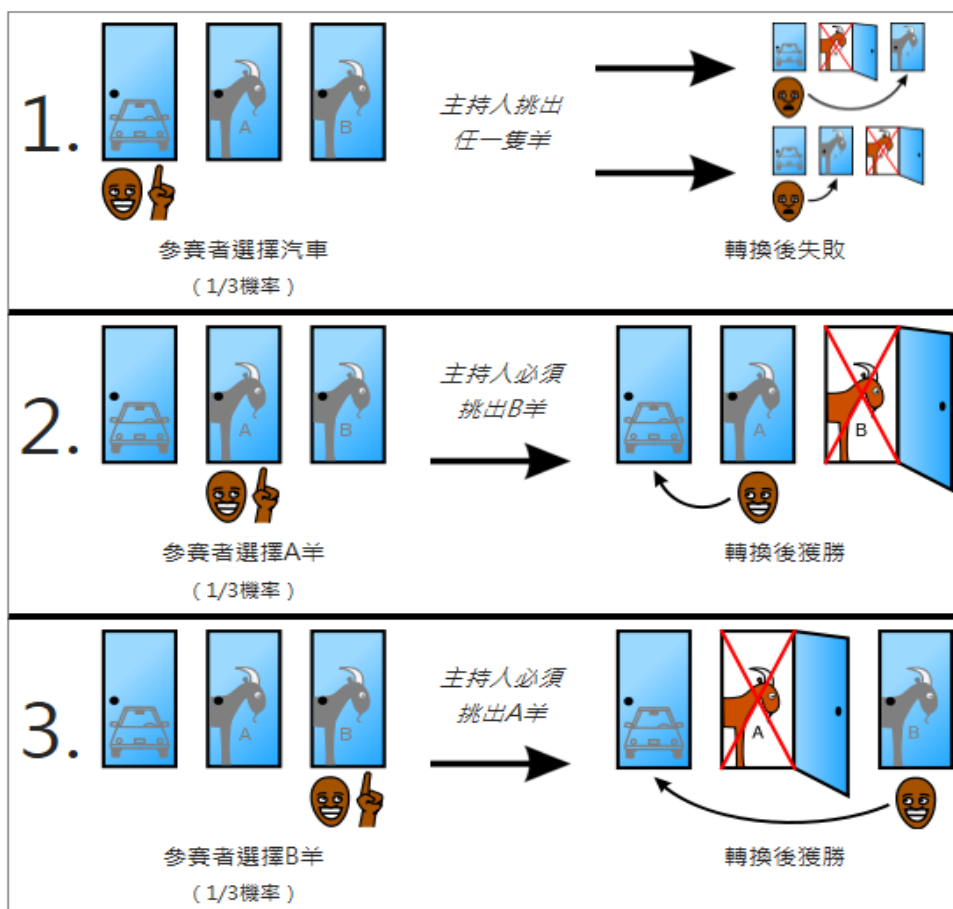
這樣的說明或許有點難懂，我們再思考一下曾經學過什麼方式來分析題目。下面我們就試著用樹狀圖去分析：



所以根據條件機率，參賽者選擇「更換」，而贏得汽車的機率為

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

最後我們附上流程圖，讓大家更清楚。



(圖片來源：維基百科蒙提霍爾問題)

從流程圖上可以看出，只有一開始選擇汽車的門，再選擇「更換」才會選到山羊。但是參賽者一開始選擇到汽車的機率就是 $\frac{1}{3}$ 。

透過上述討論，選擇「更換」確實是明智的，但是大家別忘了機率值也只是參考，不保證換門一定贏得汽車！畢竟，在還沒開出結果之前，所有的可能都是可能，才是我們對學習機率的意義。難怪法國數學家拉普拉斯（Laplace）稱讚機率論說：

由賭局引起的一門學問，居然會成為人類知識最重要的研究對象，這實在令人非常驚奇。

隨堂練習

在同樣的情境下，如果今天有 1000 道門，只有一輛汽車放在其中一道門後面。如果你選擇 1 道門，而知道門後情形的主持人打開了其他 998 道門，就在此刻在你原本選擇的一道門和最後剩下的一道門

- (1) 你會選擇「更換」還是「不更換」？
- (2) 如果選擇「更換」，打開門後是汽車的機率又是多少？

參考解答：

(1) 更換

- (2) $\frac{999}{1000}$ (所以「更換」還是「不更換」會機會均等嗎？是不是更明顯能感受出來)

參考資料：

1. 決勝 21 點。電影 (2008)，哥倫比亞影業製作。
2. 轎車與山羊。科學月刊，第二十九卷第十一期，蔡聰明。
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_29_11_1/index.html
3. 蒙提霍爾問題（一）決勝 21 點。科技部高瞻自然科學教學資源平台，楊瓊茹。
<http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=47158>
4. 參考網站 <http://www.stat.nuk.edu.tw/prost/book2/p1/p1.htm>
5. 維基百科：蒙提霍爾問題 <http://zh.wikipedia.org/wiki/蒙提霍爾問題>

取球問題

教學建議

本題是可以在學生學習完獨立事件後，整合學生觀念的問題。讓學生用直觀的方式，討論機率的問題。最後討論出樣本空間的選取，只要樣本空間的元素取出的機會均等，即使是不同的樣本空間，都能做出正確的機率。這也是學生常常在算機率時，會產生迷思概念及犯錯的地方。

設袋中有 3 黑球，2 白球。今從袋中取球，請按照下列情形，求出取到 1 黑球 1 白球的機率。

(1)一次取兩球

(2)取兩次，一次取一球，每次取球後放回袋中

(3)取兩次，一次取一球，每次取球後不放回袋中

解：(1)一次取兩球，因為每顆球取出的機會相等

$$\text{取到 1 黑球 1 白球的機率為 } \frac{C_1^3 C_1^2}{C_2^5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(2)取兩次，一次取一球可分為●○，○●兩種情況。若每次取球後放回袋中，第二次取到白球的事件與第一次取到黑球的事件是獨立，所以第一次取到黑球而第二次取到白球的事件

$$\bullet\circ\text{的機率為 } \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}。$$

$$\text{同理，}\circ\bullet\text{的機率為 } \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}。$$

因為這兩種情況為互斥，所以取到 1 黑球 1 白球的機率為 $\frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$ 。

(3)取兩次，一次取一球可分為●○，○●兩種情況。若每次取球後不放回袋中，第二次取到白球的事件與第一次取到黑球的事件不獨立。第一次取到黑球後不放回袋中，第二次取球時袋中剩四球(2 黑 2 白)，故第二次取到白球的機率為 $\frac{2}{4}$

$$\bullet\circ\text{的機率為 } \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}。$$

$$\text{同理，}\circ\bullet\text{的機率為 } \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}。$$

因為這兩種情況為互斥，所以取到 1 黑球 1 白球的機率為 $\frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ 。

觀察上面三種情形，發現「一次取兩球」和「取兩次，一次取一球，每次取球後不放回袋中」兩種情形取到 1 黑球 1 白球的機率都是 $\frac{3}{5}$ ，是巧合嗎？

我們從直觀的想法來解釋這個現象，假設你今天要從袋中一次取兩球，你是不是可以將兩手伸進袋中，一手拿一球，然後把球拿起來。如果我們兩手起來的瞬間，右手先離開袋子，左手再離開。不就變成了取兩次，一次用右手取，後一次用左手取，而且每次取球後不放回袋中。

如果這樣還是不夠清楚，我們來觀察兩種情形機率的數學式子。

一次取兩球，取到 1 黑球 1 白球的機率為 $\frac{C_1^3 C_1^2}{C_2^5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

取兩次，一次取一球，每次取球後不放回袋中

取到 1 黑球 1 白球的機率為 $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$$\text{改寫為 } \frac{C_1^3 C_1^2 \times 2!}{P_2^5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

你發現了嗎？

就是樣本空間的不同。有沒有將取出的球先後順序作排列而已。如果考慮到先後順序，雖然樣本空間的元素變多，但取到 1 黑球 1 白球事件的元素也會變多，所以機率是不會影響的，但這當然要在樣本空間每個元素出現機會要均等的先決條件下。

所以我們可以得到以下的結論：

袋中有 m 個黑球， n 個白球，「一次取 k 球」和「取 k 次，一次取一球，每次取球後不放回袋中」，取出任何情形的機率都是一樣的。

隨堂練習

承上題，有同學觀察到取兩次，一次取一球，取球後不放回會比取球後放回，取到 1 黑球 1 白球的機率來得大。這樣的結果，可以推到取兩次，一次取一球，取球後不放回會比取球後放回，取到 2 黑球的機率來得大嗎？

參考解答：

不行，取球後不放回，取到兩黑球的機率為 $\frac{6}{20} = \frac{30}{100}$ 。

而取球後放回，取到兩黑球的機率為 $\frac{9}{25} = \frac{36}{100}$ 。