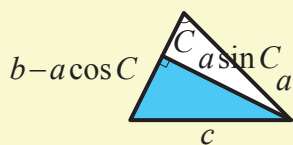


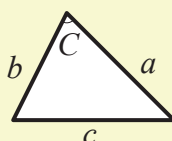
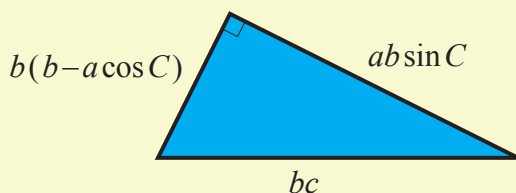
# 龍騰數亦優

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

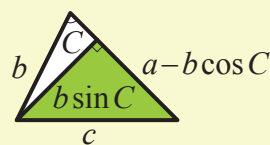
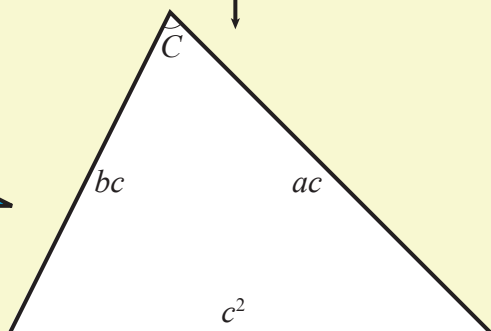
第37刊



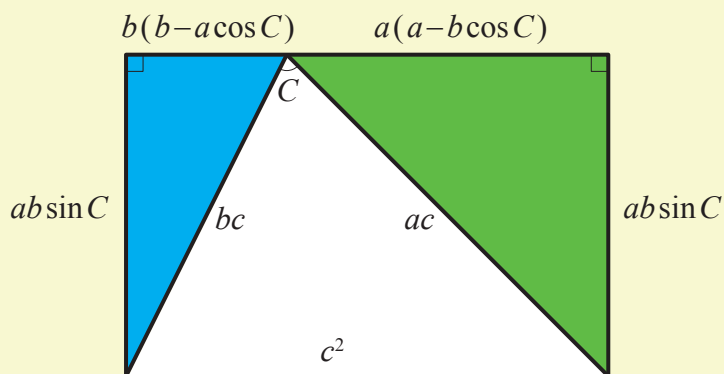
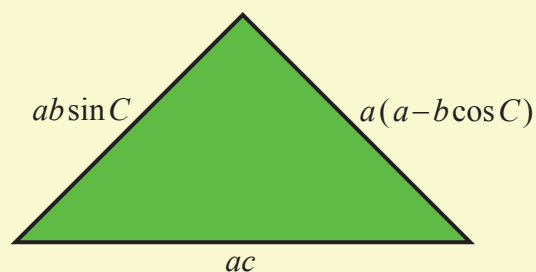
$\times b$



$\times c$



$\times a$



$$\begin{aligned} c^2 &= b(b - a \cos C) + a(a - b \cos C) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$



贈品禁止轉售

#7



55201N/G/0000000



龍騰文化

# 編輯室墨記

讓知名數學家泊松 (S. D. Poisson) 決定投身於數學事業的究竟是什麼樣的數學題？孔明棋的經典棋局「拉丁十字」、「希臘十字」最完滿的解法又為何？〈許教授的數學趣題〉帶來了 17 道貼近日常生活、又妙趣橫生的數學題，一起來小試身手吧！

數學總讓學生覺得遙不可及、高不可攀，究竟應該如何讓學生領略數學的美麗呢？張志鵬老師的〈從「尋找犯罪熱區」淺談數學建模〉利用數學公式尋找連續犯案者的可能住處，進而協助破案，讓我們見識到數學的威力，破除學生口中的「數學無用論」！

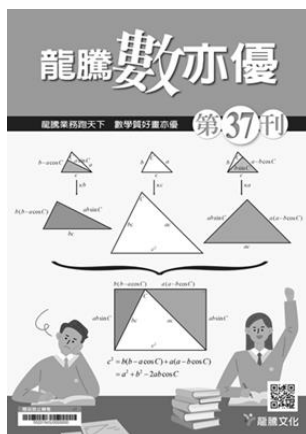
過往總是等到高三才得以說分明的三次函數，新課綱則讓高一同學在多項式單元中就先窺得一二。如何將這個主題呈現給尚在適應高中數學的學子們？吳孝仁老師透過〈想像中的三次函數教學－關於對稱中心與圖形平移〉，分享了一些教學上的點子，一起來看看！

李維昌老師這次帶來的〈利用遞迴關係式求連續正整數奇次方和的公式解〉依舊精彩絕倫，跟著李老師的剖析，來見識美妙的數學世界吧！

神秘的古埃及人眼中的數學是什麼模樣？他們所使用的基本單位「么分數」究竟是什麼？翻開動手玩數學，隨著許教授的腳步一起來解密！

## ※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的内容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 [yifei.lin@lungteng.com.tw](mailto:yifei.lin@lungteng.com.tw)。



發行人：李枝昌

編輯顧問：許志農

總編輯：陳慧芬

執行編輯：林一妃

美術編輯：羅晨心

發行所：龍騰文化事業股份有限公司

地址：248新北市五股區五工六路30號

電話：(02) 2299-9063

傳真：(02) 2298-9755

創刊日：2006/11/30

出刊日：2018/11/1

網址：<http://www.lungteng.com.tw>

# 龍騰數亦優

2018. 11 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

許志農 臺灣師大數學系

3

》》 許教授的數學趣題

張志鵬 光復高中數學科教師

17

》》 從「尋找犯罪熱區」淺談數學建模

吳孝仁 政大附中數學科教師

22

》》 想像中的三次函數教學－關於對稱中心與圖形平移

李維昌 宜蘭高中退休教師

29

》》 利用遞迴關係式求連續正整數奇次方和的公式解

許志農 臺灣師大數學系

39

》》 動手玩數學專欄

》》 動手玩數學《第 36 期》破解祕笈

# 許教授的數學趣題

許志農／臺灣師大數學系

「別強迫孩子學習，以娛樂的方式指引他們，讓他們的天賦得以被發掘。」

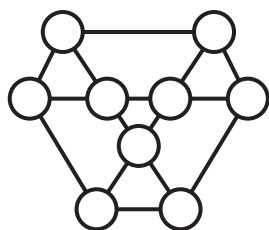
——柏拉圖《理想國》

（解答請見 P.12）

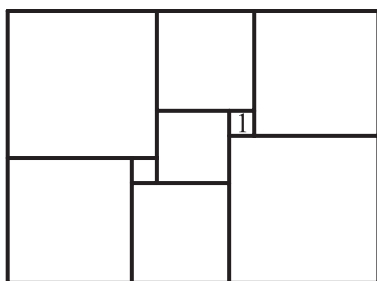
1. 愛因斯坦曾經給一家雜誌社設計過一道填數字的趣味題：將

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

九個數字填入圖中的九個圓圈，使得每個大小三角形上的三個圓圈內的數字和都相等。



2. 將矩形分割成九個正方形，而正中央寫 1 的小正方形之邊長恰為 1。試求其餘八個正方形的邊長。



3. （生命遊戲—無患無疾，毋寧逍遙）

生命遊戲是 1970 年由英國劍橋大學的數學系教授約翰·康威所提出，由於康威對數學與生物有著極大的興趣，因此設計出這項融合這兩門學科的遊戲。該遊戲最初於 1970 年 10 月在《科學美國人》雜誌上馬丁·葛登能的「數學遊戲」專欄出現，才使得它成為一項知名的遊戲。

把平面分割成很多方格子，每一格子代表一個細胞，每一個細胞的周圍恰有八個鄰居細胞。細胞只有「活」或「死」兩種狀態，活細胞在方格內塗黑色；死細胞則不塗色。

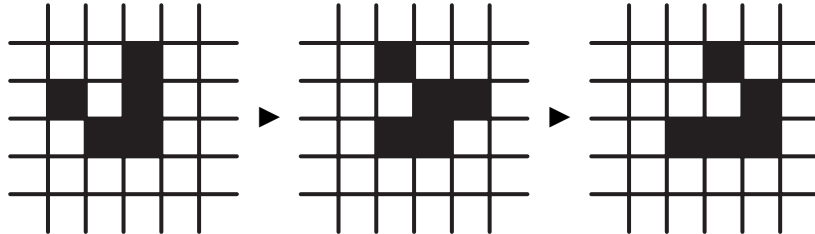
生命遊戲的規則如下：

- 當一活細胞的八鄰居細胞中，活細胞數為 0,1,4,5,6,7,8 個時，該細胞在下一輪會變成死細胞。（死亡）
- 當一活細胞的八鄰居細胞中，活細胞數為 2 或 3 個時，該細胞在下一輪仍會是活細胞。（存活）

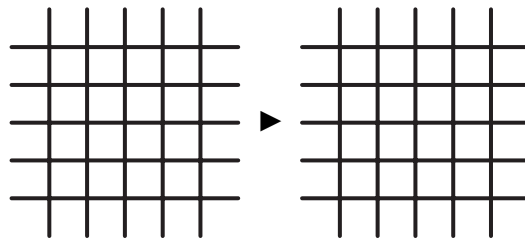


C. 當一死細胞的八鄰居細胞中，活細胞數恰為 3 個時，該細胞在下一輪會變成活細胞，否則仍然是死細胞。（繁殖）

在下圖的左圖中，黑方格代表「活細胞」，而白方格為「死細胞」，這種初始狀態的生命遊戲有個專有名稱，叫「滑翔翼」。在遵照生命遊戲的規則後，我們可以畫出前兩輪的細胞分布圖，下圖的中、右兩張圖：

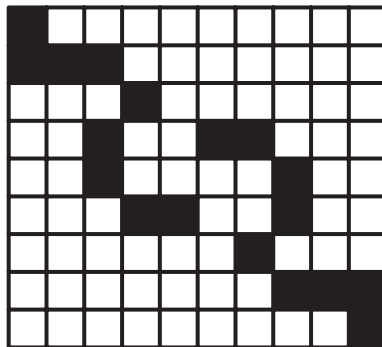


前兩輪仍然保持著五個活細胞，那第三輪及第四輪的分布圖又會如何呢？就請讀者畫在底下的方格內吧！

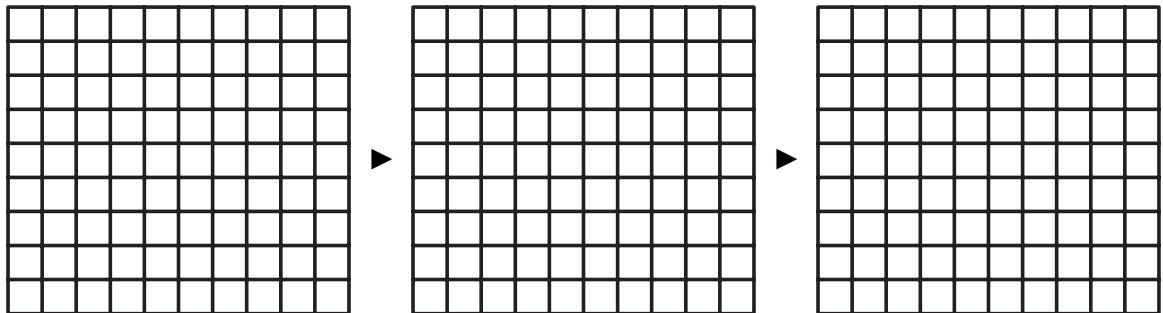


畫好之後，有發現什麼嗎？

接下來，討論一種叫「法式熱吻」的生命遊戲，同樣用黑方格代表「活細胞」，而白方格為「死細胞」，它的初始狀態如下圖所示：



請在下面的三張方格紙上依序完成該生命遊戲的前三輪細胞分布圖：



註：康威在挑選這些基本規則的時候花了很多的力氣，還進行了很長時間的實驗。他的目的是讓整個群體的行爲變得無法預測。紀錄片《史蒂芬·霍金之大設計》曾經這樣介紹

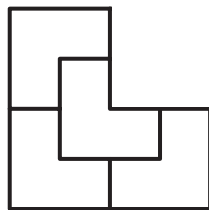
它：「像生命遊戲這樣規則簡單的東西能夠創造出高度複雜的特徵，智慧甚至可能從中誕生。這個遊戲需要數百萬的格子，但是這沒什麼奇怪的，我們的腦中就有數千億的細胞。」

康威認為自己的一生都是在遊戲中度過的，而他鍾愛的遊戲也給了他最誠摯的回饋。對於遊戲和消遣，他給後生們提出了這樣一則忠告：

「無患無疚，毋寧逍遙。」

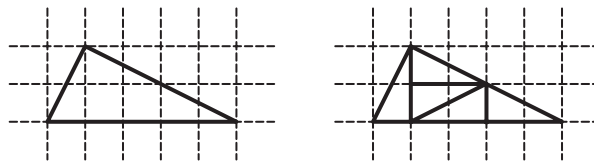
#### 4. （自我相似的分形——縱經滄海，依然故我）

「自我相似多邊形」是指一個多邊形可以分割成若干個（至少兩個）同樣大小的小多邊形，而且每個都和分割前的形狀相似（翻面後相似也算）。最典型的例子就是底下這個缺一角的「L」圖形，這個六邊形可以再分割成四個跟原形狀相似的小六邊形：

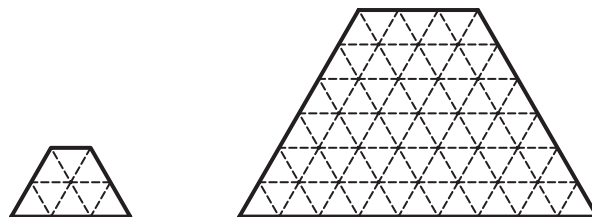


事實上，我們可以依樣畫葫蘆，把每個小六邊形再進一步分割成四個更小的六邊形，……，無窮盡的分割下去。你能想像它會是一個怎樣的圖形嗎？幻想一下吧！

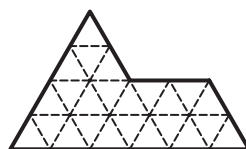
讓我們觀察下圖左的這個康威三角形，事實上，它是一個直角三角形，而且也是個自我相似的三角形，下圖右就是它的五塊自我相似切割。



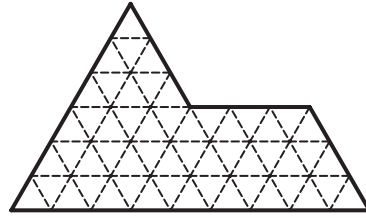
特殊的梯形也可以自我相似喔！下圖中的左右兩個梯形，他們的形狀是一樣的，試試看，能夠把大梯形分割成九個小梯形嗎？



下圖是一種叫史芬克斯五邊形的圖形，為了方便瞭解它的精確結構，我們額外用虛線把它的內部分割成 24 個正三角形。史芬克斯五邊形看起來有點像埃及金字塔的獅身人面像。問題來了，你能透過虛線，把史芬克斯五邊形分割成四個一模一樣的小史芬克斯五邊形嗎？



會了對史芬克斯五邊形做四塊「自我相似」的幾何分割後，讓我們來點更刺激的吧！當史芬克斯五邊形內部的虛線分割密一點時，如下圖，分割成 54 個正三角形。同樣地，你能透過虛線，把史芬克斯五邊形分割成九塊一模一樣的小史芬克斯五邊形嗎？

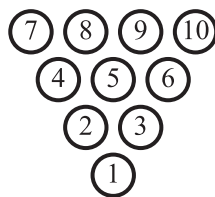


- 一位富翁家的地下室有兩條保齡球道，在其中一條球道，十個球瓶都是白色的；而另一個球道則有十個灰色球瓶。



這位富翁有點數學頭腦，有一天在他打保齡球的時候，忽然想到，能不能把兩組球瓶混合，然後取其中十個球瓶排出打球用的三角形。但是在這個三角形裡，任何一個小的等邊三角形，頂點不會都是同色的球瓶？

如果這是可能的，請在下圖中畫出它的排列方式（著色即可），否則就說明它是不可能的原因。



- 宇富與茗茹今天晚上對打了九局桌球，他們約定好：局與局間輪流先發球，且每一局都分出勝負。最後，茗茹以六比三擊敗宇富，而且還知道有五局比賽是先發球的輸。

請問：究竟誰在第一局先發球？

- 有個人想在一塊很大的正三角形土地上蓋棟房子，再從房子向三條邊修三條直路，而且路要和邊界垂直。



他想把三條路的總長度縮到最短，以節省經費，請問房子要蓋在哪裡才對？

8. 史密斯小姐香菸盒內有最後 9 根香菸，抽完之後，她就要戒菸了。不過她可以利用三個菸蒂裡的剩餘菸草，再捲成一根新的菸。



若她一直重複這項技巧，在開始戒菸之前，她還有多少根菸可以抽？

9. （影響泊松一生的數學趣題）據說泊松（S. D. Poisson）在青年時代研究過一個有趣的數學遊戲：某人有 12 品脫啤酒一瓶（品脫是英容量單位，1 品脫 = 0.568 升），想從中倒出 6 品脫。但是他沒有 6 品脫的容器，只有一個 8 品脫的容器和一個 5 品脫的容器。

怎樣的倒法才能使 8 品脫的容器中恰好裝好了 6 品脫啤酒？

據說，一次偶然的機會，泊松到酒館打酒，恰巧碰到這道分酒趣題，泊松一共給了兩種分酒方法，在解這一趣題的過程中，泊松被數學所蘊涵的無窮奧妙所折服，下決心獻身於數學事業。

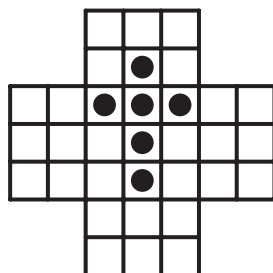
10. （歐拉問題）兩位農婦一共帶了 100 個雞蛋去市場上出售，兩人的雞蛋數目不一樣，卻賣得一樣多的錢。

第一位農婦對第二位農婦說：「如果我有妳那麼多的雞蛋，我就賣得 15 枚銅幣。」第二位農婦回答說：「如果我有妳那麼多的雞蛋，我就只能賣得  $6\frac{2}{3}$  枚銅幣。」

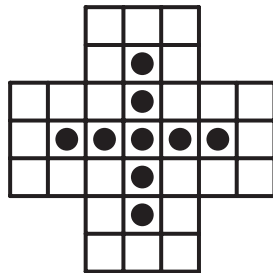
問：兩位農婦各帶了多少個雞蛋？

11. （孔明棋或單人跳棋）孔明棋的玩法是這樣的：首先，在棋盤上擺放若干顆棋子。然後，讓棋子跳到它相鄰棋子旁邊的空位上，而這顆被跳過的棋子就拿掉，但只能上下跳或左右跳，不能斜著跳。遊戲中的每一步棋都要用跳的。如果跳到後來，沒有一顆棋子可以跳，遊戲就結束。一般都會要求結束時，棋盤上只剩一顆棋子，而且這棋子最後能跳至棋盤的中央最完滿。

當擺放的棋子呈現下圖分布時，有一個專門名字，叫拉丁十字。這拉丁十字是可以跳到只剩一顆的，關鍵在於從哪顆棋開始跳，試試看吧！

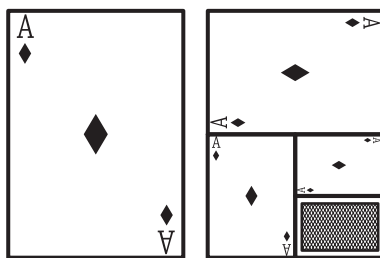


另一個有趣的排列叫希臘十字，它也可以跳到剩一顆喔！



在 1716 年，德國數學家萊布尼茲在一封給朋友的信裡寫道：「最近我常玩一種單人跳棋，覺得很有意思。不過我的玩法和一般人剛好相反。他們是把一顆棋子跳過另一顆，到隔壁的空位，被跳過的棋子就拿掉。因此，棋盤上的棋子越來越少，最後只剩一顆。但我認為建設比破壞更好玩。開始的時候，棋盤上只放一顆棋子，當它跳過一個空位，就在空位上擺一顆棋子。這樣，我們就可以問自己，能不能跳出這樣或那樣的圖形。如果能破壞某個圖形，當然應該也能重建它。你或許會問，這樣做有什麼意義。我只能解釋，是爲了增加自己的創造力。我們若想掌握創造事物的方法，就必須經過合理的學習。」

- 12.（魔術師的撲克牌）玩撲克牌把戲的魔術師，總是在手勢及動作的掩護下，讓撲克牌消失，或變成只有原來的一半大。這魔術用的撲克牌是特製的，它包含多種不同大小的方塊 A，如下圖所示：

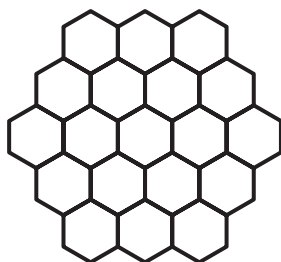


爲了迷惑觀眾的視覺，這不同大小的方塊 A 的長、寬比要一樣，同時爲了好隱藏，大一號的方塊 A 總是能分割成兩張小一號的方塊 A。

問：這種魔術用撲克牌的長、寬比是多少呢？

這種可以分割成兩張自我相似的長方形，還有一項常見的用途，就是印刷業的紙張大小。爲了使報章、雜誌、書籍與卡片等的尺寸標準化，紙張有對開、三開、四開、……等各種大小。這些長方形紙張的形狀都相同，跟撲克牌一樣，三開的紙張可以分割成兩張四開大小的紙張。

13. 許多趣味數學的書籍都會談論幻方，三不五時提到一個神奇的六角幻方，準確的說，是個蜂巢式構造，共有 19 格，如下圖所示：

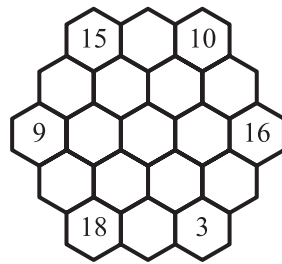


在六角幻方圖上，共有三層，最內層只有一個六邊形，是整個幻方的中央，環繞中央的是第二層，共有 6 個六邊形稱為中環，最外層的 12 個六邊形叫做外環。

把從 1 到 19 這 19 個正整數分別填到 19 個小正六邊形內，使位於同一直線上互相連接的小正六邊形內各數之和都相等（位於同一直線上互相連接的小正六邊形可能是三個、四個或五個）。

阿達莫斯（C. W. Adams）經過 47 年的奮鬥，終於在 1962 年完成六角幻方圖，將 19 個數字填入恰到好處的位置上。後來證實，阿達莫斯發現的六角幻方是唯一的一個。

下圖是阿達莫斯所填六角幻方外圍的數字，你是否可以完成內層與中心的數字呢？



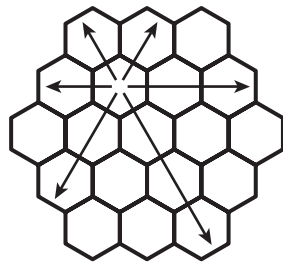
- 14.（找出圓心）想在圓盤的中心點釘上、掛在牆上。若是釘子不在正中心的話，看起來會不美觀，所以想盡可能地找到準確的中心位置，而工具只有一把木匠用的，彎成直角的金屬尺。

那麼，怎麼做才好呢？

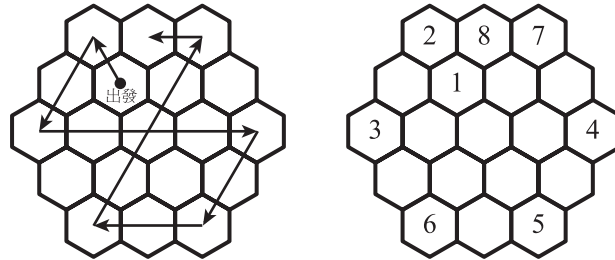


- 15.（細胞遷徙繁殖圖）下圖是由 19 個正六邊形組合而成的繁殖圖，分成中央、中層與外圍，最內層的中央只有一個正六邊形，環繞中央的是中層，有六個正六邊形，而最外層是 12 個正六邊形。

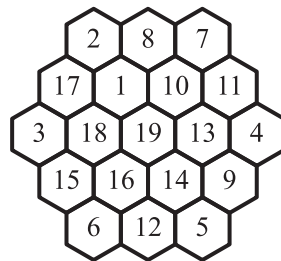
繁殖圖的每一格都可以向隔壁格子直線移動，直到碰到外圍或障礙物才會轉向。



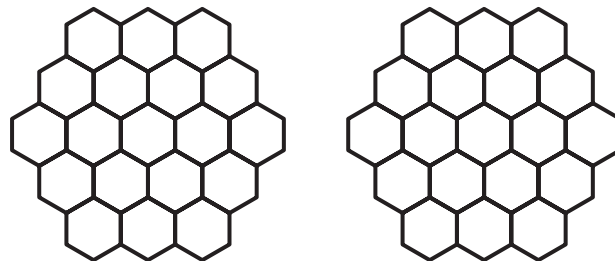
在下圖的左圖中，第 1 代細胞從出發地開始繁殖，繁衍的第 2 代向左上方遷徙，直到碰到外圍或障礙物才會停下來，然後第 3 代細胞依循這規則繁衍，…，爲了方便起見，用數字 1, 2, 3, … 代表繁殖的代數，並標記於下圖的右圖中：



如果細胞後代遷徙路線正確，或許可以把 19 格都佔滿，但也有可能中途卡住，在下圖的左圖中，就是把 19 格都佔滿的一種繁殖路線圖：



請在以下所提供的兩個空白繁殖圖上，幫細胞規劃 19 格都佔滿的細胞繁殖圖，一個從最外圍開始，另一個從正中央開始繁殖：

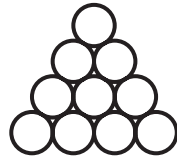


細胞繁殖圖也可以進行甲、乙兩人的對抗遊戲，其規則如下：

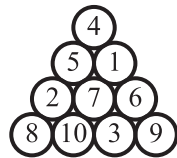
- (1) 在空白的繁殖圖上，甲、乙兩人輪流填入 1, 2, 3, … 的數字。每格只能填一次。
- (2) 填入數字的順序必須滿足細胞繁殖圖的繁衍規則。
- (3) 無法依繁衍規則繼續填入數字者輸。

試著找個對手玩看看吧！並想想看，先玩與後玩，何者可以有必勝的策略？

16. 將十個數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 填入下圖的圓圈內，每個圓圈填入不同的數字：

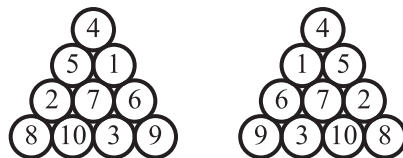


如果要求每個圓圈內的數字必須是底下兩個圓圈內的數字差，例如下圖填法：



那麼一共有多少種不同的填法？

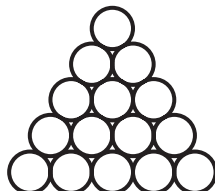
補充：左右對稱的填法（如下圖所示），視為同一種：



來一題較困難的吧！將十五個數字

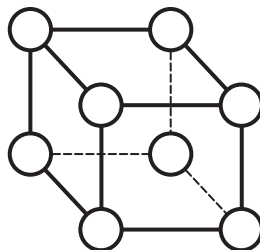
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

填入下圖這個五階的圓圈內，每個圓圈填入不同的數字，並要求每個圓圈內的數字必須是底下兩個圓圈內的數字差：



有一個猜想是說：六階或六階以上的圖形，不會有解？

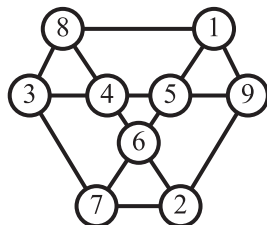
17.（楊輝魔立方體）將 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 八個數字填入立方體的八個圓圈，使得立方體每個面上的四個圓圈內的數字和都相等。



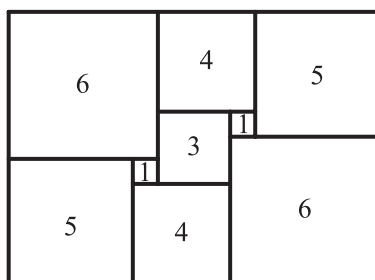


## 解答

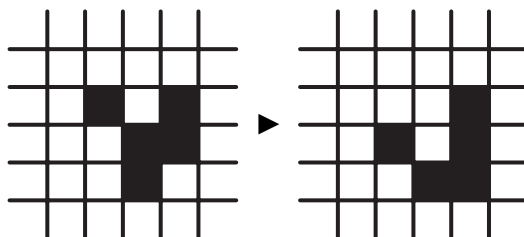
1. 如下圖所示：



2. 如下圖所示：這是唯一的一組解。

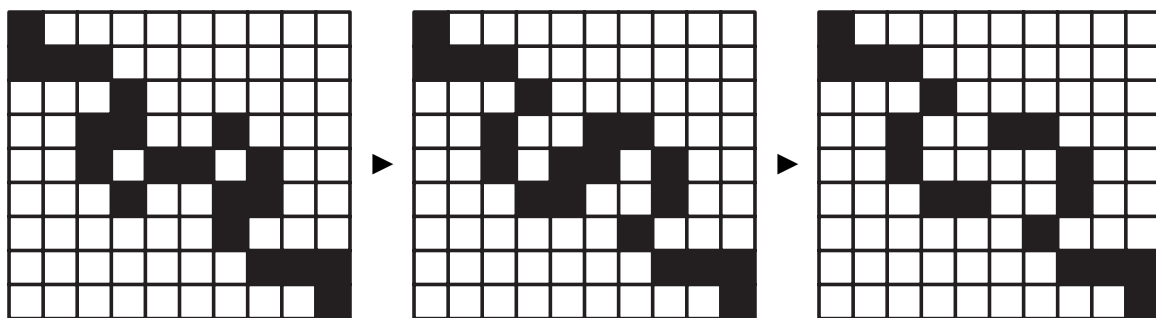


3. 有關「滑翔翼」的第三與第四輪的分布圖為



粗心的讀者會發現，第四輪的分布圖與「滑翔翼」的初始狀態長得一模一樣；但細心的讀者可能會看出一點端倪。它們的位置有了變化，即第四輪的圖是由初始狀態圖往右且向下移動一格而來。它們只是形狀相同，但所在的位置不同。

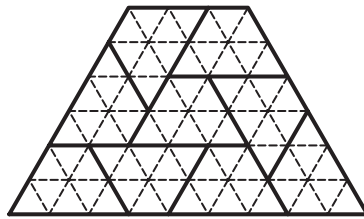
另一種初始狀態的答案如下圖所示：



你是否發現：

- (1) 初始狀態的圖形是以中心點為對稱的圖，照生命遊戲規則，這樣的圖所衍生的每一輪的圖應該也是對稱於中心點的圖。這個發現可以節省判斷時間。
- (2) 第三輪的圖跟初始狀態的圖一模一樣，也就是說，這道生命遊戲是每三個一循環的繁衍下去。

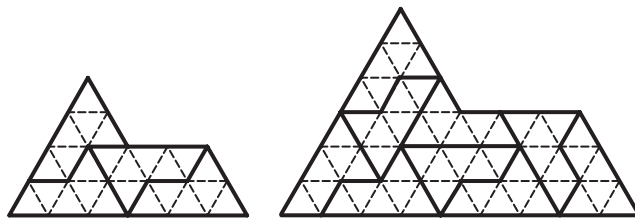
4. 把大梯形分割成九個小梯形的解法如下圖所示：



在史芬克斯五邊形的四塊與九塊「自我相似」分割活動中，不難發現：由六個正三角形所組成的小史芬克斯五邊形，是基本分割單位，如下圖所示：



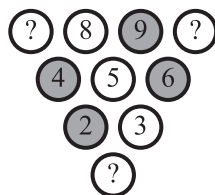
而兩種分割的參考答案，如下圖所示：



5. （反證法）不可能把兩種顏色的球瓶混合，排成十個球瓶的三角形，而沒有同色的球瓶構成等邊三角形。證明的方法有很多，這裡提供一則典型的說明。

假設有一種混色排法，讓「任何一個小的等邊三角形，頂點不會都是同色的球瓶」，且令 5 號球瓶是白色。因為球瓶 3、4、9 構成正三角形，所以這三個球瓶不能同色（即有白色，也有灰色球瓶），不妨假設 3 號球瓶是白色。

因為球瓶 3、5、2 與球瓶 3、5、6 都構成正三角形，且球瓶 3、5 都是白色，所以球瓶 2、6 必須是灰色。又因為球瓶 2、6、8 都構成正三角形，所以球瓶 8 必須是白色。同理也可以推得球瓶 4、9（由球瓶 5、8 是白色知道）必須是灰色。此時，除了球瓶 1、7、10 尚未推得顏色外，其餘的球瓶都知道正確顏色了，把它們標示如下圖：



現在考慮球瓶 10：因為球瓶 6、9 為灰色，所以球瓶 10 為白色，但此與「球瓶 3、8、10 都是白色，又構成正三角形」不合。故滿足題意的混色排法是不存在的。

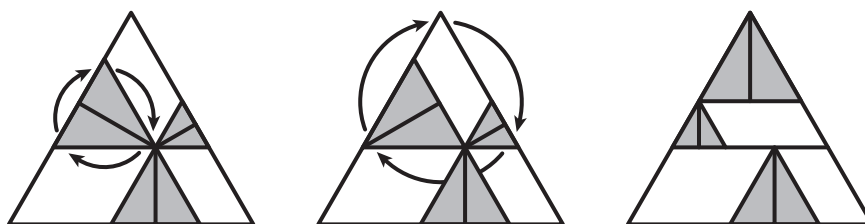
6. 設後玩在先發的四場次中，贏  $m$  場，輸  $4-m$  場，即先玩在後發的四局次中，贏  $4-m$  局，輸  $m$  局。又因為有五局比賽是先發球的輸，所以先發又贏球的只有四局，即先玩在先發的五局次中，只贏  $4-m$  局。綜合得知：先玩者總共贏

$$(4-m) + (4-m) = 2(4-m)$$

局，是個偶數。因為茗茹以六比三擊敗宇富，所以茗茹贏六局，第一局先發球。

7. 蓋在哪裡都行，三條路的總長度等於大的正三角形之高。這是正三角形上的一個定理：「正三角形內任一點至三邊的距離和都等於正三角形的高。」

關於這個定理，讀者可以自行從底下的無字證明的圖中看出端倪嗎？



8. 可抽 13 根，不過最後剩下的那個菸蒂將白白浪費掉。

思慮周到的讀者也許會認為：史密斯小姐不應該這麼暴殄天物。她應該從剩 10 根香菸時，開始重複這項技巧，這樣在抽完第 14 根香菸之後，她就有兩個菸蒂。她可以從任何一個菸灰缸裡借來一個菸蒂，湊成第 15 根菸。抽完這根之後，再把剩下來的菸蒂還回去，所有香菸都充分利用了。

9. 根據下圖的操作，可以在倒六次的操作後，得到 6 品脫啤酒：

| 次數<br>容器 | 初始<br>狀態 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|----------|----------|---|---|---|---|---|---|
| 12       | 12       | 4 | 4 | 9 | 9 | 1 | 1 |
| 8        | 0        | 8 | 3 | 3 | 0 | 8 | 6 |
| 5        | 0        | 0 | 5 | 0 | 3 | 3 | 5 |

10. (歐拉的解法) 假設第二位農婦的雞蛋數目是第一位農婦的  $m$  倍。因為最後兩個人賣的錢一樣多，所以第一位農婦出售雞蛋的價格必須是第二位農婦的  $m$  倍。

如果在出售之前，將兩位農婦所帶的雞蛋互換，那麼第一位農婦的雞蛋數目與出售雞蛋的單價，都將是第二位農婦的  $m$  倍。也就是說，她賣的錢將是第二位農婦的  $m^2$  倍。因此，

$m^2$  就等於 15 除以  $6\frac{2}{3}$ ，即

$$m^2 = \frac{15}{6\frac{2}{3}} = \frac{9}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{3}{2},$$

捨去負值後，得  $m = \frac{3}{2}$ ，即兩人所帶雞蛋數目之比為 2：3。這樣，由雞蛋總數是 100，就

不難算出：兩位農婦各帶了 40 與 60 個雞蛋。

註：想出這種巧妙的解法是很不容易的，這讓一貫謹慎的歐拉也忍不住稱讚自己的解法是「最巧妙的解法」。

11. 爲了講解方便，習慣把孔明棋盤或單人跳棋盤坐標化，把棋盤正中央的方格用數字 44 表示，而其左、右、上、下方格用數字 34、54、45、43 表示，其餘類推。

關於拉丁十字的一種五步跳法爲

45►25，43►45，55►35，25►45，46►44；

而希臘十字的一種六步跳法爲

54►74，34►54，42►44►64，46►44，74►54►34，24►44，

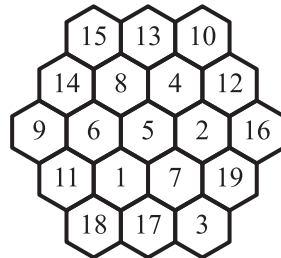
其實它總共跳了八次，有兩步是連跳。

12. 不妨設大撲克牌的寬為 1，而長（或高）為  $h$ ，從圖中可以得到：小一號的撲克牌的寬變成  $h/2$ ，而長（或高）為 1。因為大小撲克牌的長、寬比一樣，所以

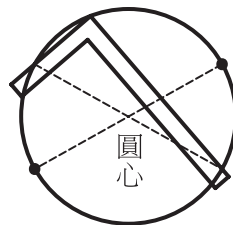
$$\frac{h}{1} = \frac{1}{h/2} \Rightarrow h^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2} ,$$

即魔術用撲克牌的長、寬比為  $\sqrt{2}$ 。

13.



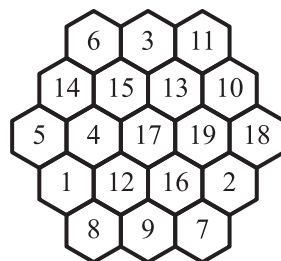
14. 這是幾何定理「圓周上的任一點，和直徑的兩端相連後，形成的角剛好是直角」的應用。



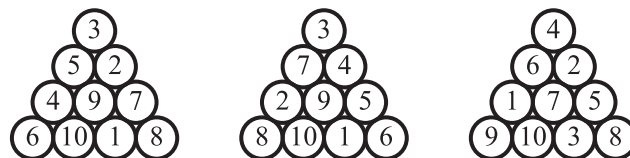
因此，作法是：把金屬尺的直角對在圓周的一點上，找到金屬尺的兩股和圓的接觸點，將這兩個接觸點連成一線段，該線段就會是圓的直徑。按照同樣的方法，再做一次，又得一直徑。這兩條直徑的交點，就是圓的中心點。

〈 77 個好玩得停不下來的數學謎題 〉

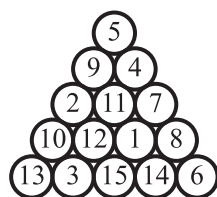
15. 從外圍開始繁殖的一個答案，如下圖所示：



16. 參考答案如下：

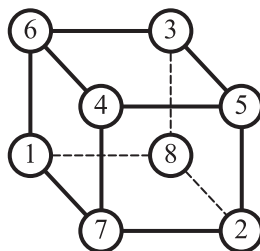


在五階情形，只有一組解，如下圖所示：



這個唯一解是政大附中陳穎希老師所帶數理資優班同學所發現。

17.



# 從「尋找犯罪熱區」淺談數學建模

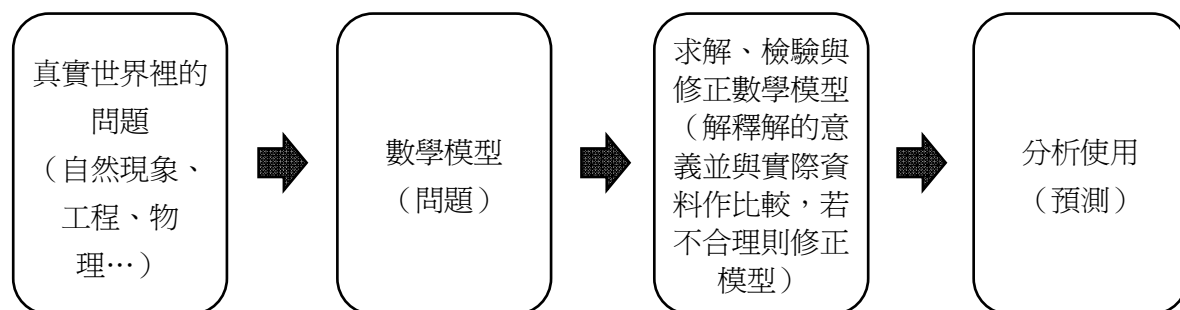
張志鵬／新北市光復高中數學科教師

## 一、緣起》

身為數學老師常常碰到的情況是，老師在講臺上教得口沫橫飛，努力詮釋「數學之美」，學生卻突然蹦出一句「老師，學這個有什麼用？」令人為之氣結，這時候說圓錐曲線在天文學上的應用，還是三角函數在傅立葉級數中的地位，對學生來說都太抽象，因此，筆者常常想有沒有比較貼近生活上的例子可以反駁「數學無用論」。前一陣子剛好看到一部美劇「數字搜查線」，這是一部描述科學家如何用數學幫助 FBI 破解各種懸案的影集，其中有一集談到主角發明了一個數學式子可以尋找出「犯罪熱區」，而這件事在現實世界中確為真人真事。以此為引子，我們可帶領學生領略數學之「大用」。

## 二、由犯罪熱區淺談數學建模》

對一般人而言，學習數學的主要目的是為了解決他們所遇到的一些數學問題，而非成為數學家。因此，如何將所遇到的問題轉換成數學問題－數學建模，就成為一個重要課題。其流程如下：



《蔡天鉞（2010）HPM 通訊第十三卷第十二期第三版》

筆者今年在高一開了一門多元選修課程「生活中的數學」，其中一週的主題為「淺談數學建模」，課堂流程如下：

犯罪學中有一門稱為地理分析（Geographic Profiling）的技術，其中有一條「羅斯姆公式（Rossmo's Formula）」是利用數學公式找尋連續犯案者居住的可能地點。

### Rossmo's Formula

將地圖分割成  $i \times j$  個網格（正方形方格）， $p_{ij}$  代表第  $i$  列、第  $j$  行網格為犯案者居住地的可能性，

$$p_{ij} = k \sum_{n=1}^c \left[ \underbrace{\frac{\varphi_{ij}}{(|X_i - x_n| + |Y_j - y_n|)^f}}_{1^{st} \text{ term}} + \underbrace{\frac{(1 - \varphi_{ij})(B^{g-f})}{(2B - |X_i - x_n| - |Y_j - y_n|)^g}}_{2^{nd} \text{ term}} \right],$$

$$\text{其中 } \varphi_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (|X_i - x_n| + |Y_j - y_n|) > B \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

羅斯姆根據犯罪行為學中的理論：地緣型連續犯案者作案頻率會以居住地點為中心依序遞減，但會有一個緩衝區（Buffer Zone），犯案者會盡量避免在居住地點附近作案，以免容易遭人懷疑，也可以稱為「兔子不吃窩邊草」，公式中的  $B$  即為緩衝區半徑， $(X_i, Y_j)$  代表第  $i$  列、第  $j$  行網格中心點坐標， $(x_n, y_n)$  代表第  $n$  起犯案地點， $\varphi_{ij}$  為特徵函數控制前後兩項的作用，當  $|X_i - x_n| + |Y_j - y_n| > B$ ，即網格中心到第  $n$  起犯案地點距離大於緩衝區半徑時，公式前項（ $1^{st} \text{ term}$ ）起作用；若距離小於緩衝區半徑，則後項（ $2^{nd} \text{ term}$ ）起作用，我們可以觀察到，當  $|X_i - x_n| + |Y_j - y_n| = B$  時，若不考慮  $\varphi_{ij}$ ，前後兩項相等。

### 三、利用軟體 GGB 體驗數學建模

1. 真實世界裡的問題：如何用已知犯案地點找尋連續犯案者的可能居住地？
2. 數學模型：Rossmo's Formula，公式中的前項  $\frac{\varphi_{ij}}{(|X_i - x_n| + |Y_j - y_n|)^f}$ ，意味當超過緩衝區半徑時，作案頻率會以犯案者居住地為中心往外遞減（遞減速度由  $f$  控制），可簡化為  $\frac{1}{|\text{距離}|^f}$ ，若  $f = 2$ ，就代表和距離的平方成反比。  
公式中的後項  $\frac{(1 - \varphi_{ij})(B^{g-f})}{(2B - |X_i - x_n| - |Y_j - y_n|)^g}$ ，意味在緩衝區之內，作案頻率會以犯案者居住地為中心往外遞增（遞增速度由  $f$  和  $g$  控制）。

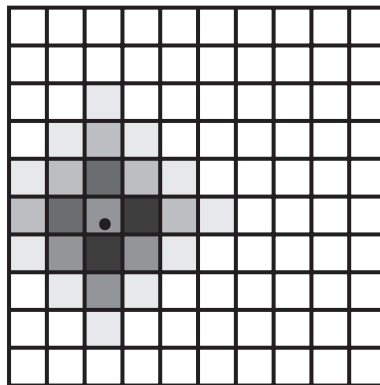


圖 1 犯案者居住地熱區圖：黑點代表犯案地點，網格顏色越深代表該區為犯案者居住地可能性越高

如圖 1，單純以一個犯案地點來分析，反而是與犯案地點相鄰的四格可能性比中間高，就是因為加進了「緩衝區」的因素。

3. 求解、檢驗與修正數學模型：公式中的  $k, f, g, B$  則必須從過往蒐集的已知經驗（其他連續犯案者案例），找出最適合係數。因為這個牽扯到犯罪案件的真實資料，是我們在教學上比較無法取得的資料，所以會先請同學用假設值代入，但對學生體驗數學建模的經驗影響不大。

4. 分析使用：

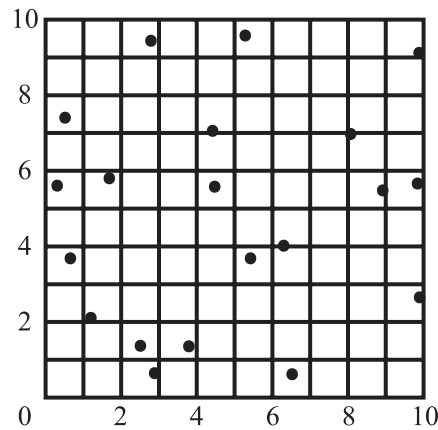


圖 2

在  $10 \times 10$  的網格上隨機產生  $c$  個點（圖 2 中  $c=20$ ），假設某一案例連續犯罪地點為此 20 個點，將各網格中心點坐標代入  $p_{ij}$  公式，例如：第十列第一行中心點坐標為  $(0.5, 0.5)$ ，令  $k=1$ ， $B=1$ ， $f=2$ ， $g=2$ ，

$$p_{10,1} = 1 \cdot \sum_{n=1}^{20} \left( \frac{\varphi_{ij}}{(|0.5 - x_n| + |0.5 - y_n|)^2} + \frac{(1 - \varphi_{ij})(1^{2-2})}{(2 \cdot 1 - |0.5 - x_n| - |0.5 - y_n|)^2} \right) = 0.78$$

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.7  | 0.99 | 0.88 | 1.29 | 1.68 | 0.86 | 1.12 | 0.72 | 0.8  | 1.01 |
| 1.27 | 0.91 | 1.24 | 1.08 | 1.32 | 1.31 | 0.79 | 0.78 | 0.93 | 1.45 |
| 1.01 | 1.77 | 1.17 | 1.31 | 1.34 | 1.32 | 0.98 | 1.4  | 1.52 | 1.14 |
| 2.58 | 1.94 | 1.39 | 1.45 | 2.04 | 1.47 | 1.15 | 1.63 | 1.87 | 1.82 |
| 1.63 | 1.84 | 1.95 | 1.84 | 1.49 | 2.07 | 1.48 | 1.48 | 1.64 | 1.45 |
| 2.26 | 1.65 | 1.21 | 1.19 | 1.97 | 2.09 | 1.49 | 1.24 | 1.32 | 1.49 |
| 1.27 | 2.09 | 1.34 | 1.25 | 1.8  | 1.5  | 1.86 | 1.16 | 0.99 | 1.36 |
| 1.81 | 1.53 | 1.94 | 1.55 | 1.31 | 1.56 | 1.32 | 0.88 | 0.98 | 0.94 |
| 1.33 | 2.23 | 2.04 | 2.34 | 1.68 | 1.33 | 1.61 | 0.86 | 0.67 | 0.82 |
| 0.78 | 1.33 | 2.02 | 2.02 | 1.41 | 1.41 | 0.83 | 1.29 | 0.61 | 0.52 |

表 1 各網格的犯案者居住地的可能性函數值矩陣  $M_1 = [p_{ij}]_{10 \times 10}$

觀察表 1 可發現最大值出現在  $p_{41} = 2.58$ ，最小值出現在  $p_{10,10} = 0.52$ 。



|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.27 | 0.38 | 0.34 | 0.5  | 0.65 | 0.33 | 0.43 | 0.28 | 0.31 | 0.39 |
| 0.49 | 0.35 | 0.48 | 0.42 | 0.51 | 0.51 | 0.31 | 0.3  | 0.36 | 0.56 |
| 0.39 | 0.69 | 0.45 | 0.51 | 0.52 | 0.51 | 0.38 | 0.54 | 0.59 | 0.44 |
| 1    | 0.75 | 0.54 | 0.56 | 0.79 | 0.57 | 0.45 | 0.63 | 0.72 | 0.7  |
| 0.63 | 0.71 | 0.75 | 0.71 | 0.58 | 0.8  | 0.57 | 0.57 | 0.63 | 0.56 |
| 0.87 | 0.64 | 0.47 | 0.46 | 0.76 | 0.81 | 0.58 | 0.48 | 0.51 | 0.58 |
| 0.49 | 0.81 | 0.52 | 0.49 | 0.7  | 0.58 | 0.72 | 0.45 | 0.38 | 0.53 |
| 0.7  | 0.59 | 0.75 | 0.6  | 0.51 | 0.6  | 0.51 | 0.34 | 0.38 | 0.36 |
| 0.51 | 0.86 | 0.79 | 0.9  | 0.65 | 0.52 | 0.62 | 0.33 | 0.26 | 0.32 |
| 0.3  | 0.51 | 0.78 | 0.78 | 0.55 | 0.55 | 0.32 | 0.5  | 0.24 | 0.2  |

表 2  $M_2 = \frac{1}{2.58} M_1$

爲了方便觀察，我們令  $k = \frac{1}{\text{Max}(p_{ij})}$  代入原式，即  $M_2 = \frac{1}{2.58} M_1$ 。

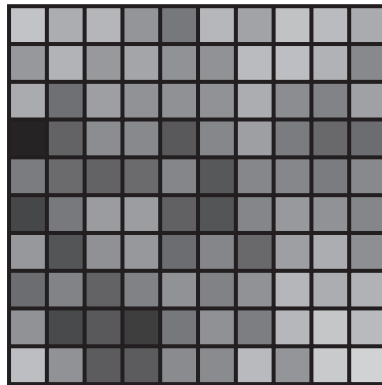


圖 3 犯案者居住地熱區圖

依據  $M_2$  的數值將各網格上色，例如：1 爲濃度 100%，0.2 則爲濃度 20%，可得嫌犯居住地熱區圖（圖 3），由此可推測嫌犯居住地可能性最高的前三名地區依序爲第 4 列第 1 行，第 9 列第 4 行，第 9 列第 2 行，可列爲警方重點搜查區。

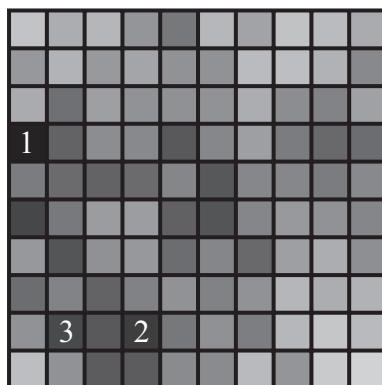


圖 4 犯案者居住地熱區圖

#### 四、結語》

「生活中的數學」一般來說無法求得完美的標準答案，因為外界的干擾元素導致有太多的不確定性，但正因為如此，如果我們能將其轉化為數學模型、求得可能結果的近似值，就更能顯現出數學的「威力」，破除所謂的「數學無用論」。

讀者如果有興趣的話，也可以掃描右邊的 QR code 自行嘗試看看。

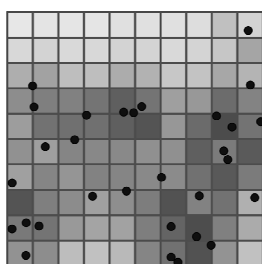


圖 5  $b=1, f=2, g=2$

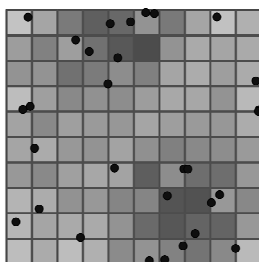


圖 6  $b=1.5, f=2, g=3$

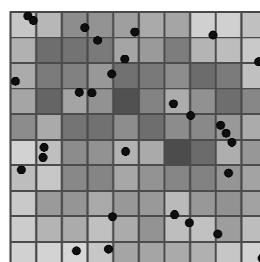


圖 7  $b=2, f=3, g=4$

#### 五、參考資料》

蔡天鉞（2010），淺談數學與數學建模，HPM 通訊，第十三卷第十二期。

Keith Devlin、Gary Lorden（2016），案發現場（蘇俊鴻、蘇惠玉等…譯），新北市，八旗文化出版社。

Rossmo's Formula，2018 年 5 月 8 日取自維基百科

[https://en.wikipedia.org/wiki/Rossmo%27s\\_formula](https://en.wikipedia.org/wiki/Rossmo%27s_formula)

# 想像中的三次函數教學－關於對稱中心與圖形平移

吳孝仁／政大附中數學科教師

新課綱在多項式單元裡加入了三次函數的行為與圖形的特徵。以往教材裡在高三才能交代清楚的東西挪到高一來談，除了借助圖形式計算機或是 GGB 軟體繪圖來輔助認識三次函數的圖形外，說理的部分顯然要迴避使用微積分工具，尤其對象是剛升高一的同學。我們必須承認剛升高一的同學對於高中數學還在摸索適應的階段，因此如何以適合學生、適當的脈絡來呈現這個主題，相信是一個挑戰。在實務經驗之前相信各種想法會接連噴發出來，於是乎我們也有一些關於三次函數圖形的對稱中心與圖形平移的教學點子，希望以這篇文章與各方先進交流分享。

## 一、學習完二次函數之後》

將二次函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  進行配方寫成  $f(x) = a(x-h)^2 + k$  後，我們總結幾件重要的事情如下：

1.  $f(x) = a(x-h)^2 + k$  的圖形是一個拋物線，頂點  $V(h, k)$ ，對稱軸  $x = h$ ，開口方向與大小由  $a$  決定。
2.  $f(x) = a(x-h)^2 + k$  的圖形與二次單項函數  $g(x) = ax^2$  的圖形長得一模一樣，只是位置不同。 $g(x) = ax^2$  的圖形可以經由平移與  $f(x) = a(x-h)^2 + k$  的圖形重合，至於怎麼移，觀察頂點如何改變即可。如下圖 1：

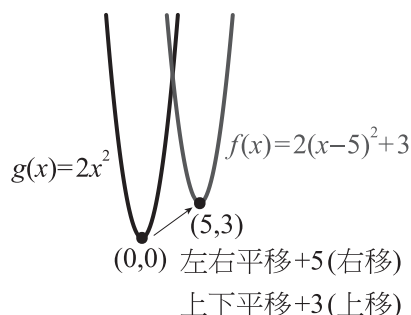


圖 1

因為點  $(0,0)$  向右平移 5 單位，向上平移 3 單位後會與點  $(5,3)$  重合，所以  $g(x) = 2x^2$  的函數圖形向右平移 5 單位，向上平移 3 單位後即為  $f(x) = 2(x-5)^2 + 3$  的函數圖形。從頂點的平移來理解函數圖形的平移是容易的。當然，代數上來看，函數  $f(x)$  與  $g(x)$  的關係很自然的是  $g(x-5) + 3 = f(x)$ 。

3. 拋物線是一個線對稱圖形，如上圖， $f(x) = 2(x-5)^2 + 3$  圖形的對稱軸為  $x = 5$ 。

### 練習 1

(1)  $y = f(x) = -x^2 - 2x + 1$  的開口方向為何？頂點坐標為何？對稱軸方程式為何？

(2) 如何將  $y = -x^2$  的圖形平移至與  $y = -x^2 - 2x + 1$  的圖形重合？

## 二、線對稱圖形與點對稱圖形》

所謂線對稱圖形意思是圖形有一條對稱軸，對稱軸兩邊的圖形沿對稱軸對摺後圖形重合，如下圖 2。注意，如果  $A$  點對於對稱軸  $L$  的對稱點是  $A'$ ，那麼  $L$  其實是  $\overline{AA'}$  的中垂線。

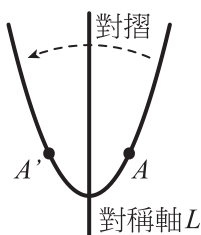


圖 2

另外還有一種對稱叫做點對稱。一個圖形是點對稱圖形的意思是有一個對稱中心點  $S$ ，把原圖形以  $S$  為中心旋轉  $180^\circ$  後兩圖形重合，如下圖 3。如果  $P$  點對於對稱中心點  $S$  的對稱點是  $P'$ ，那麼  $S$  其實是  $P$ 、 $P'$  的中點。

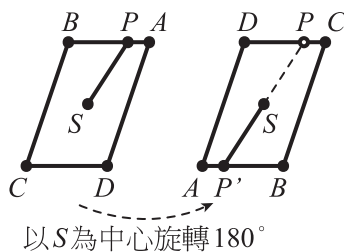


圖 3

### 練習 2.1

下面是三次函數可能的幾種圖形（我們由左到右給個名字分別叫作「大波浪」、「大平台」、「斜斜逆」），請問是否為點對稱圖形？如果是，請標示出對稱中心點。

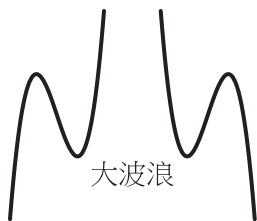


圖 4

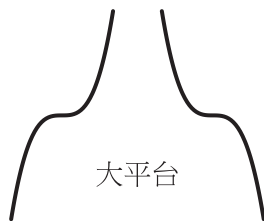


圖 5



圖 6

事實上，三次函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的圖形剛好有一個對稱中心點  $S(h, f(h))$ ，這件事情總是對的，我們從圖形上可以直接觀察出來。

下圖 7 是一個三次函數  $f(x)$ ，圖形上有一個對稱中心點  $S(h, f(h))$ 。

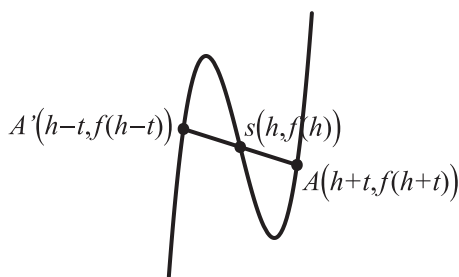


圖 7

考慮圖形上任意異於  $S$  的點  $A(h+t, f(h+t))$ ， $t \neq 0$ ，這時候  $A(h+t, f(h+t))$  對於  $S(h, f(h))$  的對稱點  $A'$  在函數  $f(x)$  的圖形上，因此  $S$  是  $A$ ， $A'$  的中點。假設  $A'$  坐標是  $A'(p, f(p))$ ，由中點公式我們可以知道：

$$\frac{p+h+t}{2} = h \Rightarrow p = h-t。$$

因此  $A'$  坐標即為  $A'(h-t, f(h-t))$ ，並且我們知道  $S(h, f(h))$  是  $A(h+t, f(h+t))$ ， $A'(h-t, f(h-t))$  中點，意即

$$t \neq 0，f(h+t) + f(h-t) = 2f(h)。$$

我們將目前的結論整理如下：

1. 三次函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的圖形剛好有一個對稱中心點。
2. 承上，對稱中心點為  $S(h, f(h))$ ，則  $t \neq 0$ ， $f(h+t) + f(h-t) = 2f(h)$ 。(＃)

(＃)是一個以三次函數的點對稱性來刻化的等式，我們可以利用這個等式來解出三次函數圖形的對稱中心點。

例如：三次函數  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ ，假設其對稱中心點為  $S(h, f(h))$ 。則  $t \neq 0$ ， $f(h+t) + f(h-t) = 2f(h)$ 。即

$$t \neq 0，((h+t)^3 - 3(h+t)^2 + 4(h+t) - 5) + ((h-t)^3 - 3(h-t)^2 + 4(h-t) - 5) = 2(h^3 - 3h^2 + 4h - 5)$$

從而

$$t \neq 0，6ht^2 - 6t^2 = 0。$$

因為  $t \neq 0$ ，故得  $6h - 6 = 0$ ，即  $h = 1$ 。因此  $f(x)$  的對稱中心點其實是  $S(1, f(1))$ ，即  $S(1, -3)$ ，如下圖 8。

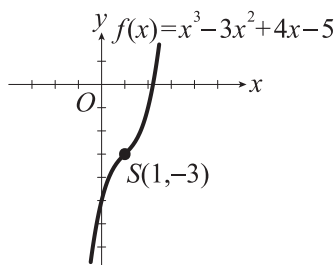


圖 8

### 練習 2.2

求三次函數  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$  圖形的對稱中心點。

接下來我們要利用(♯)來討論對稱中心點與三次函數的關係。

## 三、三次函數的對稱中心點為 $(0, 0)$ 》

如果一個三次函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  對稱中心點是  $S(0, 0)$ 。首先  $f(0) = 0$  意即係數  $d = 0$ 。再者，由(♯)我們知道

$$t \neq 0, \quad f(t) + f(-t) = 2f(0)。$$

把這個關係代入  $f(x)$  後，得到

$$t \neq 0, \quad (at^3 + bt^2 + ct + d) + (-at^3 + bt^2 - ct + d) = 2d。$$

從而

$$t \neq 0, \quad 2bt^2 = 0。$$

因為  $t \neq 0$ ，故得係數  $b = 0$ 。

因此三次函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  其實是一定形如  $f(x) = ax^3 + cx$ 。我們總結如下：

三次函數  $f(x)$  的對稱中心點為  $(0, 0)$ ，則  $f(x) = ax^3 + cx$ 。

### 練習 3

仿照上面的方式說明三次函數  $f(x)$  的對稱中心點為  $(0, k)$ ，則

$$f(x) = ax^3 + cx + k。$$

#### 四、三次函數的對稱中心點為 $(h, k)$ 》

如果一個三次函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的對稱中心點是  $S(h, k)$ 。首先  $f(h) = k$  意即  $ah^3 + bh^2 + ch + d = k$ 。再者，由(♯)我們知道

$$t \neq 0, \quad f(h+t) + f(h-t) = 2f(h)。$$

把這個關係代入  $f(x)$  後，得到

$$t \neq 0, \quad (a(h+t)^3 + b(h+t)^2 + c(h+t) + d) + (a(h-t)^3 + b(h-t)^2 + c(h-t) + d) = 2(ah^3 + bh^2 + ch + d)$$

從而

$$t \neq 0, \quad 6ah^2 + 2bt^2 = 0。$$

因為  $t \neq 0$ ，故得  $3ah + b = 0$ ，即  $h = -\frac{b}{3a}$ 。

目前我們知道  $f(x)$  的對稱中心點其實是  $S(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ 。但是爲了建立

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  與對稱中心點  $S(h, k)$  的關係，我們將  $b = -3ah$  與  $d = k - ah^3 - bh^2 - ch$  替換掉，從而

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= ax^3 - 3ahx^2 + cx + (k - ah^3 - bh^2 - ch) \\ &= ax^3 - 3ahx^2 + cx + (k - ah^3 + 3ah^3 - ch) \\ &= a(x^3 - h^3) - 3ah(x^2 - h^2) + c(x - h) + k \\ &= a[(x - h)^3 + 3hx(x - h)] - 3ah(x + h)(x - h) + c(x - h) + k \\ &= a(x - h)^3 + [3ahx - 3ah(x + h)](x - h) + c(x - h) + k \\ &= a(x - h)^3 + [-3ah^2 + c](x - h) + k \\ &= a(x - h)^3 + \hat{c}(x - h) + k \end{aligned} \quad (##)$$

其中  $\hat{c} = -3ah^2 + c$ 。

這告訴我們三次函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  其實具有  $f(x) = a(x - h)^3 + \hat{c}(x - h) + k$  的形式。特

別這是  $x - h$  的多項式，領導係數與原係數相同，沒有  $(x - h)^2$  項。我們總結如下：

三次函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的對稱中心點爲  $(h, k)$ ，則

$$f(x) = a(x - h)^3 + \hat{c}(x - h) + k。 \quad (##)$$

(##)其實也告訴我們，三次函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  進行「配方」寫成

$f(x) = a(x - h)^3 + \hat{c}(x - h) + k$  後，可以知道對稱中心點就是  $(h, k)$ 。

以  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)^3 + (x - 1) - 3$  爲例，於是對稱中心點爲  $(1, -3)$ 。這與第二節利用(♯)計算對稱中心點的結果相符。

#### 練習 4

已知三次函數  $f(x)$  的領導係數為  $-2$ ，對稱中心點為  $(2, -1)$  且  $f(x)$  的圖形通過原點  $(0, 0)$ ，求  $f(x)$ 。

### 五、三次函數圖形的平移》

考慮這兩個三次函數  $h(x) = x^3 - 2x$ 、 $g(x) = (x-1)^3 - 2(x-1)$ 、 $f(x) = (x-1)^3 - 2(x-1) - 3$ 。首先， $h(x)$  對稱中心點為  $A(0, 0)$ ， $g(x)$  的對稱中心點為  $B(1, 0)$ ，而  $f(x)$  的對稱中心點為  $C(1, -3)$ 。

我們描繪三個函數的圖形，下表是各函數在對稱中心點的附近幾個點：

| $h(x) = x^3 - 2x$ | $g(x) = (x-1)^3 - 2(x-1)$ | $f(x) = (x-1)^3 - 2(x-1) - 3$ |
|-------------------|---------------------------|-------------------------------|
| $M_0(3, 21)$      | $M_1(4, 21)$              | $M_2(4, 18)$                  |
| $L_0(2, 4)$       | $L_1(3, 4)$               | $L_2(3, 1)$                   |
| $K_0(1, -1)$      | $K_1(2, -1)$              | $K_2(2, -4)$                  |
| 對稱中心點 $A(0, 0)$   | 對稱中心點 $B(1, 0)$           | 對稱中心點 $C(1, -3)$              |
| $J_0(-1, 1)$      | $J_1(0, 1)$               | $J_2(0, -2)$                  |
| $I_0(-2, -4)$     | $I_1(-1, -4)$             | $I_2(-1, -7)$                 |
| $H_0(-3, -21)$    | $H_1(-2, -21)$            | $H_2(-2, -24)$                |

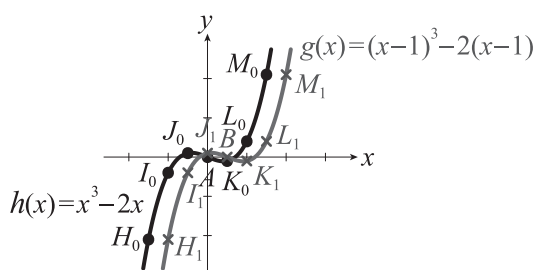


圖 9

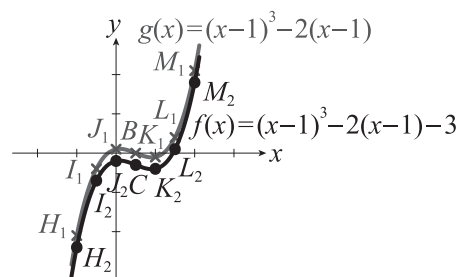


圖 10

觀察圖形後發現， $h(x) = x^3 - 2x$ 、 $g(x) = (x-1)^3 - 2(x-1)$ 、 $f(x) = (x-1)^3 - 2(x-1) - 3$  的圖形長得一模一樣，只是位置不同。其中， $h(x) = x^3 - 2x$  的圖形向右平移 1 單位與  $g(x) = (x-1)^3 - 2(x-1)$  的圖形重合，而  $g(x) = (x-1)^3 - 2(x-1)$  的圖形向下平移 3 單位與  $f(x) = (x-1)^3 - 2(x-1) - 3$  的圖形重合。而在已知對稱中心點後，從對稱中心點的平移來理解函數圖形的平移是更容易的。例如：對稱中心點  $A(0, 0)$  向右平移 1 單位，向下平移 3 單位後為對稱中心點  $C(1, -3)$ ，因此  $h(x) = x^3 - 2x$  圖形向右平移 1 單位，向下平移 3 單位後即為  $f(x) = (x-1)^3 - 2(x-1) - 3$  的圖形。

最後，在知道函數圖形之間的平移關係後，代數上看，函數  $h(x)$ 、 $g(x)$ 、 $f(x)$  的關係很自然為  $h(x-1) = g(x)$ ， $g(x) - 3 = f(x)$ 。



### 練習 5

(1) 三次函數  $y = -x^3 - 2x$  的圖形如何平移至與  $y = -(x+1)^3 - 2(x+1) - 4$  重合？

(2) 如何將  $y = 3x^3 - 9x^2 + 8x + 3$  的圖形平移至與  $y = 3x^3 + 9x^2 + 8x$  的圖形重合？

## 六、結論與評註

我們總結所有結果如下：

1. 三次函數  $f(x) = a(x-h)^3 + c(x-h) + k$  的圖形可能是「大波浪」、「大平台」、「斜斜逆」般的點對稱圖形，對稱中心點  $S(h, f(h))$ 。
2.  $f(x) = a(x-h)^3 + c(x-h) + k$  的圖形與  $h(x) = ax^3 + cx$  的圖形長得一模一樣，只是位置不同。兩者圖形可以經由平移後重合，至於怎麼移，觀察對稱中心點如何改變即可。
3. 如果三次函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的對稱中心點是  $S(h, f(h))$ ，我們可以利用(#)解出  $3ah + b = 0$ 。

再將  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  進行「配方」寫成  $f(x) = a(x-h)^3 + \hat{c}(x-h) + k$ 。

4. 回顧國中學習二次函數的脈絡，我們建立了圖形的特徵，如開口方向、頂點坐標與函數之間的關係，當然這是經由將二次函數配方得來的。所以，針對三次函數，我們也沿著這個脈絡先試著建立圖形的特徵（對稱中心點坐標）與函數之間的關係，那麼配方消去  $(x-h)^2$  項就是一個很自然的動作。至於圖形之間的平移，便完全取決於對稱中心點的平移。這是這篇文章最主要的構想。

# 利用遞迴關係式求連續正整數奇次方和的公式解

李維昌／國立宜蘭高中退休教師

## 一、研究目的》

本文以遞迴關係式求  $\sum_{k=1}^n k^r$  的公式解，其中  $r$  為正奇數，解題的靈感偶然從腦海中閃過，我即刻把握當下，振筆疾書，記錄這美好的尋求過程，請看下文的剖析。

## 二、研究過程》

1. 定義： $\sum_{k=1}^n k^r = S_r(n)$ ，本文探討  $r$  為正奇數的情形。

$$2. \quad n = n\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = S_1(n) - S_1(n-1)$$

$$\text{我們可以推得 } S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\begin{aligned} 3. \quad n^3 &= n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n \\ &= n(n-1)(n-2) \cdot \left[\frac{(n+1)-(n-3)}{4}\right] + 3n(n-1) \cdot \left[\frac{(n+1)-(n-2)}{3}\right] + n \cdot \left[\frac{(n+1)-(n-1)}{2}\right] \\ &= \left[\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2}\right] \\ &\quad - \left[\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} + n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)}{2}\right] \\ &= S_3(n) - S_3(n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{我們可以推得 } S_3(n) &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{(n+1)n}{4} [(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2] \\ &= \frac{(n+1)n}{4} (n^2 + n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \end{aligned}$$

4. 尋求遞迴關係式：

當  $k \geq 3$  時，

$$\begin{aligned}
 n^k(n+1)^k - n^k(n-1)^k &= n^k \left[ \left( \sum_{i=0}^k C_i^k n^{k-i} \right) - \left( \sum_{i=0}^k (-1)^i C_i^k n^{k-i} \right) \right] \\
 &= n^k \left[ 2C_1^k n^{k-1} + 2 \left( \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_{2i+1}^k n^{k-(2i+1)} \right) \right] \\
 &= 2C_1^k n^{2k-1} + 2 \left( \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_{2i+1}^k n^{2k-(2i+1)} \right)
 \end{aligned}$$

等式兩邊同除以  $2C_1^k$  並移項，整理可得

$$\begin{aligned}
 n^{2k-1} &= \frac{1}{2C_1^k} [n^k(n+1)^k - n^k(n-1)^k] - \frac{1}{C_1^k} \left\{ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_{2i+1}^k [S_{2k-(2i+1)}(n) - S_{2k-(2i+1)}(n-1)] \right\} \\
 &= \left[ \frac{1}{2C_1^k} n^k(n+1)^k - \frac{1}{C_1^k} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_{2i+1}^k \cdot S_{2k-(2i+1)}(n) \right] - \left[ \frac{1}{2C_1^k} n^k(n-1)^k - \frac{1}{C_1^k} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_{2i+1}^k \cdot S_{2k-(2i+1)}(n-1) \right] \\
 &= [S_{2k-1}(n)] - [S_{2k-1}(n-1)]
 \end{aligned}$$

因此我們可以推得

$$S_{2k-1}(n) = \frac{1}{2C_1^k} n^k(n+1)^k - \frac{1}{C_1^k} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_{2i+1}^k \cdot S_{2k-(2i+1)}(n), k \geq 3$$

到此遞迴關係式已尋得。

5. 利用遞迴關係式進而求得  $S_{2k-1}(n)$  的公式解，其中  $k$  為正整數， $3 \leq k \leq 16$ 。

$$\text{遞迴關係式： } S_{2k-1}(n) = \frac{1}{2C_1^k} n^k(n+1)^k - \frac{1}{C_1^k} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_{2i+1}^k \cdot S_{2k-(2i+1)}(n), k \geq 3$$

(1) 將  $k=3$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
 S_5(n) &= \frac{1}{2C_1^3} n^3(n+1)^3 - \frac{1}{C_1^3} \sum_{i=1}^1 C_{2i+1}^3 \cdot S_{6-(2i+1)}(n) \\
 &= \frac{1}{6} n^3(n+1)^3 - \frac{1}{3} S_3(n) \\
 &= \left( \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{6} n^3 \right) - \left( \frac{1}{12} n^4 + \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{12} n^2 \right) \\
 &= \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2
 \end{aligned}$$

(2) 將  $k=4$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
 S_7(n) &= \frac{1}{2C_1^4} n^4 (n+1)^4 - \frac{1}{C_1^4} \sum_{i=1}^4 C_{2i+1}^4 \cdot S_{8-(2i+1)}(n) \\
 &= \frac{1}{8} n^4 (n+1)^4 - S_5(n) \\
 &= \left( \frac{1}{8} n^8 + \frac{1}{2} n^7 + \frac{3}{4} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{1}{8} n^4 \right) - \left( \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2 \right) \\
 &= \frac{1}{8} n^8 + \frac{1}{2} n^7 + \frac{7}{12} n^6 - \frac{7}{24} n^4 + \frac{1}{12} n^2
 \end{aligned}$$

(3) 將  $k=5$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
 S_9(n) &= \frac{1}{2C_1^5} n^5 (n+1)^5 - \frac{1}{C_1^5} \sum_{i=1}^5 C_{2i+1}^5 \cdot S_{10-(2i+1)}(n) \\
 &= \frac{1}{10} n^5 (n+1)^5 - 2S_7(n) - \frac{1}{5} S_5(n) \\
 &= \left( \frac{1}{10} n^{10} + \frac{1}{2} n^9 + n^8 + n^7 + \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{10} n^5 \right) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{4} n^8 + n^7 + \frac{7}{6} n^6 - \frac{7}{12} n^4 + \frac{1}{6} n^2 \right) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{30} n^6 + \frac{1}{10} n^5 + \frac{1}{12} n^4 - \frac{1}{60} n^2 \right) \\
 &= \frac{1}{10} n^{10} + \frac{1}{2} n^9 + \frac{3}{4} n^8 - \frac{7}{10} n^6 + \frac{1}{2} n^4 - \frac{3}{20} n^2
 \end{aligned}$$

(4) 將  $k=6$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
 S_{11}(n) &= \frac{1}{2C_1^6} n^6 (n+1)^6 - \frac{1}{C_1^6} \sum_{i=1}^6 C_{2i+1}^6 \cdot S_{12-(2i+1)}(n) \\
 &= \frac{1}{12} n^6 (n+1)^6 - \frac{10}{3} S_9(n) - S_7(n) \\
 &= \left( \frac{1}{12} n^{12} + \frac{1}{2} n^{11} + \frac{5}{4} n^{10} + \frac{5}{3} n^9 + \frac{5}{4} n^8 + \frac{1}{2} n^7 + \frac{1}{12} n^6 \right) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{3} n^{10} + \frac{5}{3} n^9 + \frac{5}{2} n^8 - \frac{7}{3} n^6 + \frac{5}{3} n^4 - \frac{1}{2} n^2 \right) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{8} n^8 + \frac{1}{2} n^7 + \frac{7}{12} n^6 - \frac{7}{24} n^4 + \frac{1}{12} n^2 \right) \\
 &= \frac{1}{12} n^{12} + \frac{1}{2} n^{11} + \frac{11}{12} n^{10} - \frac{11}{8} n^8 + \frac{11}{6} n^6 - \frac{11}{8} n^4 + \frac{5}{12} n^2
 \end{aligned}$$

(5) 將  $k = 7$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{13}(n) &= \frac{1}{2C_1^7} n^7 (n+1)^7 - \frac{1}{C_1^7} \sum_{i=1}^3 C_{2i+1}^7 \cdot S_{14-(2i+1)}(n) \\
&= \frac{1}{14} n^7 (n+1)^7 - 5S_{11}(n) - 3S_9(n) - \frac{1}{7} S_7(n) \\
&= \left( \frac{1}{14} n^{14} + \frac{1}{2} n^{13} + \frac{3}{2} n^{12} + \frac{5}{2} n^{11} + \frac{5}{2} n^{10} + \frac{3}{2} n^9 + \frac{1}{2} n^8 + \frac{1}{14} n^7 \right) \\
&\quad - \left( \frac{5}{12} n^{12} + \frac{5}{2} n^{11} + \frac{55}{12} n^{10} - \frac{55}{8} n^8 + \frac{55}{6} n^6 - \frac{55}{8} n^4 + \frac{25}{12} n^2 \right) \\
&\quad - \left( \frac{3}{10} n^{10} + \frac{3}{2} n^9 + \frac{9}{4} n^8 - \frac{21}{10} n^6 + \frac{3}{2} n^4 - \frac{9}{20} n^2 \right) \\
&\quad - \left( \frac{1}{56} n^8 + \frac{1}{14} n^7 + \frac{1}{12} n^6 - \frac{1}{24} n^4 + \frac{1}{84} n^2 \right) \\
&= \frac{1}{14} n^{14} + \frac{1}{2} n^{13} + \frac{13}{12} n^{12} - \frac{143}{60} n^{10} + \frac{143}{28} n^8 - \frac{143}{20} n^6 + \frac{65}{12} n^4 - \frac{691}{420} n^2
\end{aligned}$$

(6) 將  $k = 8$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{15}(n) &= \frac{1}{2C_1^8} n^8 (n+1)^8 - \frac{1}{C_1^8} \sum_{i=1}^3 C_{2i+1}^8 \cdot S_{16-(2i+1)}(n) \\
&= \frac{1}{16} n^8 (n+1)^8 - 7S_{13}(n) - 7S_{11}(n) - S_9(n) \\
&= \left( \frac{1}{16} n^{16} + \frac{1}{2} n^{15} + \frac{7}{4} n^{14} + \frac{7}{2} n^{13} + \frac{35}{8} n^{12} + \frac{7}{2} n^{11} + \frac{7}{4} n^{10} + \frac{1}{2} n^9 + \frac{1}{16} n^8 \right) \\
&\quad - \left( \frac{1}{2} n^{14} + \frac{7}{2} n^{13} + \frac{91}{12} n^{12} - \frac{1001}{60} n^{10} + \frac{143}{4} n^8 - \frac{1001}{20} n^6 + \frac{455}{12} n^4 - \frac{691}{60} n^2 \right) \\
&\quad - \left( \frac{7}{12} n^{12} + \frac{7}{2} n^{11} + \frac{77}{12} n^{10} - \frac{77}{8} n^8 + \frac{77}{6} n^6 - \frac{77}{8} n^4 + \frac{35}{12} n^2 \right) \\
&\quad - \left( \frac{1}{10} n^{10} + \frac{1}{2} n^9 + \frac{3}{4} n^8 - \frac{7}{10} n^6 + \frac{1}{2} n^4 - \frac{3}{20} n^2 \right) \\
&= \frac{1}{16} n^{16} + \frac{1}{2} n^{15} + \frac{5}{4} n^{14} - \frac{91}{24} n^{12} + \frac{143}{12} n^{10} - \frac{429}{16} n^8 + \frac{455}{12} n^6 - \frac{691}{24} n^4 + \frac{35}{4} n^2
\end{aligned}$$

(7) 將  $k=9$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{17}(n) &= \frac{1}{2C_1^9} n^9 (n+1)^9 - \frac{1}{C_1} \sum_{i=1}^4 C_{2i+1}^9 \cdot S_{18-(2i+1)}(n) \\
&= \frac{1}{18} n^9 (n+1)^9 - \frac{28}{3} S_{15}(n) - 14 S_{13}(n) - 4 S_{11}(n) - \frac{1}{9} S_9(n) \\
&= \left( \frac{1}{18} n^{18} + \frac{1}{2} n^{17} + 2n^{16} + \frac{14}{3} n^{15} + 7n^{14} + 7n^{13} + \frac{14}{3} n^{12} + 2n^{11} + \frac{1}{2} n^{10} + \frac{1}{18} n^9 \right) \\
&\quad - \left( \frac{7}{12} n^{16} + \frac{14}{3} n^{15} + \frac{35}{3} n^{14} - \frac{637}{18} n^{12} + \frac{1001}{9} n^{10} - \frac{1001}{4} n^8 + \frac{3185}{9} n^6 - \frac{4837}{18} n^4 + \frac{245}{3} n^2 \right) \\
&\quad - \left( n^{14} + 7n^{13} + \frac{91}{6} n^{12} - \frac{1001}{30} n^{10} + \frac{1001}{14} n^8 - \frac{1001}{10} n^6 + \frac{455}{6} n^4 - \frac{4837}{210} n^2 \right) \\
&\quad - \left( \frac{1}{3} n^{12} + 2n^{11} + \frac{11}{3} n^{10} - \frac{11}{2} n^8 + \frac{22}{3} n^6 - \frac{11}{2} n^4 + \frac{5}{3} n^2 \right) \\
&\quad - \left( \frac{1}{90} n^{10} + \frac{1}{18} n^9 + \frac{1}{12} n^8 - \frac{7}{90} n^6 + \frac{1}{18} n^4 - \frac{1}{60} n^2 \right) \\
&= \frac{1}{18} n^{18} + \frac{1}{2} n^{17} + \frac{17}{12} n^{16} - \frac{17}{3} n^{14} + \frac{221}{9} n^{12} - \frac{2431}{30} n^{10} + \frac{1105}{6} n^8 - \frac{11747}{45} n^6 \\
&\quad + \frac{595}{3} n^4 - \frac{3617}{60} n^2
\end{aligned}$$

(8) 將  $k=10$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{19}(n) &= \frac{1}{2C_1^{10}} n^{10} (n+1)^{10} - \frac{1}{C_1} \sum_{i=1}^4 C_{2i+1}^{10} \cdot S_{20-(2i+1)}(n) \\
&= \frac{1}{20} n^{10} (n+1)^{10} - 12 S_{17}(n) - \frac{126}{5} S_{15}(n) - 12 S_{13}(n) - S_{11}(n) \\
&= \left( \frac{1}{20} n^{20} + \frac{1}{2} n^{19} + \frac{9}{4} n^{18} + 6n^{17} + \frac{21}{2} n^{16} + \frac{63}{5} n^{15} + \frac{21}{2} n^{14} + 6n^{13} + \frac{9}{4} n^{12} + \frac{1}{2} n^{11} + \frac{1}{20} n^{10} \right) \\
&\quad - \left( \frac{2}{3} n^{18} + 6n^{17} + 17n^{16} - 68n^{14} + \frac{884}{3} n^{12} - \frac{4862}{5} n^{10} + 2210n^8 - \frac{46988}{15} n^6 + 2380n^4 - \frac{3617}{5} n^2 \right) \\
&\quad - \left( \frac{63}{40} n^{16} + \frac{63}{5} n^{15} + \frac{63}{2} n^{14} - \frac{5733}{60} n^{12} + \frac{9009}{30} n^{10} - \frac{27027}{40} n^8 + \frac{1911}{2} n^6 - \frac{14511}{20} n^4 + \frac{441}{2} n^2 \right) \\
&\quad - \left( \frac{6}{7} n^{14} + 6n^{13} + 13n^{12} - \frac{143}{5} n^{10} + \frac{429}{7} n^8 - \frac{429}{5} n^6 + 65n^4 - \frac{691}{35} n^2 \right) \\
&\quad - \left( \frac{1}{12} n^{12} + \frac{1}{2} n^{11} + \frac{11}{12} n^{10} - \frac{11}{8} n^8 + \frac{11}{6} n^6 - \frac{11}{8} n^4 + \frac{5}{12} n^2 \right) \\
&= \frac{1}{20} n^{20} + \frac{1}{2} n^{19} + \frac{19}{12} n^{18} - \frac{323}{40} n^{16} + \frac{323}{7} n^{14} - \frac{4199}{20} n^{12} + \frac{4199}{6} n^{10} - \frac{223193}{140} n^8 \\
&\quad + 2261n^6 - \frac{68723}{40} n^4 + \frac{43867}{84} n^2
\end{aligned}$$

(9) 將  $k=11$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{21}(n) &= \frac{1}{2C_1^{11}} n^{11}(n+1)^{11} - \frac{1}{C_1^{11}} \sum_{i=1}^5 C_{2i+1}^{11} \cdot S_{22-(2i+1)}(n) \\
&= \frac{1}{22} n^{11}(n+1)^{11} - 15S_{19}(n) - 42S_{17}(n) - 30S_{15}(n) - 5S_{13}(n) - \frac{1}{11}S_{11}(n) \\
&= \frac{1}{22}n^{22} + \frac{1}{2}n^{21} + \frac{7}{4}n^{20} - \frac{133}{12}n^{18} + \frac{323}{4}n^{16} - \frac{969}{2}n^{14} + \frac{146965}{66}n^{12} - \frac{223193}{30}n^{10} \\
&\quad + \frac{33915}{2}n^8 - \frac{481061}{20}n^6 + \frac{219335}{12}n^4 - \frac{1222277}{220}n^2
\end{aligned}$$

(10)將  $k=12$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{23}(n) &= \frac{1}{2C_1^{12}} n^{12}(n+1)^{12} - \frac{1}{C_1^{12}} \sum_{i=1}^5 C_{2i+1}^{12} \cdot S_{24-(2i+1)}(n) \\
&= \frac{1}{24} n^{12}(n+1)^{12} - \frac{55}{3}S_{21}(n) - 66S_{19}(n) - 66S_{17}(n) - \frac{55}{3}S_{15}(n) - S_{13}(n) \\
&= \frac{1}{24}n^{24} + \frac{1}{2}n^{23} + \frac{23}{12}n^{22} - \frac{1771}{120}n^{20} + \frac{4807}{36}n^{18} - \frac{81719}{80}n^{16} + \frac{37145}{6}n^{14} - \frac{5133439}{180}n^{12} \\
&\quad + \frac{572033}{6}n^{10} - \frac{17386919}{80}n^8 + \frac{11098351}{36}n^6 - \frac{28112371}{120}n^4 + \frac{854513}{12}n^2
\end{aligned}$$

(11)將  $k=13$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{25}(n) &= \frac{1}{2C_1^{13}} n^{13}(n+1)^{13} - \frac{1}{C_1^{13}} \sum_{i=1}^6 C_{2i+1}^{13} \cdot S_{26-(2i+1)}(n) \\
&= \frac{1}{26} n^{13}(n+1)^{13} - 22S_{23}(n) - 99S_{21}(n) - 132S_{19}(n) - 55S_{17}(n) - 6S_{15}(n) - \frac{1}{13}S_{13}(n) \\
&= \frac{1}{26}n^{26} + \frac{1}{2}n^{25} + \frac{25}{12}n^{24} - \frac{115}{6}n^{22} + \frac{1265}{6}n^{20} - \frac{24035}{12}n^{18} + \frac{185725}{12}n^{16} \\
&\quad - \frac{25667195}{273}n^{14} + \frac{1300075}{3}n^{12} - \frac{17386919}{12}n^{10} + \frac{277458775}{84}n^8 \\
&\quad - \frac{28112371}{6}n^6 + \frac{21362825}{6}n^4 - \frac{1181820455}{1092}n^2
\end{aligned}$$

(12)將  $k=14$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{27}(n) &= \frac{1}{2C_1^{14}} n^{14} (n+1)^{14} - \frac{1}{C_1^{14}} \sum_{i=1}^6 C_{2i+1}^{14} \cdot S_{28-(2i+1)}(n) \\
&= \frac{1}{28} n^{14} (n+1)^{14} - 26S_{25}(n) - 143S_{23}(n) - \frac{1716}{7} S_{21}(n) - 143S_{19}(n) \\
&\quad - 26S_{17}(n) - S_{15}(n) \\
&= \frac{1}{28} n^{28} + \frac{1}{2} n^{27} + \frac{9}{4} n^{26} - \frac{195}{8} n^{24} + \frac{4485}{14} n^{22} - \frac{29601}{8} n^{20} + \frac{142025}{4} n^{18} \\
&\quad - \frac{15400317}{56} n^{16} + 1671525 n^{14} - \frac{678089841}{88} n^{12} + \frac{721392815}{28} n^{10} \\
&\quad - \frac{3289147407}{56} n^8 + \frac{166630035}{2} n^6 - \frac{3545461365}{56} n^4 + \frac{76977927}{4} n^2
\end{aligned}$$

(13)將  $k=15$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{29}(n) &= \frac{1}{2C_1^{15}} n^{15} (n+1)^{15} - \frac{1}{C_1^{15}} \sum_{i=1}^7 C_{2i+1}^{15} \cdot S_{30-(2i+1)}(n) \\
&= \frac{1}{30} n^{15} (n+1)^{15} - \frac{91}{3} S_{27}(n) - \frac{1001}{5} S_{25}(n) - 429S_{23}(n) - \frac{1001}{3} S_{21}(n) \\
&\quad - 91S_{19}(n) - 7S_{17}(n) - \frac{1}{15} S_{15}(n) \\
&= \frac{1}{30} n^{30} + \frac{1}{2} n^{29} + \frac{29}{12} n^{28} - \frac{609}{20} n^{26} + \frac{1885}{4} n^{24} - \frac{26013}{4} n^{22} + \frac{303485}{4} n^{20} - \frac{61299301}{84} n^{18} \\
&\quad + \frac{22621305}{4} n^{16} - \frac{137514723}{4} n^{14} + \frac{1901853785}{12} n^{12} - \frac{10598363867}{20} n^{10} \\
&\quad + \frac{4832271015}{4} n^8 - \frac{6854558639}{4} n^6 + \frac{15626519181}{12} n^4 - \frac{23749461029}{60} n^2
\end{aligned}$$

(14)將  $k=16$  代入遞迴關係式，我們可以獲得

$$\begin{aligned}
S_{31}(n) &= \frac{1}{2C_1^{16}} n^{16} (n+1)^{16} - \frac{1}{C_1^{16}} \sum_{i=1}^7 C_{2i+1}^{16} \cdot S_{32-(2i+1)}(n) \\
&= \frac{1}{32} n^{16} (n+1)^{16} - 35S_{29}(n) - 273S_{27}(n) - 715S_{25}(n) - 715S_{23}(n) - 273S_{21}(n) - 35S_{19}(n) - S_{17}(n) \\
&= \frac{1}{32} n^{32} + \frac{1}{2} n^{31} + \frac{31}{12} n^{30} - \frac{899}{24} n^{28} + \frac{2697}{4} n^{26} - \frac{175305}{16} n^{24} + \frac{6720025}{44} n^{22} - \frac{14287807}{8} n^{20} \\
&\quad + \frac{206253075}{12} n^{18} - \frac{4262956413}{32} n^{16} + \frac{294787336675}{364} n^{14} - \frac{328549279877}{88} n^{12} + \frac{49933467155}{4} n^{10} \\
&\quad - \frac{3187369767135}{112} n^8 + \frac{484422094611}{12} n^6 - \frac{736233291899}{24} n^4 + \frac{8615841276005}{924} n^2
\end{aligned}$$



6. 結論：

(1) 我們已經獲得以下奇次方和公式解：

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$S_7(n) = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

$$S_9(n) = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

$$S_{11}(n) = \frac{1}{12}n^{12} + \frac{1}{2}n^{11} + \frac{11}{12}n^{10} - \frac{11}{8}n^8 + \frac{11}{6}n^6 - \frac{11}{8}n^4 + \frac{5}{12}n^2$$

$$S_{13}(n) = \frac{1}{14}n^{14} + \frac{1}{2}n^{13} + \frac{13}{12}n^{12} - \frac{143}{60}n^{10} + \frac{143}{28}n^8 - \frac{143}{20}n^6 + \frac{65}{12}n^4 - \frac{691}{420}n^2$$

$$S_{15}(n) = \frac{1}{16}n^{16} + \frac{1}{2}n^{15} + \frac{5}{4}n^{14} - \frac{91}{24}n^{12} + \frac{143}{12}n^{10} - \frac{429}{16}n^8 + \frac{455}{12}n^6 - \frac{691}{24}n^4 + \frac{35}{4}n^2$$

$$S_{17}(n) = \frac{1}{18}n^{18} + \frac{1}{2}n^{17} + \frac{17}{12}n^{16} - \frac{17}{3}n^{14} + \frac{221}{9}n^{12} - \frac{2431}{30}n^{10} + \frac{1105}{6}n^8 - \frac{11747}{45}n^6 \\ + \frac{595}{3}n^4 - \frac{3617}{60}n^2$$

$$S_{19}(n) = \frac{1}{20}n^{20} + \frac{1}{2}n^{19} + \frac{19}{12}n^{18} - \frac{323}{40}n^{16} + \frac{323}{7}n^{14} - \frac{4199}{20}n^{12} + \frac{4199}{6}n^{10} - \frac{223193}{140}n^8 \\ + 2261n^6 - \frac{68723}{40}n^4 + \frac{43867}{84}n^2$$

$$S_{21}(n) = \frac{1}{22}n^{22} + \frac{1}{2}n^{21} + \frac{7}{4}n^{20} - \frac{133}{12}n^{18} + \frac{323}{4}n^{16} - \frac{969}{2}n^{14} + \frac{146965}{66}n^{12} - \frac{223193}{30}n^{10} \\ + \frac{33915}{2}n^8 - \frac{481061}{20}n^6 + \frac{219335}{12}n^4 - \frac{1222277}{220}n^2$$

$$S_{23}(n) = \frac{1}{24}n^{24} + \frac{1}{2}n^{23} + \frac{23}{12}n^{22} - \frac{1771}{120}n^{20} + \frac{4807}{36}n^{18} - \frac{81719}{80}n^{16} + \frac{37145}{6}n^{14} \\ - \frac{5133439}{180}n^{12} + \frac{572033}{6}n^{10} - \frac{17386919}{80}n^8 + \frac{11098351}{36}n^6 - \frac{28112371}{120}n^4 + \frac{854513}{12}n^2$$

$$\begin{aligned}
S_{25}(n) &= \frac{1}{26}n^{26} + \frac{1}{2}n^{25} + \frac{25}{12}n^{24} - \frac{115}{6}n^{22} + \frac{1265}{6}n^{20} - \frac{24035}{12}n^{18} \\
&\quad + \frac{185725}{12}n^{16} - \frac{25667195}{273}n^{14} + \frac{1300075}{3}n^{12} - \frac{17386919}{12}n^{10} + \frac{277458775}{84}n^8 \\
&\quad - \frac{28112371}{6}n^6 + \frac{21362825}{6}n^4 - \frac{1181820455}{1092}n^2 \\
S_{27}(n) &= \frac{1}{28}n^{28} + \frac{1}{2}n^{27} + \frac{9}{4}n^{26} - \frac{195}{8}n^{24} + \frac{4485}{14}n^{22} - \frac{29601}{8}n^{20} + \frac{142025}{4}n^{18} \\
&\quad - \frac{15400317}{56}n^{16} + 1671525n^{14} - \frac{678089841}{88}n^{12} + \frac{721392815}{28}n^{10} \\
&\quad - \frac{3289147407}{56}n^8 + \frac{166630035}{2}n^6 - \frac{3545461365}{56}n^4 + \frac{76977927}{4}n^2 \\
S_{29}(n) &= \frac{1}{30}n^{30} + \frac{1}{2}n^{29} + \frac{29}{12}n^{28} - \frac{609}{20}n^{26} + \frac{1885}{4}n^{24} - \frac{26013}{4}n^{22} + \frac{303485}{4}n^{20} - \frac{61299301}{84}n^{18} \\
&\quad + \frac{22621305}{4}n^{16} - \frac{137514723}{4}n^{14} + \frac{1901853785}{12}n^{12} - \frac{10598363867}{20}n^{10} \\
&\quad + \frac{4832271015}{4}n^8 - \frac{6854558639}{4}n^6 + \frac{15626519181}{12}n^4 - \frac{23749461029}{60}n^2 \\
S_{31}(n) &= \frac{1}{32}n^{32} + \frac{1}{2}n^{31} + \frac{31}{12}n^{30} - \frac{899}{24}n^{28} + \frac{2697}{4}n^{26} - \frac{175305}{16}n^{24} + \frac{6720025}{44}n^{22} - \frac{14287807}{8}n^{20} \\
&\quad + \frac{206253075}{12}n^{18} - \frac{4262956413}{32}n^{16} + \frac{294787336675}{364}n^{14} - \frac{328549279877}{88}n^{12} \\
&\quad + \frac{49933467155}{4}n^{10} - \frac{3187369767135}{112}n^8 + \frac{484422094611}{12}n^6 - \frac{736233291899}{24}n^4 \\
&\quad + \frac{8615841276005}{924}n^2
\end{aligned}$$

(2) 當  $3 \leq k \leq 16$  時，奇次方和公式解可簡潔表示成下列形式：

$$S_{2k-1}(n) = \frac{1}{2k} \cdot n^{2k} + \frac{1}{2} \cdot n^{2k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} [(c_{2k-1, 2k-2i}) \cdot n^{2k-2i}], 3 \leq k \leq 16$$

$$c_{31,2} = \frac{8615841276005}{924}$$

$$c_{29,2} = -\frac{23749461029}{60}, c_{2k-1, 2(k-14)} = \frac{k-1}{k-14} \cdot \frac{2k-1}{2k-29} \cdot c_{2k-3, 2(k-15)}, k=16$$

$$c_{27,2} = \frac{76977927}{4}, c_{2k-1, 2(k-13)} = \frac{k-1}{k-13} \cdot \frac{2k-1}{2k-27} \cdot c_{2k-3, 2(k-14)}, k=15, 16$$

$$c_{25,2} = \frac{-1181820455}{1092}, c_{2k-1, 2(k-12)} = \frac{k-1}{k-12} \cdot \frac{2k-1}{2k-25} \cdot c_{2k-3, 2(k-13)}, k=14, 15, 16$$

$$c_{23,2} = \frac{854513}{12}, c_{2k-1,2(k-11)} = \frac{k-1}{k-11} \cdot \frac{2k-1}{2k-23} \cdot c_{2k-3,2(k-12)}, k=13,14,15,16$$

$$c_{21,2} = \frac{-1222277}{220}, c_{2k-1,2(k-10)} = \frac{k-1}{k-10} \cdot \frac{2k-1}{2k-21} \cdot c_{2k-3,2(k-11)}, k=12,13,14,15,16$$

$$c_{19,2} = \frac{43867}{84}, c_{2k-1,2(k-9)} = \frac{k-1}{k-9} \cdot \frac{2k-1}{2k-19} \cdot c_{2k-3,2(k-10)}, k=11,12,13,14,15,16$$

$$c_{17,2} = \frac{-3617}{60}, c_{2k-1,2(k-8)} = \frac{k-1}{k-8} \cdot \frac{2k-1}{2k-17} \cdot c_{2k-3,2(k-9)}, k=10,11,12,13,14,15,16$$

$$c_{15,2} = \frac{35}{4}, c_{2k-1,2(k-7)} = \frac{k-1}{k-7} \cdot \frac{2k-1}{2k-15} \cdot c_{2k-3,2(k-8)}, k=9,10,11,12,13,14,15,16$$

$$c_{13,2} = \frac{-691}{420}, c_{2k-1,2(k-6)} = \frac{k-1}{k-6} \cdot \frac{2k-1}{2k-13} \cdot c_{2k-3,2(k-7)}, k=8,9,10,11,12,13,14,15,16$$

$$c_{11,2} = \frac{5}{12}, c_{2k-1,2(k-5)} = \frac{k-1}{k-5} \cdot \frac{2k-1}{2k-11} \cdot c_{2k-3,2(k-6)}, k=7,8,9,10,11,12,13,14,15,16$$

$$c_{9,2} = \frac{-3}{20}, c_{2k-1,2(k-4)} = \frac{k-1}{k-4} \cdot \frac{2k-1}{2k-9} \cdot c_{2k-3,2(k-5)}, k=6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16$$

$$c_{7,2} = \frac{1}{12}, c_{2k-1,2(k-3)} = \frac{k-1}{k-3} \cdot \frac{2k-1}{2k-7} \cdot c_{2k-3,2(k-4)}, k=5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16$$

$$c_{5,2} = \frac{-1}{12}, c_{2k-1,2(k-2)} = \frac{k-1}{k-2} \cdot \frac{2k-1}{2k-5} \cdot c_{2k-3,2(k-3)}, k=4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16$$

$$c_{3,2} = \frac{1}{4}, c_{2k-1,2(k-1)} = \frac{2k-1}{2k-3} \cdot c_{2k-3,2(k-2)}, k=3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16$$

(3) 可利用遞迴關係式： $S_{2k-1}(n) = \frac{1}{2C_1^k} n^k (n+1)^k - \frac{1}{C_1^k} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_{2i+1}^k \cdot S_{2k-(2i+1)}(n)$  去求  $S_{2k-1}(n)$  的公式

解， $k \geq 17$ ， $k$  為正整數。

# 專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系



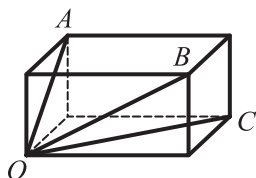
遊戲 145

☆☆☆☆

如下圖所示，長方體的頂點  $O$  是由長方體的三個面相交而來，又  $\overline{OA}$ ， $\overline{OB}$  與  $\overline{OC}$  是該三個面的對角線。若  $\alpha$ ， $\beta$  與  $\gamma$  是  $\overline{OA}$  與  $\overline{OB}$ ， $\overline{OB}$  與  $\overline{OC}$  及  $\overline{OA}$  與  $\overline{OC}$  的夾角，則求

$$\alpha + \beta + \gamma$$

的值。



## 〔玩鎖・玩索〕

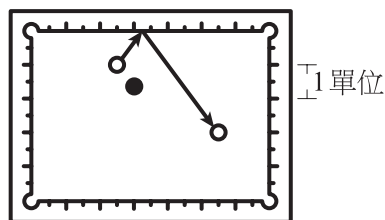
這是匈牙利中數數學競賽的一道題目，該競賽是世界上最早的競賽，從 1894 年開始，除了第一次與第二次世界戰爭中斷外，每年都舉行，而且是考三道題目。關於角度和，國中生所熟知的不外乎是「三角形內角和  $180^\circ$ 」。想想看！如何將問題跟這個性質連結。



遊戲 146

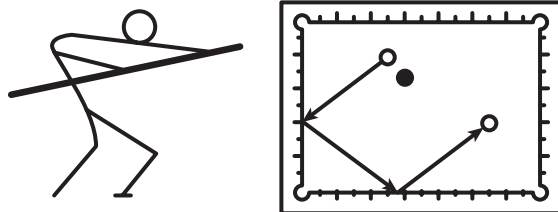
☆☆☆

看過我國十六歲泰山神童吳珈慶打撞球嗎？當標的球被黑球擋住去路時，跳球（越過黑球上空）或間接擊球（碰撞檯邊再反射撞球）是常用的兩種擊球方法。



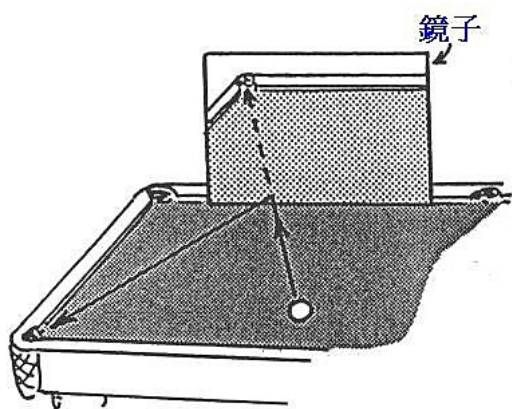
例如，在上圖中，想用白球撞擊另一顆箭頭所指的白球。因為黑球橫在中間，無法直接瞄準，所以借助球檯邊的反射，是一招不錯的方式，但是，這時的瞄準點比較難拿捏，球在撞擊之前所跑的距離也跟著加長，失誤的機率提升不少。

- (1) 在上圖中，白球依實線方向前進，在碰到另一顆白球之前，總共走了多少距離（將球檯邊相鄰兩長刻度的距離稱為 1 單位，答案以單位表示）？
- (2) 如果想表現一下高超的撞球技術，採取下圖中的實線撞球，那麼在碰到另一顆白球之前，總共行經了多少距離？

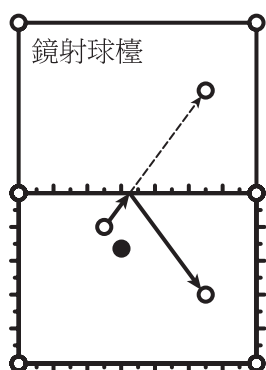


## 〔玩鎖・玩索〕

撞球最重要的物理性質就是入射角等於反射角，這個性質也可以用光學的物理性質來解釋，如下圖所示，在球檯邊裝個鏡子，此時球行進的折線可以看成直線（跑進鏡子裡的球檯）。



（圖片來源：國立師範大學物理系教學網頁）  
利用入射角等於反射角的鏡射原理，將折線拉直，如下圖所示（想成將球檯往上作對稱）



應用這個概念，將折線一一拉直便可解題。



遊戲 147

☆☆☆

古埃及《萊因德紙草書》裡談到「么分數」，像

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

這樣，分子為 1 的分數叫「么分數」。么分數是古埃及的基本單位，古埃及人經常將分數分解成若干個么分數的和，例如

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}; \quad \frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91}$$

如果三個么分數

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{21}, \frac{1}{b} \quad (a < b)$$

構成等差數列，那麼正整數  $a$  與  $b$  的值各為何？

## 〔玩鎖・玩索〕

1858 年，蘇格蘭律師兼古董商萊因德，在往尼羅河谷的旅程中，購得一份幾年前才出土的文獻，這份文獻現在稱為「萊因德紙草書」，內容包含了八十四個數學問題，有關算術、簡單代數及幾何。由於萊因德三十歲時英年早逝，這批文獻於是落入大英博物館之手，成為永久館藏。不知道是什麼原因，古埃及人只知道用么分數來處理其他的分數，他們花了很多的工夫和技巧，將一個分數表達成許許多么分數的和，例如將  $\frac{6}{10}$  表示成  $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ 。在這裡，我們使用算術（其實是正整數因數分解的技巧）驗證

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

是唯一的一組么分數表示法。

令  $\frac{2}{7} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  ( $a < b$ )，通分並交叉相乘後得到

$$2ab - 7a - 7b = 0 \Rightarrow ab - \frac{7}{2}a - \frac{7}{2}b = 0$$

因式分解，得

$$\left(a - \frac{7}{2}\right)\left(b - \frac{7}{2}\right) = \frac{7^2}{2^2} \Rightarrow (2a - 7)(2b - 7) = 7^2$$

利用正整數的因數分解及條件  $a < b$ ，得

$2a - 7 = 1$ ， $2b - 7 = 49$ ，解得  $a = 4$ ， $b = 28$ 。



遊戲 148

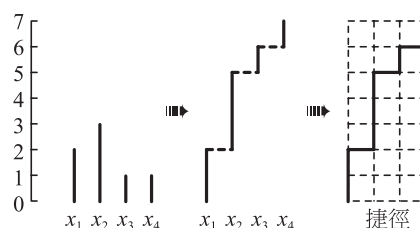
☆☆☆

下圖是從方程式

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$  的一組非負整數解  $x_1 = 2$ ， $x_2 = 3$ ， $x_3 = 1$ ， $x_4 = 1$

演變成  $3 \times 7$  棋盤式街道上一條捷徑的情形。你可以試著畫另一組非負整數解，如  $x_1 = 1$ ， $x_2 = 2$ ，

$x_3 = 3$ ， $x_4 = 1$ ，所對應的捷徑。從這對應的遊戲裡，你的發現是什麼呢？



關於方程式  $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k$  的非負整數解的個數，你是否可以利用上述的捷徑來說明？

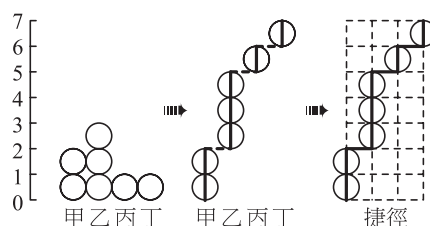
### 〔玩鎖・玩索〕

排列組合就是在對各種排列或組合給個有系統的公式。但是我們所碰到的各種情境太多，所以最好的方式還是記住幾個基本且重要的模型，利用這些模型解題。棋盤式街道的捷徑走法就是一列典型，必須牢記於心的重要模型， $m \times n$  的棋盤式街道之捷徑（從左下角至右上方）走法共有

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} = C_n^{m+n}$$

種。

將 7 顆相同的球完全分給甲、乙、丙、丁四個人，共有多少種分法？下圖左圖是甲分得 2 球，乙分得 3 球，丙與丁各分得一球，並將分得的球直立並列的情形，然後逐漸演變成一條捷徑。

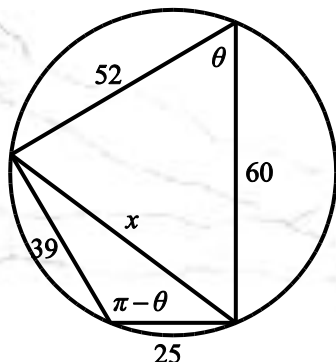


# 動手玩數學~破解祕笈

第36期

## 遊戲 141

如圖所示，令一條對角線長  $x$ ，對應的圓周角分別為  $\theta$  及  $\pi - \theta$ ：



(1) 對上、下兩個三角形分別利用餘弦定理，得

$$\begin{aligned} x^2 &= 52^2 + 60^2 - 2 \cdot 52 \cdot 60 \cos \theta \\ &= 6304 - 6240 \cos \theta ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 25^2 + 39^2 - 2 \cdot 25 \cdot 39 \cos(\pi - \theta) \\ &= 2146 + 1950 \cos \theta . \end{aligned}$$

消去  $x$ ，解得  $\cos \theta = \frac{33}{65}$ ，再代回式子，得

$x = 56$ 。利用同樣的方法，得另一對角線長 65。

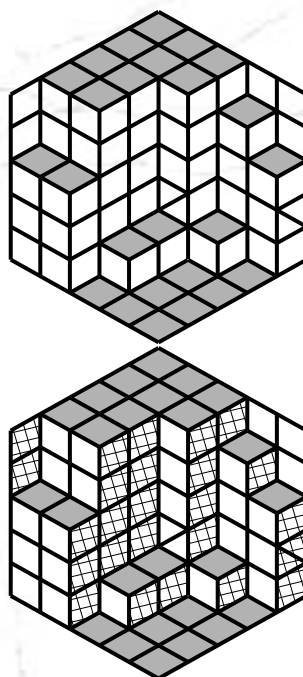
(2) 因為  $\cos \theta = \frac{33}{65}$ ，所以  $\sin \theta = \frac{56}{65}$ ，同理

$\sin(\pi - \theta) = \frac{56}{65}$ 。故圓內接四邊形的面積為

$$\frac{1}{2} \cdot 52 \cdot 60 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 39 \cdot 25 \sin(\pi - \theta) = 1764 .$$

## 遊戲 142

把三種不同方向的菱形小點心製作成不同花紋，第一種是「星空的黑色」，第二種是「鐵窗的網線」，第三種則是「純潔的白色」。此時，盤裡的顏色就變成下圖的樣子，不覺得挺有立體感的嗎？



如果將上圖想成小方糖堆砌起來的立體圖形，那麼「星空的黑色」代表從上空鳥瞰的景色；「鐵窗的網線」代表從右邊審視的圖案；「純潔的白色」代表從左邊觀賞的景觀。每一種都應該有

$$5 \times 5 = 25$$

塊才是。不知你領悟了嗎？

**遊戲 143**

假設騾與驢各背了  $x$ ， $y$  公斤的重物，由題意可得下列聯立方程組

$$\begin{cases} 2(x-100) = y+100 \\ 3(y-100) = x+100 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} 2x - y = 300 \\ -x + 3y = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 260 \\ y = 220 \end{cases},$$

意即騾背了 260 公斤，驢背了 220 公斤。

**遊戲 144**

(1) 根據定義

$$t = 20 \times 60 + 43 = 1243。$$

(2) 因為  $1000 = 16 \times 60 + 40$ ，所以  $t = 1000$  對應到下午四點四十分。

(3) 下午一點二十分所對應的  $t$  為

$$t = 13 \times 60 + 20 = 800，$$

將  $t = 800$  代入，得

$$\begin{aligned} & \frac{360}{11} \left( \left[ \frac{11 \times 800 - 180}{360} \right] + \frac{3}{2} \right) - 800 \\ &= \frac{360}{11} \left( \left[ \frac{431}{18} \right] + \frac{3}{2} \right) - 800 \\ &= \frac{360}{11} \times \frac{49}{2} - 800 \\ &= 1\frac{9}{11}， \end{aligned}$$

只需等  $1\frac{9}{11}$  分鐘就會發現時針與分針互相垂直。