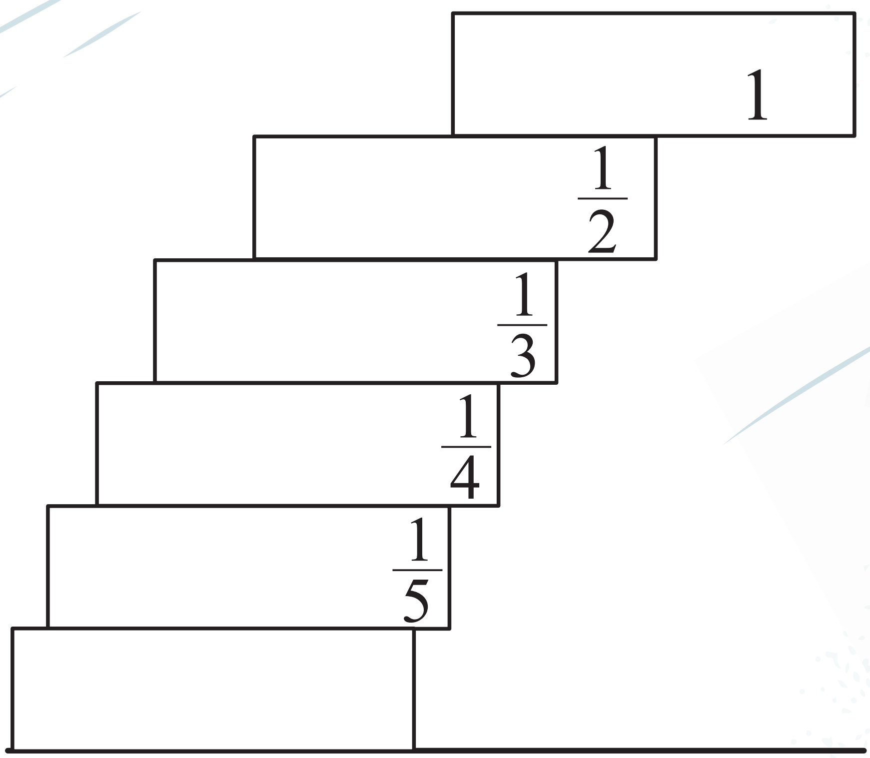
龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第36刊



龍騰文化

編輯室墨記

許教授這篇〈堆火柴盒的遊戲〉中，將四個一樣大的火柴盒疊放在桌上，用手指輕輕推動最上面火柴盒，接下來推動第二個，…，滑動到最危險的邊緣而不讓火柴盒倒下，您認為「重心」與「火柴盒傾倒」有連結嗎？這又與調和級數有什麼關係呢？讓我們來看看這篇文章，絕對讓您受益良多。

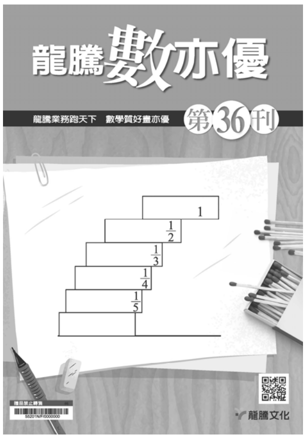
李維昌老師這次介紹了〈拉瑪奴姜恆等式證明〉，並試圖去證明這一個特殊的等式，過程相當精采可期，一起來驗證看看吧！

〈蛇形排列〉概其排列形式宛若條蛇，又稱作交錯排列或之字形排列。讓我們來看看陳敏晧老師為我們介紹的這篇文章，見識這一個特別的數學主題。

學習本身就充滿樂趣，如何點燃學生心中的學習欲望，是每個老師重要的任務。在〈桌遊學數學～以「病毒來了—對數消消樂」為例〉這篇文章中，林秋華老師以對數為知識點出發，融合市面桌遊機制，期待利用遊戲化學習方式來提升學生的學習動機與成效。桌遊學數學、數學來桌遊，一起來「桌」住數學感！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的內容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 lien_chang@lungteng.com.tw。



發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
執行編輯：張幸蓮
美術編輯：羅晨心

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248新北市五股區五工六路30號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2298-9755
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2018/5/2
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2018.5 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

堆火柴盒的遊戲

許志農／臺灣師大數學系

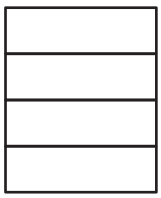
「無限是『數學』與『藝術』的接點。」

——說書人 毛爾

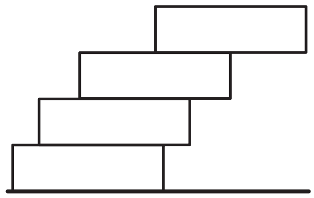
「我們能經歷到最美麗的事就是神秘；神秘是所有真正藝術與科學的泉源。」

——愛因斯坦

拿四盒長度都是 2（單位）的火柴盒疊放在桌上，四邊及四角都對整齊堆疊而上，如圖一所示。現在，用一根手指輕輕推動最上面的火柴盒，要小心不能動到下面的火柴盒。你能將這火柴盒滑至多遠，而它仍舊維持在那疊火柴盒上呢？接下來推動從上往下數的第二個火柴盒，一樣滑動至最危險的邊緣，然後推動第三個火柴盒，讓這些火柴盒處於快要傾倒的瞬間，如圖二所示：



圖一

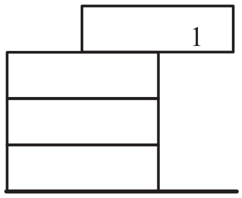


圖二

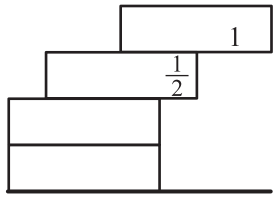
如果不是 4 個火柴盒，而是 10 盒，101 盒或者更多的火柴盒堆疊起來，那麼最頂端的火柴盒會被推移多遠呢？可以超過兩個火柴盒的長度嗎？可以推移無限的距離嗎？

在思考這問題遊戲之前，讓我們回到古希臘時代，敘拉古城的阿基米德是大家耳熟能詳的科學家，他擅長利用物理原理來解決數學問題。在微積分還沒被發現的那個年代，巧用重心這項利器，是阿基米德的特色。「重心」跟「火柴盒傾倒」有連結嗎？

當滑動第一個火柴盒（最上面的火柴盒）時，因爲火柴盒的重心在中間，且火柴盒的邊長爲 2（單位），所以把它向右滑動 1（單位），讓重心落在下個火柴盒的右邊上，這樣是最大的滑動距離，如圖三所示。接著來滑動第二個火柴盒，首先要注意的是，第一個火柴盒疊在第二個火柴盒上，而且第一個火柴盒的重心落在第二個火柴盒右邊邊線上。當我們滑動第二個火柴盒時，會連同第一個火柴盒一起移動，所以需要把這兩個火柴盒綁在一起考慮，讓這兩個火柴盒的重心落在第三個火柴盒右邊邊線上，這樣才是最大可能的移動距離。因爲第一個火柴盒的重心在第二個的右邊邊線，而第二個的重心在自己的中央，所以綁在一起的這兩個火柴盒之重心，會落在第二個火柴盒的右邊邊線與中央的中間，即將第二個火柴盒向右滑動 $\frac{1}{2}$（單位），就會讓上面兩個火柴盒的重心恰好落在第三個火柴盒的右邊邊線上，如圖四所示：

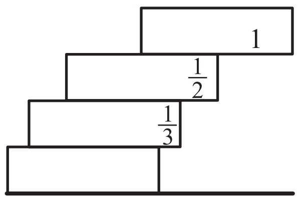


圖三



圖四

最後考慮滑動第三個火柴盒，同樣地也必須將前三個火柴盒綁在一起考慮，且讓它們的重心滑動至第四個火柴盒（最底層的火柴盒）的右邊邊線上即可。從圖中我們知道前兩個火柴盒的重心在第三個火柴盒的右邊邊線上，而第三個火柴盒的重心在自己的中央，又前兩個火柴盒的份量是第三個火柴盒的兩倍，所以綁在一起的前三個火柴盒之重心會落在離第三個火柴盒右邊邊線 $\frac{1}{3}$ （單位）的距離上，如圖五所示：



圖五

我們將上述四個火柴盒的堆疊與滑動過程與結果推廣至一般情形：$n+1$ 個火柴盒的堆疊與滑動問題。同樣是從最上面的火柴盒開始滑動起，第一個滑動了 1 單位，第二個滑動了 $\frac{1}{2}$ 單位，第三個滑動了 $\frac{1}{3}$ 單位，依此類推，第 n 個滑動了 $\frac{1}{n}$ 單位，第 $n+1$ 個是接觸桌面或地面，不移動的。因此，最上面的火柴盒（第一個火柴盒）總共向右移動了

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}\text{（單位）。}$$

這個調和級數會成長得很快嗎？如果你願意動筆算一下或跑一下電腦程式，將會發現像蝸牛一樣緩慢。例如，頭一千項的和爲 7.485；百萬項之和爲 14.357。慢歸慢，這個有名的級數還是個發散級數，也就是說，當 n 趨近無窮大時，調和級數的值（移動的距離）也是趨近無窮大的。只是，我們用的火柴盒長度爲 2（單位），所以需要百萬個火柴盒才能讓最頂端的火柴盒移動約七個火柴盒的距離。想想看，這是多麼浩大的工程。

調和級數的求和可以追溯到中世紀法國學者奧雷姆（Nicolae Oresme, 1323-1382），他觀察到

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geq\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

將這觀察套用到調和級數

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

上，奧雷姆把$1,2,3,4,5,6,7,8,\cdots,2^m$的倒數分別以$1,1,2,4,8,\cdots,2^{m-1}$項括弧起來，再用奧雷姆的不等式，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^m}\\&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)\\&\geq 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{m}\\&\geq 1+\frac{m}{2}\text{。}\end{aligned}$$

這不等式告訴我們：調和級數是發散的級數（因爲當m趨近無限大時，級數和也趨近無限大），或者說

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots=\infty\text{ 。}$$

歷史上，調和級數的發散性有許多種不同的證明方式，奧雷姆的證明仍舊是所有這些證明中最直接，最優雅的，也是今天教科書常採用的方法。

在十七世紀微積分發明後，調和級數有個很棒的不等式估計：

$$\ln n\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}\leq 1+\ln n\text{ 。}$$

從這個不等式可以知道：調和級數的發散性，而且從高中對數函數的圖形可以看出緩慢遞增的特性。

最後讓我們思考一下，若將火柴盒改成三角柱，圓柱或其他可以堆疊的物件，這個滑動距離的級數會長成何種模樣呢？又都是發散的級數嗎？這可是一道有趣的延伸問題。

國立臺灣師範大學數學系
107學年度大學申請入學指定項目甄試試題

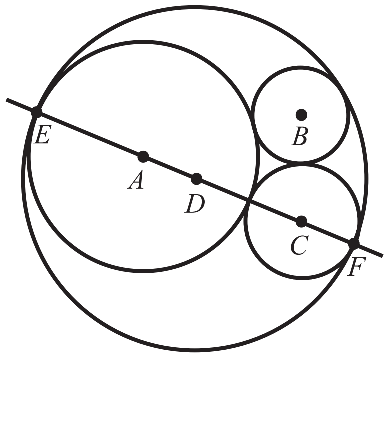
筆試一、計算證明題（考試時間：2小時）

1. 設 $f(x)$ 是最高次項係數爲 2 的實係數三次多項式函數，$g(x)$ 是實係數二次多項式函數，且滿足 $f(1)=g(1), f(2)=g(2), f(3)=g(3)$。
   (1) 試求 $f(0)-g(0)$ 之值。
   (2) 已知 $3f(2)-3f(1)=f(3)$，試求 $f(0)$ 之值。

2. 已知集合 $S=\{1,2,3,\cdots,2018\}$ 的子集合共有 2^{2018} 個。試求：
   (1) S 的子集合中，包含 $1,2,3,4,5$ 中至少三個數的集合有多少個？
   (2) S 的子集合中，元素和是奇數的集合有多少個？

3. (1) 設 A,B,C,D 爲空間中相異四點，且 $\overline{AB}=a,\overline{BC}=b,\overline{CD}=c,\overline{DA}=d$。試求內積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$（以 a,b,c,d 的數學式表示）。
   (2) 設四角錐 $A\text{-}BCDE$ 的底面 $BCDE$ 爲平行四邊形，O 爲 $\overline{BD}$ 與 $\overline{CE}$ 的交點。試證：$\overrightarrow{AO}$ 與 $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}$ 垂直的充要條件爲 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2$。

4. 如圖，平面上四個圓：圓 A、圓 B、圓 C、圓 D，它們兩兩相切，且 $\overline{EF}$ 通過圓 A、圓 C、圓 D 的圓心 A、C、D 三點。已知圓 A、圓 B、圓 C 的半徑分別爲 a、b、c。
   (1) 試求 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BCD$ 的面積（以 a,b,c 的數學式表示）。
   (2) 試證：點 B 到直線 EF 的距離等於 $2b$。



5. 設 $A_1A_2\cdots A_{107}$ 爲某單位圓的內接正 107 邊形，且 P 爲該單位圓上任意一點。
   (1) 試求 $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\times\cdots\times\overline{A_1A_{107}}$ 之值。
   (2) 試求 $\overline{PA_1}\times\overline{PA_2}\times\cdots\times\overline{PA_{107}}$ 的最大值。

筆試二、填充題（考試時間：1.5小時）

1. 設a，b爲實數。若函數$f(x)=\dfrac{2ax+b}{x^2+1}$的最大值爲4，最小值爲$-1$，則$b=$____________。

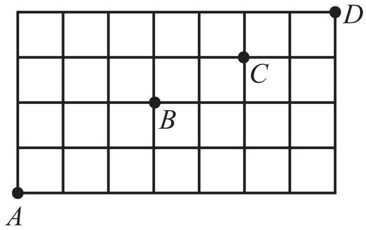
2. 若x滿足不等式$2^{-3x}+\dfrac{1}{4}\le 2^{-x}+4^{-(x+1)}$，則$x$的範圍爲____________。

3. 坐標空間中，三點$A(2,k,3)$、$B(k,1,4)$、$C(3,3,0)$對平面$2x+y=0$的投影點分別爲A'、B'、C'。若A'、B'、C'三點共線，則$k=$____________。

4. 已知(x,y)滿足橢圓方程式：$4x^2+y^2-8x-4y+4=0$，則$6x+5y+1$的最大值爲____________。

5. 已知與圓$C:x^2+y^2-2x-2y+1=0$相切的直線L分別交x軸、y軸於A、B兩點。若O爲原點，$\overline{OA}=a$、$\overline{OB}=b$，且a、b都大於2，則$(a-2)(b-2)=$____________。

6. 如圖，由A點出發到D點沿著格線前進，且只能向右或向上。若不經過B點，也不經過C點，則其可能的路徑共有____________條。



7. 有紅、白色的公正 6 面骰子各一顆，先擲紅色骰子一次，若出現點數爲N，則接著擲白色骰子N次，其中$N=1, 2, 3, 4, 5, 6$。問白色骰子出現最大點數是 5 的機率爲____________。

8. 由$x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=0$的各根在複數平面上所對應的點形成的十邊形面積爲____________。

9. 若一雙曲線Γ與橢圓C：$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}=6$共焦點，且$\Gamma$的共軛軸與橢圓$C$的短軸等長，則根據雙曲線的定義，$\Gamma$的方程式爲____________。

10. 若$\tan\alpha$與$\tan\beta$爲$3x^2-7x+1=0$的兩根，則
$\sin^2(\alpha+\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-3\cos^2(\alpha+\beta)=$____________。

解析

筆試一、計算證明題

1. (1) 考慮多項式函數$h(x)=f(x)-g(x)$：

   (i) 因爲$f(x)$與$g(x)$分別爲三次與二次多項式，所以$h(x)$必爲三次多項式且其最高項係數與$f(x)$的最高項係數相同，也就是 2。

   (ii) 因爲$f(1)=g(1), f(2)=g(2), f(3)=g(3)$，所以$h(1)=h(2)=h(3)=0$。

   根據(i)(ii)，我們可得

   $$h(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)\text{。}$$

   因此，

   $$f(0)-g(0)=h(0)=2(0-1)(0-2)(0-3)=-12\text{。}$$

(2) [解一]

設 $g(x)=ax^2+bx+c$ ，則

$$f(1)=g(1)=a+b+c,$$
$$f(2)=g(2)=4a+2b+c,$$
$$f(3)=g(3)=9a+3b+c.$$

將以上 $f(1), f(2), f(3)$ 的值代入條件 $3f(2)-3f(1)=f(3)$ 中，得

$$3(4a+2b+c)-3(a+b+c)=9a+3b+c\text{ 。}$$

化簡得 $c=0$ ，即 $g(0)=0$ 。因此，由(1)可得

$$f(0)=g(0)-12=0-12=-12\text{ 。}$$

[解二]

巴貝奇定理：若 $g(x)$ 爲二次多項式，則

$$g(a+3d)-3g(a+2d)+3g(a+d)-g(a)=0\text{ 。}$$

因爲題目中的 $g(x)$ 爲二次式，所以可以利用巴貝奇定理（取 $a=0,\ d=1$ ），得

$$g(3)-3g(2)+3g(1)-g(0)=0\text{ ，}$$

再利用條件 $f(1)=g(1), f(2)=g(2), f(3)=g(3)$ 及 $3f(2)-3f(1)=f(3)$ ，將上式化簡

$$\begin{aligned}g(0)&=g(3)-3g(2)+3g(1)\\&=f(3)-3f(2)+3f(1)=0\text{ 。}\end{aligned}$$

2. (1) 設 A 爲 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2018\}$ 的子集合，且 A 至少含有 1,2,3,4,5 中的三個數。要計算 A 有多少種可能，我們分以下三種情形討論：

(i) A 含有 1,2,3,4,5 中的三個數：因爲數字 6, 7, 8, ⋯, 2018（共 2013 個數字）可被選、也可不被選，所以這樣的集合 A 有 $C_3^5\cdot 2^{2013}=10\cdot 2^{2013}$ 個；

(ii) A 含有 1,2,3,4,5 中的四個數：這樣的集合 A 有 $C_4^5\cdot 2^{2013}=5\cdot 2^{2013}$ 個；

(iii) A 含有 1,2,3,4,5 中的五個數：這樣的集合 A 有 $C_5^5\cdot 2^{2013}=2^{2013}$ 個。

最後，利用加法原理，集合 A 共有 $(10+5+1)\cdot 2^{2013}=2^{2017}$ 個。

(2) 設 A 爲 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2018\}$ 的子集合，且 A 中所有元素的和爲奇數。此時 A 中的偶數個數完全沒有限制，但奇數的個數必須爲奇數。所以，要決定 A 有多少種可能，只要考慮 A 中的偶數及奇數各有多少種取法即可，討論如下：

(i) 偶數的取法共有

$$C_0^{1009}+C_1^{1009}+C_2^{1009}+\cdots+C_{1009}^{1009}=(1+1)^{1009}=2^{1009}$$

種方法；

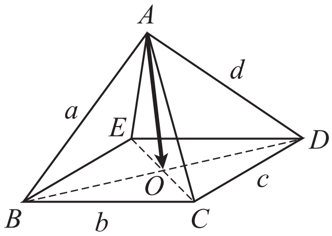
(ii) 奇數的取法共有

$$\begin{aligned}&C_1^{1009}+C_3^{1009}+C_5^{1009}+\cdots+C_{1009}^{1009}\\&=\frac{1}{2}\Big((C_0^{1009}+C_1^{1009}+C_2^{1009}+\cdots+C_{1009}^{1009})-(C_0^{1009}-C_1^{1009}+C_2^{1009}-\cdots-C_{1009}^{1009})\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big((1+1)^{1009}-(1-1)^{1009}\Big)=2^{1008}\end{aligned}$$

種方法。

最後，利用乘法原理可知：集合 A 的個數爲 $2^{1009}\cdot 2^{1008}=2^{2017}$ 。

3.



(1) 首先，

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}\text{ 。}$$

接著，在$\triangle BCD$中，利用內積的定義及餘弦定理，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}&=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BD}|\cos(\angle CBD)\\&=\overline{BC}\times\overline{BD}\times\frac{\overline{BD}^2+b^2-c^2}{2\overline{BC}\times\overline{BD}}=\frac{1}{2}(\overline{BD}^2+b^2-c^2)\end{aligned}$$

同理，考慮$\triangle ABD$，可得

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overline{BD}^2+a^2-d^2)\text{ 。}$$

最後，綜合以上的等式，可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}&=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}\\&=\frac{1}{2}(\overline{BD}^2+b^2-c^2)-\frac{1}{2}(\overline{BD}^2+a^2-d^2)\\&=\frac{1}{2}(b^2-c^2-a^2+d^2)\text{ 。}\end{aligned}$$

(2) 因為「$\overrightarrow{AO}$ 與 $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}$ 垂直」的充要條件為「$\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE})=0$」，所以我們直接考慮 $\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE})$。我們先求 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}$，然後再用同樣的方法求 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CE}$ 。

在$\triangle AOB$中，利用內積的定義及餘弦定理，得

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\angle AOB)=\frac{1}{2}(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2)\text{ 。}$$

同理，考慮$\triangle AOD$，可得

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OD}|\cos(\angle AOD)=\frac{1}{2}(\overline{OA}^2+\overline{OD}^2-\overline{AD}^2)\text{ 。}$$

將以上二式相減，得

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overline{OB}^2-\overline{OD}^2+\overline{AD}^2-\overline{AB}^2)\text{ 。}$$

又因為底面 $BCDE$ 為一平行四邊形，$\overline{OB}=\overline{OD}$，所以

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overline{AD}^2-\overline{AB}^2)\text{ 。}$$

仿照以上的方法，分別考慮$\triangle AOC$及$\triangle AOE$，可得

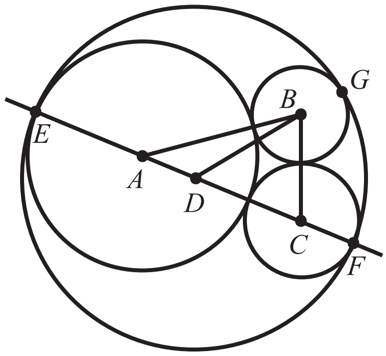
$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overline{AE}^2-\overline{AC}^2)\text{ 。}$$

因此，

$$\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE})=\frac{1}{2}(\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-\overline{AB}^2-\overline{AC}^2)\text{ 。}$$

即$\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE})=0$的充要條件爲$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2$，故得證。

4. (1)



在$\triangle ABC$中，三邊長分別爲$\overline{AB}=a+b$、$\overline{BC}=b+c$、$\overline{CA}=c+a$，其周長的一半爲$s=a+b+c$。利用海龍公式，可得$\triangle ABC$的面積爲

$$\begin{aligned}\Delta ABC&=\sqrt{s(s-(a+b))(s-(b+a))(s-(c+a))}\\&=\sqrt{abc(a+b+c)}\text{ 。}\end{aligned}$$

在$\triangle BCD$中，三邊長分別爲$\overline{BC}=b+c$、$\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{EF}-\overline{CF}=\frac{1}{2}(2a+2c)-c=a$、$\overline{DB}=\overline{DG}-\overline{BG}=a+c-b$，其周長的一半爲$a+c$。利用海龍公式，可得$\triangle BCD$的面積爲

$$\Delta BCD=\sqrt{bc(a-b)(a+c)}\text{ 。}$$

事實上，$\triangle BCD$和$\triangle ABC$具有相同的高，所以$\triangle BCD$的面積也可以表示成

$$\Delta BCD=\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}\times\Delta ABC=\frac{a}{a+c}\sqrt{abc(a+b+c)}\text{ 。}$$

$\boxed{\text{附註}}$由以上$\triangle BCD$面積的兩種表現方式，可知

$$\sqrt{bc(a-b)(a+c)}=\frac{a}{a+c}\sqrt{abc(a+b+c)}\text{ ，}$$

化簡可得

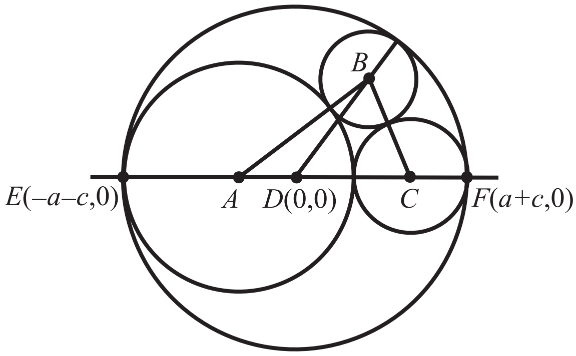
$$(a-b)(a+c)^3=a^3(a+b+c)\text{ ，}$$

或

$$b=\frac{a^2c+ac^2}{a^2+ac+c^2}\text{ 。}$$

(2) [解一]

如圖，以 D 為原點 $(0,\ 0)$ ，$\overline{EF}$ 為 x 軸建立坐標系。設點 B 的坐標為 $B\left(p,h\right)$ ，此時 h 的值就是題目所求「點 B 到直線 EF 的距離」；也就是說，我們必須證明： $h=2b$ 。



由題意可知 $A\left(-c,0\right)$ 、 $C\left(a,0\right)$ 、 $\overline{BA}=a+b$ 、 $\overline{BC}=b+c$ ；再利用兩點距離公式，得

$$\begin{cases}\left(a+b\right)^2=\overline{BA}^2=\left(p+c\right)^2+h^2 & (4.1)\\ \left(b+c\right)^2=\overline{BC}^2=\left(p-a\right)^2+h^2 & (4.2)\end{cases},$$

兩式相減可得

$$\left(p+c\right)^2-\left(p-a\right)^2=\left(a+b\right)^2-\left(b+c\right)^2\text{ ，}$$

整理可得

$$\left(a+c\right)\left(p+c\right)=a^2+ab-bc+ac \qquad (4.3)$$

另外，由 (4.1) 可知

$$h^2=\left(a+b\right)^2-\left(p+c\right)^2=\left[\left(a+b\right)+\left(p+c\right)\right]\left[\left(a+b\right)-\left(p+c\right)\right]\text{ 。}$$

兩邊同乘 $\left(a+c\right)^2$ ，得

$$\left(a+c\right)^2h^2=\left[\left(a+b\right)\left(a+c\right)+\left(a+c\right)\left(p+c\right)\right]\left[\left(a+b\right)\left(a+c\right)-\left(a+c\right)\left(p+c\right)\right]\text{ 。}$$

將 (4.3) 的結果取代上式中的 $\left(a+c\right)\left(p+c\right)$ ，並化簡得

$$\left(a+c\right)^2h^2=4abc\left(a+b+c\right)\text{ ，}$$

因此

$$h^2=\frac{4abc\left(a+b+c\right)}{\left(a+c\right)^2} \qquad (4.4)$$

另外，由 $\cos\angle ADB=-\cos\angle CDB$ 並使用餘弦定理，得

$$\frac{\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-\overline{AB}^2}{2\overline{AD}\cdot\overline{BD}}=-\frac{\overline{CD}^2+\overline{BD}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{CD}\cdot\overline{BD}}\text{ ，}$$

將各線段的長度代入上式（其中$\overline{BD}=a+c-b$），得

$$\frac{c^2+(a+c-b)^2-(a+b)^2}{2c(a+c-b)}=-\frac{a^2+(a+c-b)^2-(b+c)^2}{2a(a+c-b)}\ ,$$

化簡可得

$$b\left(a+c\right)^2=ac\left(a+b+c\right)\ ,$$

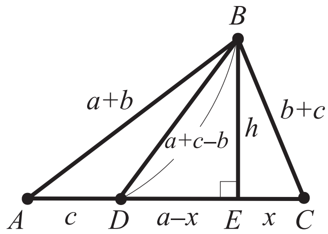
即

$$b^2=\frac{abc\left(a+b+c\right)}{\left(a+c\right)^2} \qquad (4.5)$$

比較(4.4)及(4.5)二式可得$h^2=4b^2$，即點B到x軸（即$\overleftrightarrow{EF}$）的距離等於$h=2b$，故得證。

[解二]

將題目中的圖簡化如下：（目的要證明$h=2b$）



分別針對$\triangle BCE$、$\triangle BDE$、$\triangle BAE$使用畢氏定理，得

$$\begin{cases} h^2=(b+c)^2-x^2 & (4.6)\\ h^2=(a+c-b)^2-(a-x)^2 & (4.7)\\ h^2=(a+b)^2-(a+c-x)^2 & (4.8)\end{cases}\ ,$$

由(4.6)和(4.7)，得

$$(b+c)^2-x^2=(a+c-b)^2-(a-x)^2\ ,$$

整理得

$$ax=ab-ac+2bc \qquad (4.9)$$

同理，由(4.7)和(4.8)，得

$$(a+c-b)^2-(a-x)^2=(a+b)^2-(a+c-x)^2\ ,$$

整理得

$$cx=c^2-2ab-bc+2ac \qquad (4.10)$$

將(4.9)和(4.10)分別乘以c和a，得

$$c(ab-ac+2bc)=acx=a(c^2-2ab-bc+2ac)\ 。$$

整理得

$$abc+a^2b+bc^2=a^2c+ac^2\ 。$$

將兩邊同時加上abc後可改寫爲

$$b(a+c)^2=ac(a+b+c)\ ,$$

即

$$b=\frac{ac(a+b+c)}{(a+c)^2} \qquad (4.11)\ 。$$

接下來，將(4.6)兩邊同乘$(a+c)^2$，得

$$(a+c)^2h^2=(ab+bc+ac+c^2)^2-(ax+cx)^2$$

再將(4.9)和(4.10)代入上式中最後一個平方項，得

$$\begin{aligned}(a+c)^2h^2&=(c^2+ab+bc+ac)^2-(c^2-ab+bc+ac)^2\\&=4abc(a+b+c)\end{aligned}$$

即

$$h^2=\frac{4abc(a+b+c)}{(a+c)^2} \qquad (4.12)\ 。$$

最後，結合(4.11)和(4.12)，得

$$h^2=4b\times\frac{ac(a+b+c)}{(a+c)^2}=4b^2\ ，$$

也就是說，$h=2b$，故得證。

5. (1) 因爲$A_1A_2\cdots A_{107}$爲單位圓內的內接正多邊形，所以$A_1, A_2, \cdots, A_{107}$爲單位圓上的107個等分點。不失一般性，可設$A_1, A_2, \cdots, A_{107}$的複數坐標分別爲方程式

$$z^{107}-1=0$$

的根

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^{106}\ ，$$

其中$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{107}+i\sin\dfrac{2\pi}{107}$。此時，

$$z^{107}-1=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{106})\ ，$$

兩邊同除以$z-1$，得

$$z^{106}+z^{105}+\cdots+z+1=(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{106})\ ，$$

其中，當$z=1$時，我們有

$$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{106})=107\ 。$$

接下來，由複數的幾何意義，可知

$$\overline{A_1A_2}=|1-\omega|,\ \overline{A_1A_3}=|1-\omega^2|,\ \cdots,\ \overline{A_1A_{107}}=|1-\omega^{106}|\ 。$$

因此，

$$\begin{aligned}\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\times\cdots\times\overline{A_1A_{107}}&=|1-\omega|\times|1-\omega^2|\times\cdots\times|1-\omega^{106}|\\&=|(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{106})|\\&=107\ 。\end{aligned}$$

(2) 設點 P 所代表的複數坐標爲 z 。因爲點 P 在單位圓上，所以 $|z|=1$ 。如同(1)的理由，我們有

$$\begin{aligned}\overline{PA_1}\times\overline{PA_2}\times\cdots\times\overline{PA_{107}} &= |z-1|\times|z-\omega|\times\cdots\times|z-\omega^{106}| \\ &= |z^{107}-1|.\end{aligned}$$

再由三角不等式，可得

$$\overline{PA_1}\times\overline{PA_2}\times\cdots\times\overline{PA_{107}} \le |z|^{107}+1=2 \text{ 。}$$

當 $z=-1$ 時，上式不等式的等號成立；因此，$\overline{PA_1}\times\overline{PA_2}\times\cdots\times\overline{PA_{107}}$ 的最大值爲 2 。

筆試二、填充題

1. [解一]

令 $y=f(x)=\dfrac{2ax+b}{x^2+1}$ ，其中 x 爲實數，則 $yx^2+y=2ax+b$ 。移項得

$$yx^2-2ax+(y-b)=0. \qquad (1.1)$$

(1) 當 $y=0$ 時，$2ax+b=0$ ，解得 $x=-\dfrac{b}{2a}$ ，即 y 的值可爲 0。

(2) 當 $y\neq 0$ 時，(1.1) 式爲 x 的一元二次方程式。因爲 x 爲實數，所以 (1.1) 式的兩個根爲實根，因此其判別式大於或等於 0，即

$$(-2a)^2-4y(y-b)\ge 0 \text{ ，}$$

整理得

$$y^2-by-a^2\le 0. \qquad (1.2)$$

又因爲 y 的最大值爲 4 ，最小值爲 -1 ，所以 $-1\le y\le 4$ 。因此

$$(y+1)(y-4)\le 0 \Rightarrow y^2-3y-4\le 0 \text{ 。}$$

與 (1.2) 式比較係數，得

$$-b=-3 \text{ 且 } -a^2=-4 \text{ ，}$$

解得 $a=\pm 2, b=3$ 。

[解二]

由題設可明顯看出 $a\neq 0$ 。令 $g(x)=2ax+b$ ，$h(x)=x^2+1$ ，則 $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ ，其中 x 爲實數。

(1) 因爲 $f\left(x\right)=\dfrac{g(x)}{h(x)}\ge -1$ ，對所有 x 都成立，即 $-g\left(x\right)\le h(x)$ ，對所有 x 都成立，所以 $-g\left(x\right)$ 的函數圖形（一直線）恆在 $h(x)$ 的函數圖形（拋物線）下方；因此，當 $f\left(x\right)$ 最小值 -1 發生時，直線剛好會與拋物線相切，也就是說，方程式 $-g\left(x\right)=h(x)$ 恰有一解，即方程式 $-2ax-b=x^2+1$ 恰有一解，因此，判別式

$$4a^2-4(1+b)=0. \qquad (1.3)$$

(2) 同理，因爲 $f\left(x\right)=\dfrac{g(x)}{h(x)}\le 4$ ，對所有 x 都成立，即 $g\left(x\right)\le 4h(x)$ ，對所有 x 都成立，所以 $g\left(x\right)$ 的函數圖形恆在 $4h(x)$ 的函數圖形下方；因此，當 $f\left(x\right)$ 最大值 4 發生時，兩圖形剛好相切，也就是說，方程式 $g\left(x\right)=4h(x)$ 恰有一解，即方程式 $2ax+b=4(x^2+1)$ 恰有一解，因此，判別式

$$4a^2-16(4-b)=0. \qquad (1.4)$$

將 (1.3) 式與 (1.4) 式相減，得 $b=3$ 。

[解三]

因爲 $x\in\mathbb{R}$ ，所以可以假設 $x=\tan\theta$ ，其中 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 。原式可改寫爲

$$\begin{aligned}\frac{2ax+b}{x^2+1}&=\frac{2a\tan\theta+b}{\tan^2\theta+1}=\frac{2a\tan\theta+b}{\sec^2\theta}\\&=\cos^2\theta\left(2a\tan\theta+b\right)=2a\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta\\&=a\sin 2\theta+b\left(\frac{\cos 2\theta+1}{2}\right)=a\sin 2\theta+\frac{b}{2}\cos 2\theta+\frac{b}{2}\\&=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}\sin\left(2\theta+\phi\right)+\frac{b}{2},\end{aligned}$$

其中 $\cos\phi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+\dfrac{b^2}{4}}}$ ， $\sin\phi=\dfrac{\dfrac{b}{2}}{\sqrt{a^2+\dfrac{b^2}{4}}}$ 。

因爲 $-1\le\sin\left(2\theta+\phi\right)\le 1$ ，所以

$$-\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}+\frac{b}{2}\le\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}\sin\left(2\theta+\phi\right)+\frac{b}{2}\le\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}+\frac{b}{2}\ ,$$

即 $\dfrac{2ax+b}{x^2+1}$ 的最大值爲 $\sqrt{a^2+\dfrac{b^2}{4}}+\dfrac{b}{2}$ ，最小值爲 $-\sqrt{a^2+\dfrac{b^2}{4}}+\dfrac{b}{2}$ 。

依題意，最大值爲 4 ，最小值爲 -1 ，兩者的和爲 3 ，也就是說，

$$\left(\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}+\frac{b}{2}\right)+\left(-\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}+\frac{b}{2}\right)=3\ ,$$

即 $b=3$ 。

2. 令$a=2^{-x}$並將原不等式改寫為

$$a^3+\frac{1}{4}\le a+\frac{a^2}{4}\ 。$$

化簡並分解得

$$(a+1)(4a-1)(a-1)\le 0\ 。$$

因此，

$$a\le -1\text{或}\frac{1}{4}\le a\le 1\ ，$$

即

$$2^{-x}\le -1\text{（不合）或}\frac{1}{4}\le 2^{-x}\le 1\ ，$$

解得$0\le x\le 2$。

3. [解一]

因為$\overrightarrow{CA}=(-1,\ k-3,\ 3)$與$\overrightarrow{CB}=(k-3,\ -2,\ 4)$不平行，所以$A, B, C$三點會構成一平面$E$；

而且$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$是此平面$E$的一個法向量，其中

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}&=(-1,\ k-3,\ 3)\times(k-3,\ -2,\ 4)\\&=\left(\begin{vmatrix}k-3 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & k-3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-1 & k-3\\ k-3 & -2\end{vmatrix}\right)\\&=(4k-6,\ 3k-5,\ 2-(k-3)^2).\end{aligned}$$

又因為投影點A'、B'、C'三點共線，所以平面E會與平面$2x+y=0$垂直；因此，兩平面的法向量會互相垂直，即

$$\overrightarrow{n}\perp(2,\ 1,\ 0)\ ，$$

也就是說，

$$(4k-6,\ 3k-5,\ 2-(k-3)^2)\cdot(2,\ 1,\ 0)=0\ 。$$

利用內積公式展開得，

$$2(4k-6)+(3k-5)=0\ ，$$

解得$k=\dfrac{17}{11}$。

[解二]

由題意可知$\overrightarrow{CA}=\left(-1,\ k-3,\ 3\right)$，$\overrightarrow{CB}=\left(k-3,\ -2,\ 4\right)$且$\overrightarrow{n}=\left(2,\ 1,\ 0\right)$為平面$2x+y=0$的一個法向量。因為投影點$A', B', C'$三點共線，所以$A, B, C, A', B', C'$六點必共平面，且此平面的法向量會同時平行於$\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{CA}$及$\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{CB}$，故

$$\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{CA} \text{ 與 } \overrightarrow{n}\times\overrightarrow{CB} \text{ 平行。}$$

又因為 $\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{CA}=(3,\ -6,\ 2k-5)$ 且 $\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{CB}=(4,\ -8,\ -1-k)$，所以

$$\frac{3}{4}=\frac{-6}{-8}=\frac{2k-5}{-1-k}\ ,$$

可求得 $k=\dfrac{17}{11}$。

[解三]

承解二的想法，由 A,B,C,A',B',C' 六點必共平面可知 $\overrightarrow{n},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$ 所張的平行六面體體積為 0，所以

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & k-3 & 3 \\ k-3 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

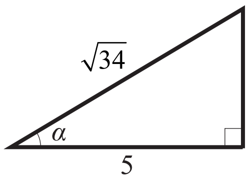
可求得 $k=\dfrac{17}{11}$。

4. [解一]

將橢圓方程式：$4x^2+y^2-8x-4y+4=0$ 改寫為橢圓標準式，得

$$\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{4}=1\ 。$$

利用橢圓的參數式，設 $x=1+\cos\theta,\ y=2+2\sin\theta\ (0\le\theta<2\pi)$。因此



$$\begin{aligned} 6x+5y+1 &= 6(1+\cos\theta)+5(2+2\sin\theta)+1 \\ &= 10\sin\theta+6\cos\theta+17 \\ &= \sqrt{10^2+6^2}\left(\frac{10}{\sqrt{10^2+6^2}}\sin\theta+\frac{6}{\sqrt{10^2+6^2}}\cos\theta\right)+17 \\ &= 2\sqrt{34}\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\sin\theta+\frac{3}{\sqrt{34}}\cos\theta\right)+17 \end{aligned}$$

令 $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{34}},\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$，得

$$\begin{aligned} 6x+5y+1 &= 2\sqrt{34}\left(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha\right)+17 \\ &= 2\sqrt{34}\sin(\theta+\alpha)+17\ . \end{aligned}$$

故 $6x+5y+1$ 的最大值為 $2\sqrt{34}+17$。

[解二]

橢圓方程式 $4x^2+y^2-8x-4y+4=0$ 可改寫爲 $(2x-2)^2+(y-2)^2=4$ 。

由柯西不等式，得

$$\left[3(2x-2)+5(y-2)\right]^2\le(3^2+5^2)\left[(2x-2)^2+(y-2)^2\right]，$$

整理得

$$(6x+5y-16)^2\le 34\times 4，$$

即

$$-2\sqrt{34}\le 6x+5y-16\le 2\sqrt{34} 。$$

因此

$$17-2\sqrt{34}\le 6x+5y+1\le 17+2\sqrt{34} 。$$

故 $6x+5y+1$ 的最大值爲 $17+2\sqrt{34}$ 。（此時 $x=1+\frac{3\sqrt{34}}{34}$ ，$y=2+\frac{10\sqrt{34}}{34}$ ）

[解三]

令 $6x+5y+1=k$ ，則 k 的極值會發生在直線 $6x+5y+1=k$ 與橢圓相切處。假設直線 $6x+5y+1=k$ 與橢圓 $4x^2+y^2-8x-4y+4=0$ 相切，此時聯立方程組

$$\begin{cases}6x+5y+1=k & (4.1)\\ 4x^2+y^2-8x-4y+4=0 & (4.2)\end{cases},$$

恰有一組解 (x, y) 。

由 (4.1) 式得 $y=-\frac{6}{5}x+\frac{k-1}{5}$ ，代入 (4.2) 式得

$$4x^2+(-\frac{6}{5}x+\frac{k-1}{5})^2-8x-4(-\frac{6}{5}x+\frac{k-1}{5})+4=0，$$

化簡整理得

$$\frac{136}{25}x^2-(\frac{12(k-1)}{25}+\frac{16}{5})x+((\frac{k-1}{5})^2-\frac{4(k-1)}{5}+4)=0 \qquad (4.3)$$

因爲方程式 (4.3) 恰有一解，所以其判別式爲 0 ，即

$$(\frac{12(k-1)}{25}+\frac{16}{5})^2-4\times\frac{136}{25}\times((\frac{k-1}{5})^2-\frac{4(k-1)}{5}+4)=0，$$

移項並改寫爲

$$(\frac{12k+68}{25})^2=4\times\frac{136}{25}\times(\frac{k-1}{5}-2)^2，$$

兩邊同時開平方根得

$$\frac{12k+68}{25}=\pm\frac{4\sqrt{34}}{5}(\frac{k-11}{5})，$$

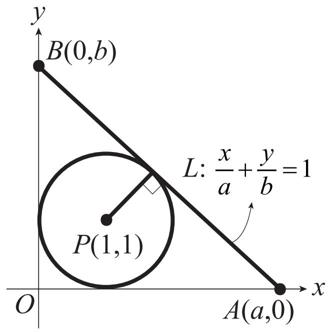
即

$$3k+17=\pm\sqrt{34}(k-11)\ ，$$

取正號可解得k的最大值$17+2\sqrt{34}$ 。

5. [解一]

如圖，圓$C: x^2+y^2-2x-2y+1=0$的圓心為$P(1,1)$ 。



因為切線L過$A(a,0)$與$B(0,b)$兩點，由截距式可知其方程式為$L: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即$L: bx+ay-ab=0$。另外，圓心$P$到切線$L$的距離等於圓的半徑，根據點到直線的距離公式可知

$$\frac{|b+a-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\ ，$$

移項平方整理可得

$$ab(ab-2a-2b+2)=0\ 。$$

因為$a\neq 0$且$b\neq 0$，所以

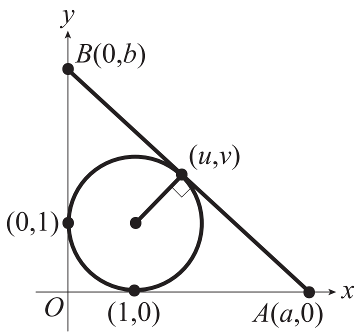
$$ab-2a-2b+2=0\ ，$$

即

$$(a-2)(b-2)=2\ 。$$

[解二]

如圖，設切線L與圓$C: x^2+y^2-2x-2y+1=0$相切於點(u, v)；由題設$a>2$，$b>2$可知$u\neq 1$且$v\neq 1$。



因爲圓心$(1,\ 1)$與切點$(u,\ v)$的連線垂直於切線L，所以L的斜率可以表示爲$-\dfrac{u-1}{v-1}$且L的直線方程式爲

$$y-v=-\frac{u-1}{v-1}(x-u)\ 。$$

因此，直線L分別與x軸、y軸的交點坐標爲

$$A(u+\frac{v-1}{u-1}v,\ 0)\text{與}B(0,\ v+\frac{u-1}{v-1}u)\ ，$$

即

$$a=u+\frac{v-1}{u-1}v\text{與}b=v+\frac{u-1}{v-1}u\ 。$$

故

$$\begin{aligned}&(a-2)(b-2)\\&=(u+\frac{v-1}{u-1}v-2)(v+\frac{u-1}{v-1}u-2)\\&=\frac{1}{(u-1)(v-1)}(u^2-u+v^2-v-2(u-1))(v^2-v+u^2-u-2(v-1))\end{aligned}$$

又因爲點$(u,\ v)$位於圓C上，所以$u^2+v^2=2u+2v-1$，代入上式化簡可得

$$(a-2)(b-2)=\frac{1}{(u-1)(v-1)}(2(u-1)(v-1))=2\ 。$$

[解三]

由圓的標準式$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$，可設切點爲$\left(1+\cos\theta,1+\sin\theta\right)$。

根據圓的切線公式$\left(x_0-h\right)\left(x-h\right)+\left(y_0-k\right)\left(y-k\right)=r^2$，得切線的方程式爲

$$\cos\theta\left(x-1\right)+\sin\theta\left(y-1\right)=1\Rightarrow x\cos\theta+y\sin\theta=1+\sin\theta+\cos\theta\ 。$$

因此，可得$a=\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta},\ b=\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}$。故

$$\begin{aligned}\left(a-2\right)\left(b-2\right)&=\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}\times\frac{1-\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{1^2-\left(\sin\theta-\cos\theta\right)^2}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1-\left(1-2\sin\theta\cos\theta\right)}{\sin\theta\cos\theta}\\&=2.\end{aligned}$$

（附註：本題的條件$a>2$及$b>2$並非必要條件，而是可以弱化的；只要要求切線L與x軸、y軸都恰交於一點即可。）

6. 設U,B,C分別表示「全部走法」、「經 B 點」與「經 C 點」的路徑組成的集合。根據取捨原理，所求路徑總數為

$$\begin{aligned} n(U)-n(B\cup C) &= n(U)-\big(n(B)+n(C)-n(B\cap C)\big) \\ &= \frac{11!}{7!4!}-\frac{5!}{3!2!}\times\frac{6!}{4!2!}-\frac{8!}{5!3!}\times\frac{3!}{2!1!}+\frac{5!}{3!2!}\times\frac{3!}{2!1!}\times\frac{3!}{2!1!} \\ &= 102。\end{aligned}$$

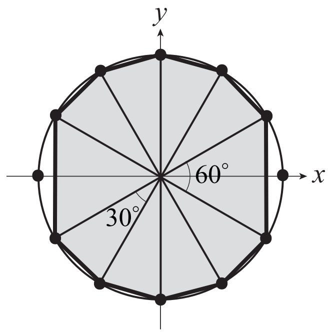
7. 將$N=1,2,3,4,5,6$六種情形逐一討論並加總起來，得所求機率為

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\times((\frac{5}{6})^i-(\frac{4}{6})^i)$$

計算後得$\frac{23345}{93312}$。

8. 將方程式$x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=0$兩邊同乘$x^2-1$可得方程式$x^{12}-1=0$。方程式$x^{12}-1=0$的十二個根為單位圓（半徑為1的圓）上的十二個等分點；此時將等分點中的1和-1移除，剩餘的十個點即為方程式$x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=0$的十個根。因此，這十個根所圍成的十邊形面積（如圖所示）為

$$8\times(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin30^\circ)+2\times(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin60^\circ)=2+\frac{\sqrt{3}}{2}。$$



9. 首先，橢圓$C:\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}=6$的兩焦點為$(1,\ 1)$與$(5,\ 4)$，且其長軸的長為$6$；其兩焦點距離為$\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=5$且短軸長為

$$2\sqrt{3^2-(\frac{5}{2})^2}=\sqrt{11}。$$

再由題目的假設可知：雙曲線Γ的兩焦點亦為$(1,\ 1)$與$(5,\ 4)$，兩焦點距離為5且其共軛軸的長為$\sqrt{11}$；所以雙曲線的貫軸長為

$$2\sqrt{(\frac{5}{2})^2-(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}=\sqrt{14}。$$

最後，由雙曲線的定義，得Γ的方程式為

$$|\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}|=\sqrt{14}。$$

10. 因爲 $\tan\alpha$ 與 $\tan\beta$ 爲 $3x^2-7x+1=0$ 的兩根，所以由根與係數的關係，得

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{7}{3} \text{ 且 } \tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{3} \text{ 。}$$

再由 tan 的和角公式，得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{7}{2} \text{ ，}$$

並進而求得

$$\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\frac{1}{1+(\frac{7}{2})^2}=\frac{4}{53} \text{ 。}$$

故所求

$$\begin{aligned}&\sin^2(\alpha+\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-3\cos^2(\alpha+\beta)\\&=\cos^2(\alpha+\beta)(\tan^2(\alpha+\beta)-2\tan(\alpha+\beta)-3)\\&=\frac{4}{53}(\frac{49}{4}-7-3)=\frac{9}{53}.\end{aligned}$$

拉瑪奴姜恆等式證明

李維昌／宜蘭高中退休教師

一、研究目的》

上個世紀初期，當印度數學家拉瑪奴姜在英國留學時，他的老師哈代常常好奇的問說「你每天早上一起床，就寫下這麼多的恆等式，到底是如何發生的？」拉瑪奴姜總是說「那些是昨晚神明託夢給我的。」例如，其中一個等式 $\sqrt[3]{\sec 40°}+\sqrt[3]{\sec 80°}-\sqrt[3]{\sec 20°}=\sqrt[3]{6(\sqrt[3]{9}-1)}$ ，本文試圖去證明上述等式達人拉瑪奴姜的等式，以下是證明的過程。

二、研究過程》

1. 構造以 $\alpha=\sec 40°$ ，$\beta=\sec 80°$ ，$\gamma=\sec 160°$ 爲三根的一元三次方程式，由三倍角公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ 得知：

(1) 以 $\theta=40°$ 代入得 $-\frac{1}{2}=4\cos^3 40°-3\cos 40°$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}=4\frac{1}{\sec^3 40°}-3\frac{1}{\sec 40°}\Rightarrow \sec^3 40°-6\sec^2 40°+8=0$$ 。

(2) 以 $\theta=80°$ 代入得 $-\frac{1}{2}=4\cos^3 80°-3\cos 80°$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}=4\frac{1}{\sec^3 80°}-3\frac{1}{\sec 80°}\Rightarrow \sec^3 80°-6\sec^2 80°+8=0$$ 。

(3) 以 $\theta=160°$ 代入得 $-\frac{1}{2}=4\cos^3 160°-3\cos 160°$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}=4\frac{1}{\sec^3 160°}-3\frac{1}{\sec 160°}\Rightarrow \sec^3 160°-6\sec^2 160°+8=0$$ 。

(4) 由(1)(2)(3)得知
以 $\alpha=\sec 40°$ ，$\beta=\sec 80°$ ，$\gamma=\sec 160°$ 爲三根的一元三次方程式
是 $x^3-6x^2+8=0\Rightarrow \alpha\beta\gamma=\sec 40°\cdot\sec 80°\cdot\sec 160°=-8$ 。

2. 構造以 $\alpha^{\frac{1}{3}}=(\sec 40°)^{\frac{1}{3}}$ ，$\beta^{\frac{1}{3}}=(\sec 80°)^{\frac{1}{3}}$ ，$\gamma^{\frac{1}{3}}=(\sec 160°)^{\frac{1}{3}}$ 爲三根的一元三次方程式

(1) 設 $a=\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=(\sec 40°)^{\frac{1}{3}}+(\sec 80°)^{\frac{1}{3}}+(\sec 160°)^{\frac{1}{3}}$ 。

(2) 設 $b=(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}+(\beta\gamma)^{\frac{1}{3}}+(\gamma\alpha)^{\frac{1}{3}}$

$$=(\sec 40°\cdot\sec 80°)^{\frac{1}{3}}+(\sec 80°\cdot\sec 160°)^{\frac{1}{3}}+(\sec 160°\cdot\sec 40°)^{\frac{1}{3}}$$ 。

(3) 設 $c=(\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{3}}=(\sec 40^\circ\cdot\sec 80^\circ\cdot\sec 160^\circ)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 。

(4) 由(1)(2)(3)得知以 $\alpha^{\frac{1}{3}}$ ，$\beta^{\frac{1}{3}}$ ，$\gamma^{\frac{1}{3}}$ 爲三根的一元三次方程式

是 $z^3-az^2+bz+2=0 \Rightarrow z^3+2=z(az-b)$ 。

3. $x=z^3$ 且 $x^3-6x^2+8=0 \Rightarrow (z^3)^3-6(z^3)^2+8=0 \Rightarrow z^9-6z^6+8=0$ 。

4. 由 2.得知 $z^3+2=z(az-b) \Rightarrow (z^3+2)^3=z^3(az-b)^3$

$\Rightarrow z^9+6z^6+12z^3+8=z^3\cdot[a^3z^3-3abz(az-b)-b^3]$

$\Rightarrow z^9+6z^6+12z^3+8=z^3\cdot[a^3z^3-3ab(z^3+2)-b^3]$

$\Rightarrow z^9+(6-a^3+3ab)z^6+(12+6ab+b^3)z^3+8=0$ 。

5. 由 3～4 得知 $z^9-6z^6+8=0$ 與 $z^9+(6-a^3+3ab)z^6+(12+6ab+b^3)z^3+8=0$

爲同一個方程式

由比較係數可得 $\begin{cases} -6=6-a^3+3ab\cdots\cdots① \\ 0=12+6ab+b^3\cdots\cdots② \end{cases}$

②式$-2\times$①式 $\Rightarrow 12=b^3+2a^3 \Rightarrow b^3=12-2a^3\cdots\cdots③$

由①式 $\Rightarrow a^3-12=3ab \Rightarrow (a^3-12)^3=27a^3b^3\cdots\cdots④$

將③式代入④式得

$$(a^3-12)^3=27a^3(12-2a^3)$$
$$\Rightarrow a^9-36a^6+432a^3-12^3=324a^3-54a^6$$
$$\Rightarrow a^9+18a^6+108a^3-12^3=0$$
$$\Rightarrow a^9+18a^6+108a^3+6^3=12^3+6^3$$
$$\Rightarrow (a^3+6)^3=6^3(2^3+1)$$

因爲 a 爲實數，所以 (a^3+6) 爲實數

$$\Rightarrow a^3+6=6\sqrt[3]{9} \text{ 或 } 6\sqrt[3]{9}\cdot\omega \text{（不合）或 } 6\sqrt[3]{9}\cdot\omega^2 \text{（不合）}$$
$$\Rightarrow a^3=6(\sqrt[3]{9}-1)$$
$$\Rightarrow a=\sqrt[3]{6(\sqrt[3]{9}-1)}$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{\sec 40^\circ}+\sqrt[3]{\sec 80^\circ}+\sqrt[3]{\sec 160^\circ}=\sqrt[3]{6(\sqrt[3]{9}-1)}$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{\sec 40^\circ}+\sqrt[3]{\sec 80^\circ}-\sqrt[3]{\sec 20^\circ}=\sqrt[3]{6(\sqrt[3]{9}-1)}$$

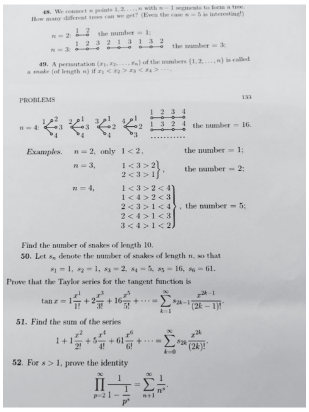
得證拉瑪奴姜恆等式。

蛇形排列

陳敏晧／蘭陽女中數學科教師

一、前言》

俄國數學家弗拉基米爾·阿諾爾德（Vladimir Igorevich Arnold,1937-2010）在其著作《演講和問題（*Lectures and Problems: A Gift to Young Mathematicians*）》的第四部分「給 5 歲到 15 歲的問題」中的第 49,50,51 題提及蛇形排列（如圖一）。[1]引起我很大的學習興趣。



48. We connect n points $1,2,\ldots,n$ with $n-1$ segments to form a tree. How many different trees can we get? (Even the case $n=5$ is interesting!)

$n=2$: 1 2 the number = 1;

$n=3$: 1 2 3　2 1 3　1 3 2 the number = 3;

49. A permutation $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ of the numbers $\{1,2,\ldots,n\}$ is called a *snake* (of length n) if $x_1<x_2>x_3<x_4>\cdots$.

PROBLEMS 133

$n=4$: 1 2 3 4　1 3 2 4　the number = 16.

Examples. $n=2$, only $1<2$, the number = 1;

$n=3$, $\left.\begin{matrix}1<3>2\\2<3>1\end{matrix}\right\}$, the number = 2;

$n=4$, $\left.\begin{matrix}1<3>2<4\\1<4>2<3\\2<3>1<4\\2<4>1<3\\3<4>1<2\end{matrix}\right\}$, the number = 5;

Find the number of snakes of length 10.

50. Let s_n denote the number of snakes of length n, so that

$$s_1=1,\ s_2=1,\ s_3=2,\ s_4=5,\ s_5=16,\ s_6=61.$$

Prove that the Taylor series for the tangent function is

$$\tan x=1\frac{x^1}{1!}+2\frac{x^3}{3!}+16\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}s_{2k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

51. Find the sum of the series

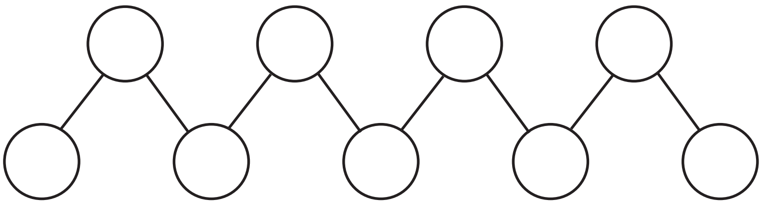
$$1+1\frac{x^2}{2!}+5\frac{x^4}{4!}+61\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}s_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

52. For $s>1$, prove the identity

$$\prod_{p=2}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

圖一

從 1 到 n 的自然數的排列中，若相鄰的項以遞增－遞減（up-down）交錯排列，則稱為蛇形排列（Snake Permutation），例如：$n=1$時，蛇形排列只有一種可能$[1]$；$n=2$時，蛇形排列只有一種可能$[1,2]$；$n=3$時，蛇形排列有兩種可能$[1,3,2],[2,3,1]$，因為$1<3>2,2<3>1$；$n=4$時，蛇形排列則有五種可能$[1,3,2,4],[2,3,1,4],[1,4,2,3],[2,4,1,3],[3,4,1,2]$，因為$1<3>2<4$，$2<3>1<4,1<4>2<3,2<4>1<3,3<4>1<2$，概其排列形式宛若條蛇，稱此排列為蛇形排列。如圖二所示。

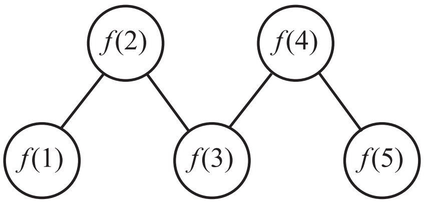


圖二

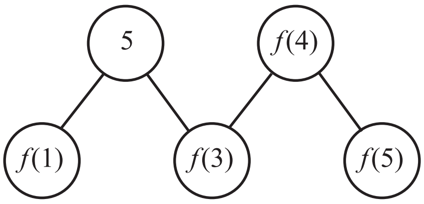
[1] 感謝中研院數學所李國偉教授的臉書（**Facebook**）的分享，讓筆者有機會學習到蛇形排列的數學相關知識。

二、尋找$S_5=?$》

爲了方便討論，我們定義n個正整數的蛇形排列數爲S_n，根據前言，$S_1=1,S_2=1,S_3=2,$ $S_4=5,\ldots$ 接著定義第n個位置的數爲$f(n)$，$n=3$時，蛇形排列$[1,3,2]=[f(1),f(2),f(3)]$, $[2,3,1]=[f(1),f(2),f(3)]$，而$[1,3,2,4]$的蛇形排列$f(4)=4$，接著尋找$S_5=?$由於蛇形排列是遞增－遞減的交錯排列，即



因爲$f(2)>f(1),f(2)>f(3),f(4)>f(3),f(4)>f(5)$，而 1,2,3,4,5 中最大的數是 5，因此，$f(2)=5$或$f(4)=5$，令$f(2)=5$，即

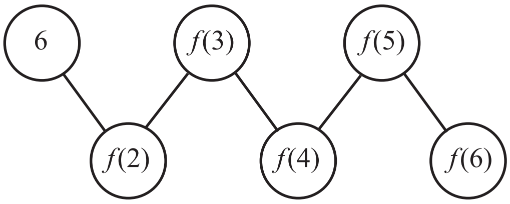


而$\{f(1),f(3),f(4),f(5)\}=\{1,2,3,4\}$，先決定$f(1)$的值，再從剩下三個數，取最大值即$f(4)$，最後兩個數爲$f(3),f(5)$，因此，方法數爲$C_1^4\times1\times2!=8$；$f(4)=5$的方法數，同理可證，所以，$S_5=2\times8=16$。

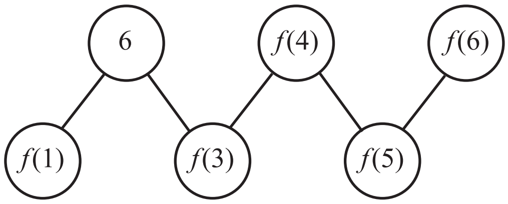
三、尋找一般項$S_n=?$》

首先證明若從 1 到 n 的自然數相鄰的項以遞減－遞增（down-up）的交錯排列，其排列數S'_n與S_n相同，定義第n個位置的數爲$f'(n)=n+1-f(n)$，例如：$n=4$的其中一種可能$[1,3,2,4]$，若以遞減－遞增排列則爲$[5-1,5-3,5-2,5-4]=[4,2,3,1]$，其餘四種$[5-2,5-3,5-1,5-4]=[3,2,4,1],[5-1,5-4,5-2,5-3]=[4,1,3,2]$
$[5-2,5-4,5-1,5-3]=[3,1,4,2],[5-3,5-4,5-1,5-2]=[2,1,4,3]$，因爲$f'(n)=n+1-f(n)$，所以，$f\to f'$是 1-1 且爲映成（onto）函數，即對射（bijective）函數，因此，函數個數$S_n=S'_n$。

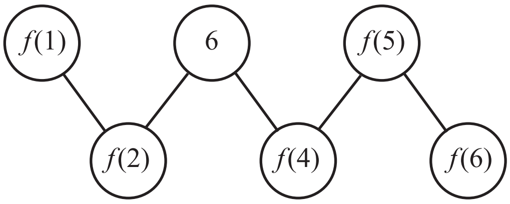
現在考慮$n=6$的兩種排列（遞增－遞減；遞減－遞增），首先確定最大數6所在的位置：



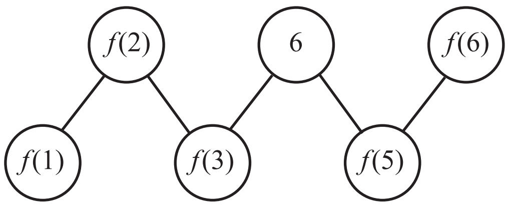
因爲 6 的左邊的排列數爲$S_0=1$；6 的右邊爲遞增－遞減，其排列數爲$S_5=16$，所以，排列數$=C_0^5 S_0 S_5=1\times1\times16=16$。



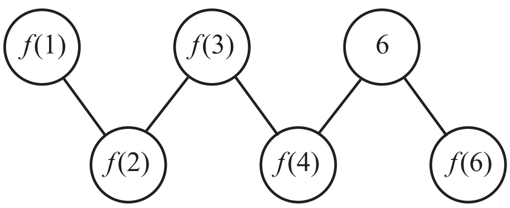
先從 1,2,3,4,5 選出一個數，填入$f(1)$，選法爲C_1^5，因爲 6 的左邊的排列數爲$S_1=1$；6 的右邊爲遞增－遞減，其排列數爲$S_4=5$，所以，排列數$=C_1^5\times S_1\times S_4=5\times1\times5=25$。



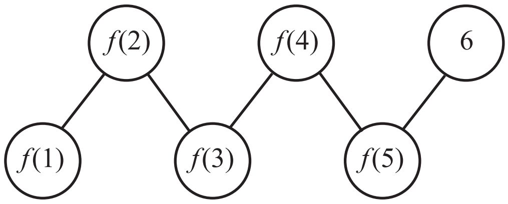
先從 1,2,3,4,5 選出兩個數，填入$f(1), f(2)$，選法爲C_2^5，因爲 6 的左邊爲遞減－遞增，其排列數爲S_2'，又$S_2'=S_2=1$；6 的右邊爲遞增－遞減，其排列數爲$S_3=2$，所以，排列數$=C_2^5\times S_2'\times S_3=C_2^5\times S_2\times S_3=10\times1\times2=20$。



先從 1,2,3,4,5 選出三個數，填入$f(1), f(2), f(3)$，選法爲C_3^5，因爲 6 的左邊爲遞增－遞減，其排列數爲S_3；6 的右邊爲遞增－遞減，其排列數爲S_2，所以，排列數$=C_3^5\times S_3\times S_2=10\times2\times1=20$。



先從 1,2,3,4,5 選出四個數，填入 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ ，選法爲 C_4^5 ，因爲 6 的左邊爲遞減－遞增，其排列數爲 $S_4' = S_4 = 5$ ；6 的右邊其排列數爲 S_1 ，所以，排列數 $= C_4^5 \times S_4' \times S_1 = C_4^5 \times S_4 \times S_1 = 5 \times 5 \times 1 = 25$ 。



先從 1,2,3,4,5 選出五個數，填入 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ ，選法爲 C_5^5 ，因爲 6 的左邊爲遞增－遞減，其排列數爲 $S_5 = 16$ ；6 的右邊其排列數爲 S_0 ，所以，排列數 $= C_5^5 S_5 S_0 = 1 \times 16 \times 1 = 16$ ，所以，

$$\begin{aligned}
& S_6 + S_6' \\
&= C_0^5 S_0 S_5 + C_1^5 S_1 S_4 + C_2^5 S_2 S_3 + C_3^5 S_3 S_2 + C_4^5 S_4 S_1 + C_5^5 S_5 S_0 \\
&= 16 + 25 + 20 + 20 + 25 + 16 \\
&= 122 \\
&= \sum_{k=0}^{5} C_k^5 S_k S_{5-k}
\end{aligned}$$

由此可推論：

$$S_n + S_n' = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} S_k S_{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k! \times (n-1-k)!} S_k S_{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)! \times \frac{S_k}{k!} \times \frac{S_{n-1-k}}{(n-1-k)!}$$

爲了消去 $(n-1)!$ ，令 $a_k = \frac{S_k}{k!}$ ，又 $S_n = S_n'$ ，得 $2S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)! \times a_k \times a_{n-1-k}$ ，移項得 $\frac{2S_n}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \times a_{n-1-k}$ ，左式分子分母同乘 n ，得 $\frac{2S_n \times n}{(n-1)! \times n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \times a_{n-1-k}$ ，整理得 $2na_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \times a_{n-1-k}$ ，假設 $f(x)$ 是 a_n 的生成函數（Generating Function），因此，$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{S_k}{k!} x^k$ ，將 $f(x)$ 自乘兩次，即

$$\begin{aligned}
& [f(x)]^2 = f(x) \times f(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) \\
&= {a_0}^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0) x + (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) x^2 + (a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0) x^3 + \cdots \\
&= {a_0}^2 + 2 \times 2 \times a_2 x + 2 \times 3 a_3 x^2 + 2 \times 4 a_4 x^3 + \cdots \\
&= {a_0}^2 + 2(2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots) \\
&= {a_0}^2 + 2[f'(x) - a_1] \\
&= 1^2 + 2[f'(x) - 1] \\
&= 2f'(x) - 1
\end{aligned}$$

令 $y=f(x)$ ，上式可改爲 $y^2=2y'-1$ ，移項得 $\frac{1}{2}=\frac{y'}{1+y^2}$ ，左右對 x 積分得 $\frac{1}{2}x+c=\tan^{-1}y$ ，其中 c 爲常數，左右掛 tan ，得 $\tan(\frac{1}{2}x+c)=\tan(\tan^{-1}y)=y=f(x)$ ，當 $x=0$ 代入，$f(0)=\tan c=1$ ，即 $c=\frac{\pi}{4}$ ，因此，

$$f(x)=\tan(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots①$$

令 x 用 $-x$ 代入，

$$f(-x)=\tan(-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})=a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\cdots\cdots②$$

由①+②得

$$\tan(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})+\tan(-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{x}{2}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}+\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}+\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2+(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2})}{\cos(2\times\frac{x}{2})}=\frac{2}{\cos x}$$

$$=2\sec x$$

即 $2\sec x=2(a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots)$ ，所以， $\sec x=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots$ ，由於 $a_n=\frac{S_n}{n!}$ ，得 $S_{2n}=(2n)!\times a_{2n}$ ，最後得 $S_{2n}=\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\sec x\Big|_{x=0}$ 。

同理可得，
由①–② 得

$$\tan(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})-\tan(-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{x}{2}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}-\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}-\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}-\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2-(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos(2\times\frac{x}{2})}=\frac{2\sin(2\cdot\frac{x}{2})}{\cos x}$$

$$=2\tan x$$

即 $2\tan x=2(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots)$ ，

所以， $\tan x=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$ ，由於 $a_{2n+1}=\frac{S_{2n+1}}{(2n+1)!}$ ，得

$S_{2n+1}=(2n+1)!\times a_{2n+1}$ ，最後得 $S_{2n+1}=\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\tan x\Big|_{x=0}$ 。

四、結論》

法國數學家安德魯（Désiré André,1840-1917）分別在 1879 年、[2]1881 年發表蛇行排列等相關論文，[3]當時稱爲交錯排列（alternating permutation）或之字形排列（zigzag permutation）。因此，決定集合 $\{1,2,3,...,n\}$ 的蛇形排列數 S_n 被稱爲安德魯問題，此排列數 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, 50521, ...蛇形排列是個值得研究的數學主題，其連結的數學領域也是相當廣泛，相當呼應數學家陶哲軒的話：「我常常花很多時間在一個非常簡單的問題上，直到我弄明白問題的來龍去脈，當你準備向更高水準進軍時，這真的有幫助。」

---

[2] **André, Désiré (1879), "Développements de séc x et de tang x",** ***Comptes rendus de l'Académie des sciences,*** **88: 965–967.**

[3] ***André, Désiré*** **(1881), "Sur les permutations alternées" ,** ***Journal de mathématiques pures et appliquées,*** **3e série, 7: 167–184.**

五、參考資料》

1. André, Désiré (1879), Développements de séc x et de tang x *, Comptes rendus de l'Académie des sciences,* 88: 965–967.
2. *André, Désiré* (1881), Sur les permutations alternées , *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3e série, 7: 167–184.
3. Vladimir I Arnol'd(1992), The calculus of snakes and the combinatorics of Bernoulli, Euler, and Springer numbers of Coxeter groups, *Russian Math. Surveys*, 47(1):1-51.
4. Harold Reiter(Spring 1999), Counting Snakes, Differentiating the Tangent Function, and Investigating the Bernoulli-Euler Triangle, *Mathematical Mayherm*, 39-46.
5. *Stanley, Richard P.* (2011). *Enumerative Combinatorics. Vol. I* (2nd ed.). Combridge University Press.

桌遊學數學

以「病毒來了--對數消消樂」為例

林秋華／永仁高中數學科教師

一、緣起／動機》

身為高中數學老師，對數學充滿興趣、對教學卻是用盡心力。一昧的課程講述，很難引起學生的學習動機，因此，許多老師開始發展各式各樣的教學活動。筆者多年前開始接觸桌遊，發現桌遊中運用到大量的數學和邏輯、又充滿趣味，因此開始思考，若能將高中數學的知識點以桌遊方式呈現，一定能大大提升學生的學習興趣和信心，也可以讓課堂變得多元又有趣。另一方面，近幾年研習聽到許多專家學者，如侯惠澤教授也指出，在遊戲中學習，可以降低學生的學習焦慮感、培養學生的挫折容忍度、提升專注力和引起學習動機，同時也讓課堂的教學方式變得多元且具啓發性。又如臺大葉丙成教授的 Pogamo 研發團隊，也帶動線上遊戲化學習，讓許多莘莘學子主動完成作業。因此，筆者也開始朝這個方向努力。目前除了研究桌遊，並曾於多元選修開課外，也研發了一款桌遊，以對數為知識點出發，融合市面桌遊機制，期待能以遊戲化學習方式來提升學生的學習動機和學習成效。

二、病毒來了桌遊介紹》

本款遊戲為筆者自行研發，以對數基本運算為知識點，融合瘟疫危機和御竹園桌遊機制，期待能從遊戲中帶給學生不一樣的學習感受。

前言／故事

遠古時代，惡魔來到福爾摩沙島，並開始散播病毒，被病毒感染的區域無法居住，人們開始想辦法消滅病毒，請來當代最厲害的醫生，可以看穿病毒的屬性予以消滅。現在，就請你一起來解救福爾摩沙島的民眾吧！小心，惡魔就在你身邊~~

遊戲配件（原始大小如附件）

1. 六角板（三色，各 12 件）
2. 任務卡（三類，版圖 12 張、散播病毒 18 張、消滅病毒 18 張）
3. 惡魔 1，醫生 1
4. 病毒（三色）
5. 連接鏈（20 根）
6. 個人行動卡 4，行動車 8
7. 骰子 1（進階版）

遊戲人數

4 人

遊戲時間

約 30～50 分鐘（初次須講解遊戲規則，會花較多時間）

遊戲規則和步驟

1. 每個人拿一張個人行動卡和 2 個行動車，每回合可執行兩個行動。
2. 將病毒中心卡（六角卡）放在桌子正中央，其餘六角卡洗勻背朝上放好備用。
3. 將任務卡分三堆，分別洗勻背朝上放好備用，每個玩家於每堆各拿取一張當起始手牌。
4. 由年紀最長的玩家開始：
   (1) 決定行動車，可執行兩個行動：放六角卡、抽任務卡、移動惡魔、移動醫生、放連接鏈、移動桌面的六角卡。
   (2) （進階版加入）丟骰子決定命運：惡魔從天而降、醫生從天而降、病毒擴散（一個）、加一個行動、減一個行動、可重複行動。
   (3) 執行骰子和行動車（進階）的動作。

   (A)行動車：可選擇兩次不同的行動。

   放六角卡：翻開一張六角卡並放置可運算或與其他六角卡連接的地方。

   抽任務卡：隨意抽一張任務卡，手上最多五張任務卡。

   移動惡魔：移動惡魔至某區域，最多六步，並散播病毒於駐足的區域和與之連接並有整數關係式的區域。

   移動醫生：移動醫生至某區域，最多六步，並解除駐足的區域一個病毒。

   放連接鏈：拿取連接鏈，連接底數不相同的區域，使之擴張。

   移動桌面的六角卡：直接移動桌面上的一張六角卡（六角卡上沒有任何東西駐足）並放置合理位置。

   (B)骰子（進階版）

   惡魔從天而降：惡魔可降落至任何區域，並散播一個病毒在該區域。

   醫生從天而降：醫生可降落至任何區域，並解除一個病毒在該區域。

   病毒擴散（一個）：可選擇一個已有病毒的區域再滋生一個病毒。

   加一個行動：共有三次行動。

   減一個行動：只剩一個行動。

   可重複行動：可執行相同的行動。
   (4) 確認任務是否完成（其他人也可以確認，只要任務符合即可），完成的任務打開放桌面，收回病毒，代表完成和得分。
   (5) 遊戲進行至有人完成第 6 項任務時，進行最後一輪，結束後結算分數。

六角卡說明

1. 六角卡必須與病毒中心連接才會發生作用，向外發展時，若底數相同視為連接，若底數不同必須有連接鏈才能使之擴張。
2. 連接的六角卡，若透過運算可以得到整數，則可選擇惡魔走到該區域，然後在有連接的六角卡上各散播一個病毒，同一區域最多可以累積散播 5 個病毒。惡魔每次的行進路線最多六步，可轉彎或到不同區。惡魔散播的病毒可以依任務卡得分。
3. 醫生可以解除所占區域的一個病毒，醫生每次的行進路線最多六步，可轉彎或到不同區。醫生解除的病毒可以依任務卡累積得分。
4. 完成特定的地圖圖形，可以依任務卡得分。

任務卡說明

1. 地形卡：完成指定地形，即可得分。
2. 散播病毒卡（惡魔任務）：完成散播病毒數量並符合顏色即可，相同顏色必須在同一張六角卡內。得分後，散播的病毒需收回，不可重複完成任務。
3. 終結病毒卡（醫生任務）：消滅符合圖卡的病毒顏色即可得分。得分後，消滅的病毒需收回，可重複完成任務。

獲勝點

1. 當有人完成第 6 項任務時，遊戲進行最後一輪，之後結算分數。
2. 每張任務卡都有分數，若 6 個任務都是惡魔任務，分數*3，若有 5 個惡魔任務，則惡魔任務的分數*2。同理，若 6 個任務都是醫生任務，分數*4，若有 5 個醫生任務，則醫生任務的分數*3。其他狀況，分數*1。（自由度：老師也可視狀況調整分數）
3. 總分最高者勝出。

三、數學史／知識／概念》

對數的出現可以說是數學史上的重要發明，它縮短了數學家和天文學家的計算，並被廣泛應用在許多地方。約在西元十七世紀初左右，蘇格蘭數學家納皮爾開始研究對數，當時他希望能得到比較快速的計算方式，比方如何更快計算 128*2048？以現在的語言來說，相當於他發現$128=2^7$ ， $2048=2^{11}$ ，所以

$$128*2048=2^7*2^{11}=2^{18}=262144$$

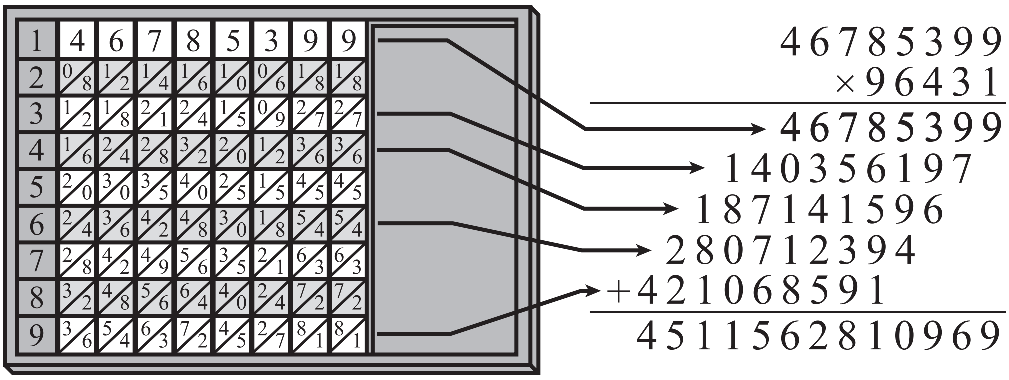
納皮爾

於是他研究不同的底數發展出對數學，並在西元 1614 年出版了《奇妙對數定律說明書》，詳細的記載了對數作用、運算規律及對數值表等等。納皮爾被譽為「對數締造者」。

但其中的指數符號是在 1637 年才由法國數學家笛卡兒開始使用，當時並沒有觀察到指數和對數的關係，一直到 18 世紀，才由瑞士數學家歐拉發現了指數與對數的互逆關係。所以，對數的發現其實是先於指

數，這也是數學史上比較珍貴的一段趣聞。但我們高中數學的編排卻是先學指數、再學對數，似乎指數的理解比較直接，對數的理解則需要再三地確認，但無庸置疑的，指對數是數學上很好用的函數。（參考資料：https://read01.com/8LAQ8g.html）

納皮爾的其中一頁對數表



高中課程中提到的對數律，筆者整理如下：

定義：當底數 $a>0$ ， $a\neq 1$ ， $b>0$ 時，方程式 $a^x=b$ 有唯一實數解 $x=\log_a b$ 。

故有：

1. $\log_a a=1$
2. $\log_a 1=0$
3. $\log_a a^x=x$
4. $a^{\log_a b}=b$
5. $\log_a rs=\log_a r+\log_a s$ ，其中 $r>0$ ， $s>0$
6. $\log_a \dfrac{r}{s}=\log_a r-\log_a s$ ，其中 $r>0$ ， $s>0$
7. $\log_a b^t=t\log_a b$ ，其中 t 爲任意實數
8. 換底公式 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ ，其中 $c>0$ ， $c\neq 1$
9. $\log_a b\times\log_b a=1$
10. $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ ，其中 m，n 爲任意實數

透過「病毒來了」桌遊，學生可以熟悉對數律的基本運算。這款遊戲改編自御竹園，遊戲本身就非常具有邏輯性和趣味性，筆者加以改編，融入對數運算和增加遊戲的挑戰性，學生爲了散播病毒就必須努力將六角卡上的對數做組合，並透過運算得到整數，如此惡魔才能占據該區域並散播病毒。而醫生在病毒散播後就可以開始消滅，一長一消，每個玩家都會在遊戲中熟悉對數的基本運算，並邏輯推理該如何得到高分，因此本款遊戲也挑戰學生的決策能力。

對數雖然在天文、科學和數學上有極大的貢獻，但卻是高中生不易理解和掌握的單元，透過本遊戲讓學生熟悉對數律的基本運算後，學生才有信心挑戰更難的題目。

四、數學桌遊整理／後記》

桌遊學數學、數學來桌遊，一起來「桌」住數學感！市面上桌遊琳瑯滿目，筆者整理了適合於多元選修或數學課程使用的桌遊，提供大家參考：

常用桌遊

- 卡卡頌→矮人金礦→卡坦島→多米諾王國（版圖牽涉）
- 牛頭王→聖石之路→達文西密碼→拉密（超強數字感）
- 說書人→估估劃劃→妙筆神猜（表達能力）
- Bang！→富饒之城→阿瓦隆→風聲（心機、團隊合作）
- 賽駱駝→馬尼拉→卡坦島（機率論）

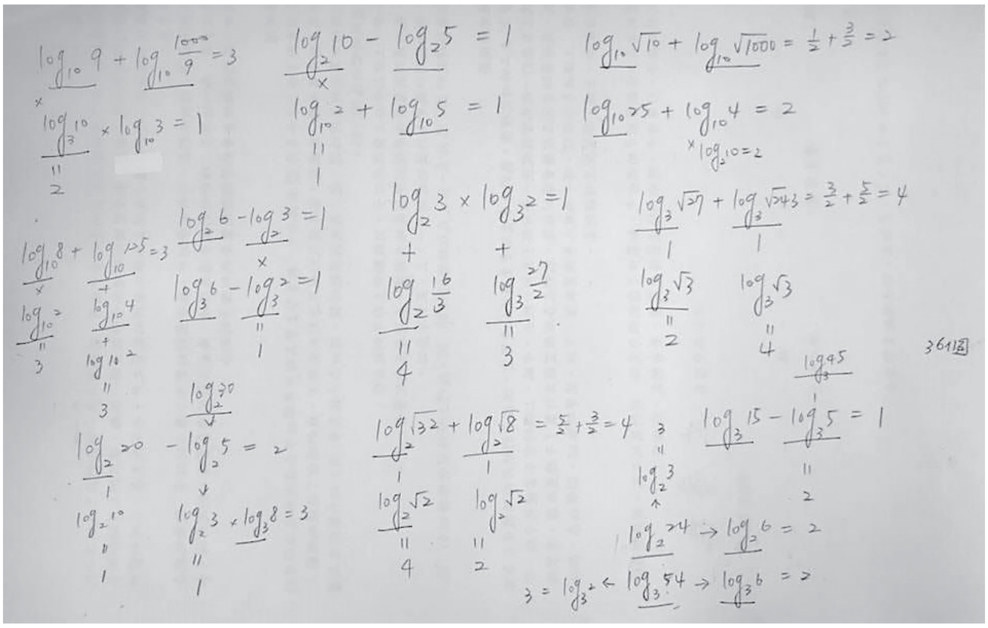
學習本身就充滿樂趣，如何點燃學生心中的學習欲望，是每個老師重要的任務。筆者研發此款遊戲「病毒來了—對數消消樂」時，雖然花費許多時間和心力，也有遇到困難，但過程中的創作發想和產出時的喜悅卻是筆墨難以形容的。若在學習的過程中，學生也能領悟學習的喜悅與創作的樂趣，相信學生會更願意花時間克服自己的學習困境。如同筆者於過程中不斷修正遊戲機制和克服製作上的困境一樣，當心中的欲望被點燃，學習便不中斷。

本款遊戲尚有進階版與 10 分鐘微翻轉玩法，遊戲過程中若有任何問題，歡迎與筆者聯絡討論。如需引用，請註明出處。

附上聯絡資訊～email：chlin454@gmail.com
FB：林秋華
任教學校：臺南市立永仁高中
FB 社群：數學咖啡館

〈附件 1〉

設計手稿



（圖片來源：林秋華）

〈附件 2〉

$\log_2 3$

$\log_2 5$

$\log_2 6$

$\log_2 10$

$\log_2 12$

$\log_2 20$

$\log_3 2$

$\log_3 5$

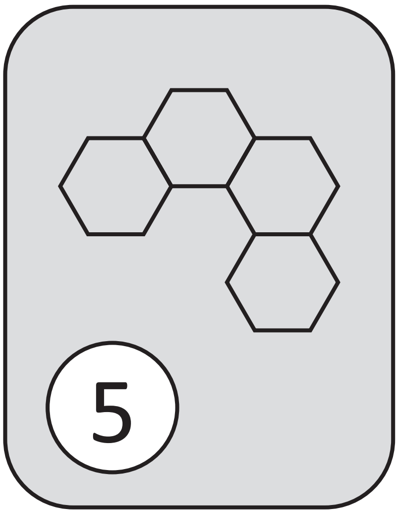
$\log_3 6$

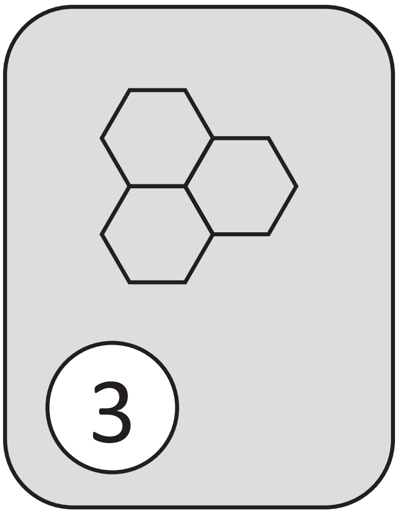
$\log_3 8$

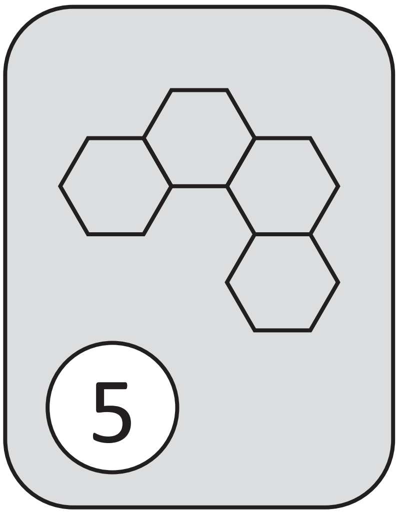
$\log_3 10$

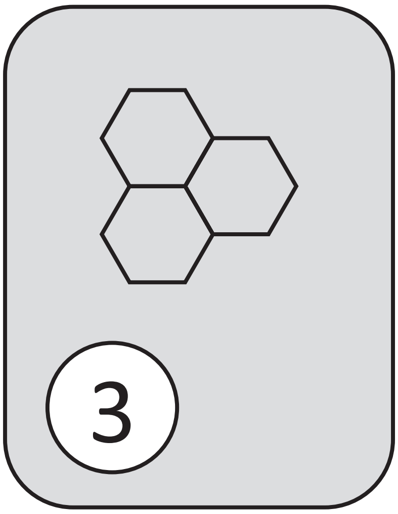
$\log_3 15$

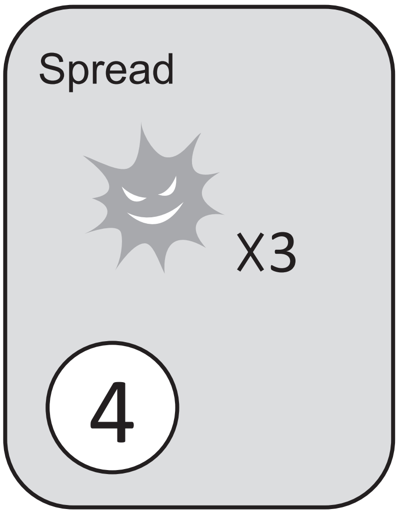
$\log 2$	$\log 3$
$\log 4$	$\log 5$
$\log 6$	$\log 8$

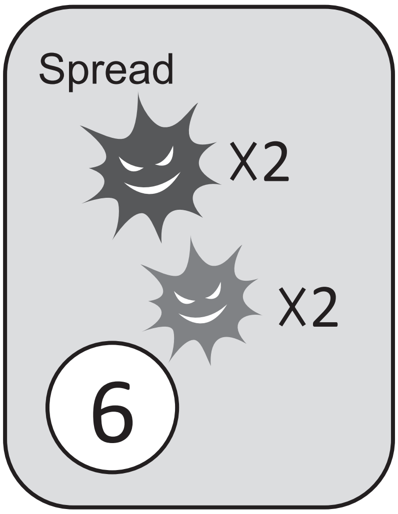

5


3


5


3


Spread
X3
4


Spread
X2
X2
6

Spread

X3

4

Spread

X2

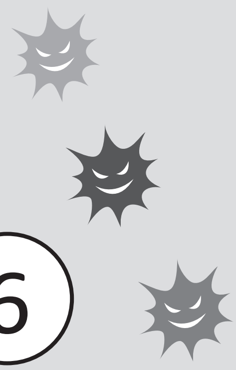
X2

6

Terminate

4

Terminate

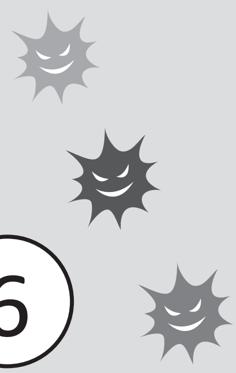


6

Terminate

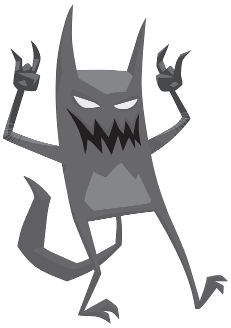
4

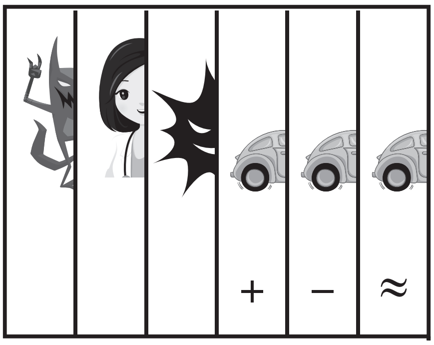
Terminate



6

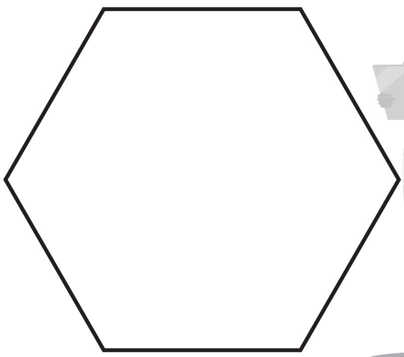
行動卡





PUT	TAKE				MOVE
					

消滅病毒區

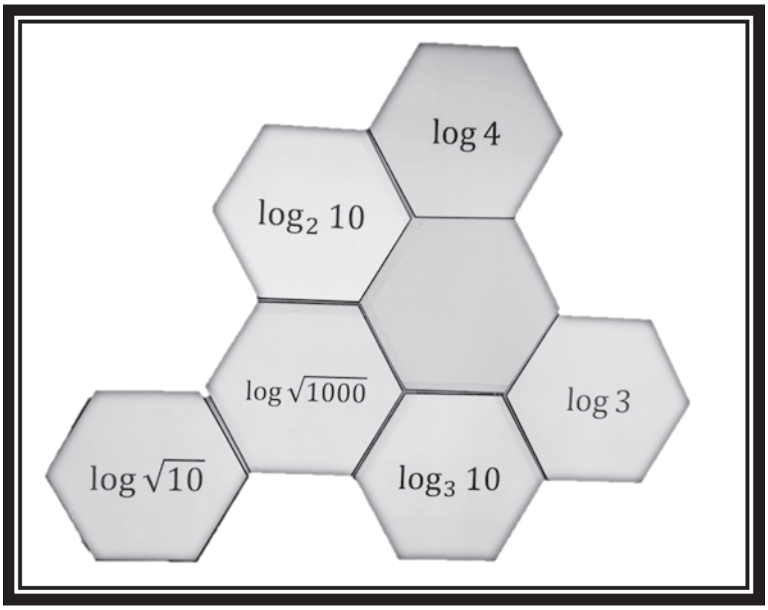


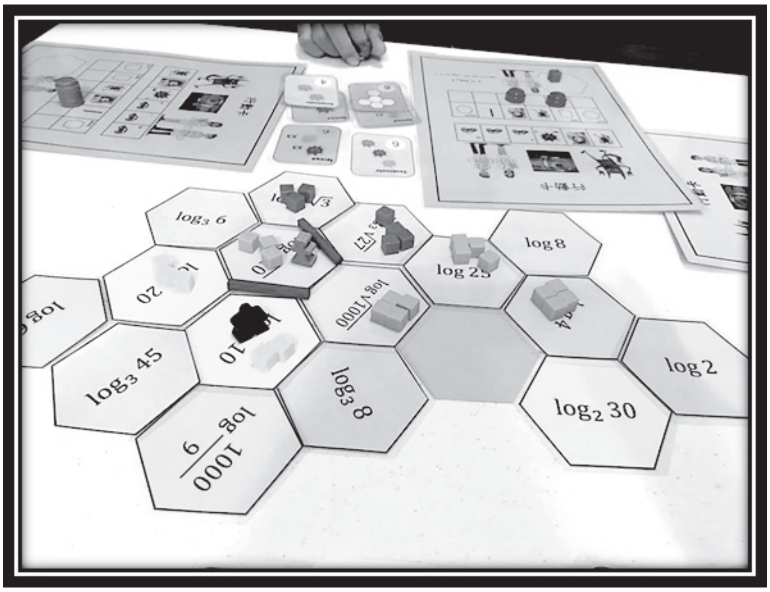
$$y = \log_a x$$

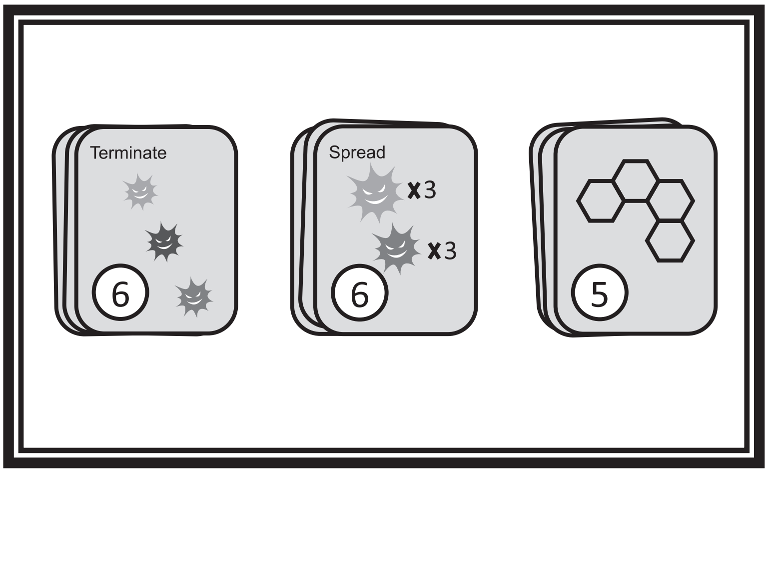
$\log_2 3 + \log_2 28$

$- \log_2 21 = ?$

〈附件 3〉


log 4
$\log_2 10$
$\log \sqrt{1000}$
log 3
$\log \sqrt{10}$
$\log_3 10$


$\log_3 6$
log8
log 25
$\log_3 45$
$\log_3 8$
log2
$\log_2 30$


Terminate
6
Spread
x3
x3
6
5

專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 141

☆☆☆

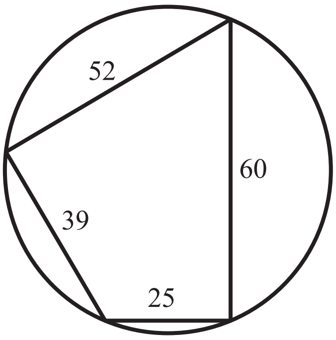
求邊長依序為

25, 39, 52, 60

的圓內接四邊形之

(1)兩條對角線長。

(2)面積。



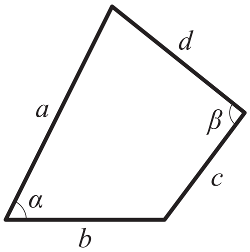
〔玩鎖・玩索〕

這是印度數學家婆羅摩笈多（Brahmagupta）所找到邊長、對角線與面積都是有理數的圓內接四邊形。大家都可以背出好幾個三角形的面積公式，例如：

$$\frac{底\times高}{2}，\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}，\frac{1}{2}ab\sin C，\cdots$$

但是，你知道任何四邊形的面積公式嗎？大概不知道吧！在下圖的凸四邊形中，若 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$，則此凸四邊形面積可以表為

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-\frac{abcd(\cos(\alpha+\beta)+1)}{2}}。$$



據說，婆羅摩笈多就是利用這個公式找到邊長、對角線與面積都是有理數的圓內接四邊形。關於凸四邊形面積公式，我們可以做底下的延伸：

(1) 當 $d=0$ 時，此時凸四邊形退化成三角形，面積公式就是有名的海龍公式。

(2) 當 $\alpha+\beta=180°$ 時，因為對角互補，所以凸四邊形是圓內接四邊形，且面積公式變成

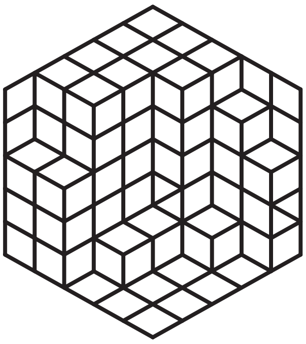
$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}。$$

(3) 因為 $\cos(\alpha+\beta)+1\ge 0$，所以凸四邊形的面積 $\le\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$。

遊戲 142

☆☆☆☆☆

如圖所示：它是一個邊長 5 的正六邊形小杏仁蛋糕餐盒，在餐盒擺滿同一形狀的菱形小杏仁蛋糕，爲了不留下任何空隙，不難發現，菱形小杏仁蛋糕有三種不同的擺設方式（每個菱形小杏仁蛋糕的邊都需與正六邊形餐盒的某兩邊平行）。



問題是「這三種不同方向的菱形小杏仁蛋糕個數會一樣多嗎？如何覓得方法詮釋它呢？」就以上圖來說，每個方向的菱形小杏仁蛋糕個數都是 25 個，不多也不少。這是特例，還是常態呢？

〔玩鎖・玩索〕

這是有名的小杏仁蛋糕問題，可參考 Roger B. Nelsen 所著《Proofs Without Words》這本書的第 142 頁。它是一道考驗空間想像能力的問題，答案是一樣多。

你可以朝以下的方向來思考：想像你正將許多的磚塊堆放在房子的一個角落，從遠一點的位置觀察這些磚塊所呈現出來的圖形。看看這樣的圖形與遊戲裡的圖形是否很像。每一塊看得見的磚塊，至多會有三個不同的面向，這面向又告訴我們何種事情呢？

遊戲 143

☆

驢與騾身上各背著幾百公斤重物，牠們互相埋怨，驢對騾說：「只要把你所背的重量給我一百公斤，我所背的就是你的兩倍。」騾回答說：「不錯，可是如果把你背的給我一百公斤，我背的就是你的三倍。」

問：騾與驢各背了多少公斤？

〔玩鎖・玩索〕

假設未知數，利用題目的條件寫下未知數所滿足的方程式，再利用代數的技術解決方程式中的未知數是中學生必須熟悉的一個數學解題方法。這裡借用尤拉所蒐集的一道數學趣題來考驗解二元一次聯立方程組的能力。

尤拉對青少年的數學教育很熱衷，開發了許多引人入勝的數學趣題，用來啓蒙青少年的數學解題能力，例如底下是與等差數列有關的數學問題：

從等差數列

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \cdots, 97, 100$$

中任選 19 個相異的數，其中必有兩數的和爲 104。

這道尤拉問題的提示是將這 34 個數分成如下的 18 堆：

$\{1\}, \{52\}, \{4, 100\}, \{7, 97\}, \{10, 94\},$

$\{13, 91\}, \cdots, \{49, 55\}.$

你領悟了上述問題的解法嗎？

遊戲 144

☆☆☆☆

我們可以將時間以分鐘表示，例如早上七點三十分記爲 $t=7\times 60+30=450$，下午三點十五分記爲 $t=15\times 60+15=915$；反過來 $t=145$ 代表半夜兩點二十五分。

如果一個人在時間 t 時，注視著時鐘，那麼經過

$$\frac{360}{11}\left(\left[\frac{11t-180}{360}\right]+\frac{3}{2}\right)-t$$

分鐘後，此人將首次看到時鐘裡的時針與分針互相垂直。這裡的符號 $[x]$ 是指高斯整數函數，即當 $n\le x<n+1$（n 爲整數）時，$[x]=n$。

(1) 晚上八點四十三分所對應的時間 t 是多少？

(2) $t=1000$ 對應到幾點幾分？

(3) 當你下午一點二十分開始注視著時鐘，經過幾分鐘後會首次見到時鐘裡的時針與分針互相垂直。

〔玩鎖・玩索〕

高斯整數函數 $[x]$ 也可以定義爲「不超過 x 的最大整數。」高斯整數函數跟大家熟悉的四捨五入一樣，都是將實數對應到一個整數，差別只在取捨方式，高斯整數函數是把多餘的小數部分捨掉，而四捨五入是依據小數部分是否過半來決定捨掉或者加 1，也就是說，四捨五入是「取最接近 x 的整數，但有兩個整數與 x 同樣接近時，取較大的那個整數。」

動手玩數學~破解祕笈 第35期

遊戲 137

因為每星期有 7 天，所以可設二月的 4 個星期三分別為 a , $a+7$, $a+14$, $a+21$ 。根據假設

$a+(a+7)+(a+14)+(a+21)=62$ ，

解得 $a=5$ 。

(1) 二月的日曆為

一	二	三	四	五	六	日
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28		

(2) 由二月的日曆知元月 31 日是星期五，元月 24,17,10,3 日也都是星期五，故元旦為星期三。

遊戲 138

(1) 因為 $b_1=3$，每一次迭代都把一個灰色三角形分割成 3 個小灰色三角形，所以 $\langle b_n\rangle$ 是首項 $b_1=3$，公比 3 的等比數列。即一般項

$$b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n \text{ 。}$$

(2) 根據「第 2 圖是將第 1 圖再挖 3 個三角形而得，第 3 圖是將第 2 圖再挖 3^2 個三角形而得，…」，得知 w_n 可以表示成如下的級數和

$$w_n=1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2} \text{ 。}$$

〔玩鎖・玩索〕解析

(1) $a_n=4a_{n-1}$ 。

(2) $a_n=3\cdot 4^{n-1}$ 。

(3) $b_n=\frac{4}{3}b_{n-1}$ 。

(4) $b_n=b_1\cdot(\frac{4}{3})^{n-1}=3(\frac{4}{3})^{n-1}$ 。

遊戲 139

如果令正方形右下角的坐標為 (x,y) ，那麼正方形左上角的坐標應為 (y,x) 。又這兩個點 (x,y) ，(y,x) 都在拋物線上，所以 x ，y 滿足多項式方程組

$$\begin{cases} y=\frac{7}{2}x(1-x) \\ x=\frac{7}{2}y(1-y) \end{cases}$$

將兩式相減，得

$$(x-y)=\frac{7}{2}(y-y^2-x+x^2)=\frac{7}{2}(x-y)(x+y-1)$$

$\Rightarrow x+y=\frac{9}{7}$ ，

將 $x+y=\frac{9}{7}$ 代入 $y=\frac{7}{2}x(1-x)$ ，得

$49x^2-63x+18=0\Rightarrow(7x-3)(7x-6)=0$ ，

解得 $x=\frac{3}{7}$ 或 $\frac{6}{7}$ 。故拋物線上取的點坐標為

$$(\frac{6}{7},\frac{3}{7}) \text{ 與 } (\frac{3}{7},\frac{6}{7}) \text{ 。}$$

遊戲 140

利用多項式的直式算法將兩個多項式相乘，可以得到

$$f(x)=x^4-4x^3+2x^2+4x+4 \text{ 。}$$

〔玩鎖・玩索〕解析

乘開後，得 x^4-5x^2+5 。