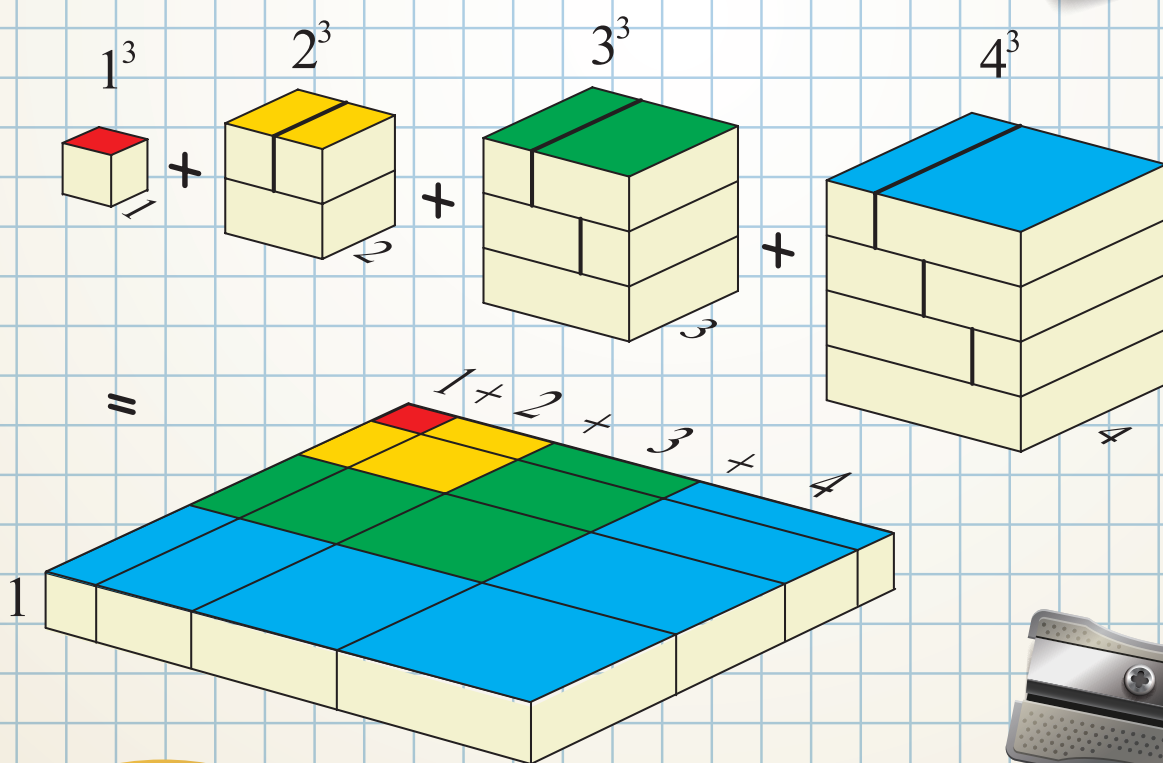


龍騰數亦優

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

第35刊



贈品禁止轉售

#5



55201N/E/0000000



龍騰文化

編輯室墨記

在〈許教授的數學溯源〉中，講述了有關自然數、奇數定理、正整數求和公式、平方數求和公式、立方數求和公式，以及算幾不等式的相關故事，並搭配了精采的「名題欣賞」，讓我們更能了解理論的連結與應用。

李維昌老師巧妙地利用幾何的證明方式來解釋二元算幾不等式，讓我們來看看〈利用拼圖面積來詮釋二元算幾不等式〉這篇文章，見識到別於一般的推導證明。

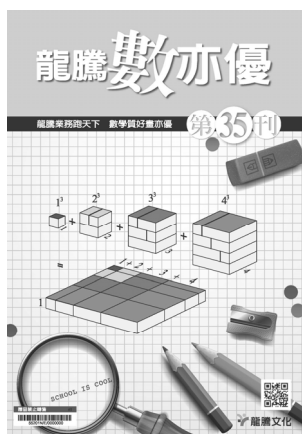
常態分布是高中數學課程的內容之一，但一般的統計學書本並不容易看到機率密度的推導過程，李隆振老師的〈由誤差常態分布的機率密度函數由來〉這篇文章，將介紹數學大師 Gauss 如何以其深刻的觀察力推導出常態分布的機率密度函數，並由誤差的基本觀念說起。

GeoGebra的應用已經相當普遍，吳孝仁老師從段考命題中談起一道指數與對數的題目。藉由GeoGebra來理解數值的特性及變化，最後再輔以數學方法來論證，隨著新課綱的計算機議題正夯，一起來看看吳孝仁老師的〈用計算機發現，用數學方法證明～從一道段考命題談起〉吧！

日曆是一種週期性的數學，同樣的情形也可以推到年齡與十二生肖的對應上？翻開動手玩數學，跟著許教授一起來解密吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的内容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 lien_chang@lungteng.com.tw。



發行人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總編輯：陳韻嵐
執行編輯：張幸蓮
美術編輯：張育華

發行所：龍騰文化事業股份有限公司
地址：248新北市五股區五工六路30號
電話：(02) 2299-9063
傳真：(02) 2298-9755
創刊日：2006/11/30
出刊日：2018/3/6
網址：<http://www.lungteng.com.tw>

龍騰數亦優

2018.3 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

許志農 臺灣師大數學系

3

》》 許教授的數學溯源

李維昌 宜蘭高中退休教師

16

》》 利用拼圖面積來詮釋二元算幾不等式

李隆振 斗六高中數學科教師

18

》》 由誤差談常態分布的機率密度函數由來

吳孝仁 政大附中數學科教師

24

》》 用計算機發現，用數學方法證明～從一道段考命題談起

許志農 臺灣師大數學系

37

》》 動手玩數學專欄

》》 動手玩數學《第34期》破解祕笈

許教授的數學溯源

許志農／臺灣師大數學系

一、自然數》

「數學是科學的皇后；而數論是數學的女王。」

——高斯

「『不可能將一個高於兩次的冪寫成兩個同次冪之和。』對此命題我有一個非常美妙的證明，可惜此處的空白太小，寫不下來。」

——費馬

「這是一個很有意思的數，1729 是可以用兩種方式表示成兩個自然數立方和的最小數。」

——拉馬奴金

自然數又稱為正整數，在畢達哥拉斯時代強調「萬物皆數，數統治世界」，自然數扮演著極為重要的角色，「數論」就是一門研究整數性質與相互關連的古老數學分支。

保羅·厄多斯（Paul Erdős, 1913-1996）是一位多產的匈牙利數學家，一生共發表論文 1475 篇，與 511 人直接合作。因為厄多斯和別人合寫的論文實在太多了，所以有人定義了厄多斯數，簡稱 E 數，用來描述數學論文中一位作者與厄多斯的「合作距離」的量化方式。厄多斯定義自己的厄多斯數定為 0，與他直接合作寫過論文的人的 E 數為 1，與 E 數為 1 的人合寫論文的人 E 數為 2，…，依此類推。如果一個人至少要與 n 個中間人（合寫論文的關係）才能與厄多斯有關連，那麼此人的 E 數為 $n+1$ 。

我們可以把它想成射箭的靶，厄多斯位於靶心；跟厄多斯有合作發表論文的那 511 人位於最內圈，E 數為 1；只跟最內圈有合作發表論文的人位於次圈，E 數為 2；又僅跟次圈有合作發表論文的人 E 數為 3；依此往外畫圈下去，從內往外數，位於哪一圈的人，其 E 數就是該正整數。

日本圍棋界也有秀策數，它是用來描述玩家與棋聖本因坊秀策之間的距離。顯然，埃數跟秀策數都是善用自然數的一種距離描述。想想看，我們該如何定義兩個人的認識距離呢？

「自然數的遷徙遊戲」是古希臘畢達哥拉斯信徒們早就在研究的課題，只是這宗教團體比較嚴肅，不能當遊戲玩！遊戲是這樣的，給定任意一個正整數，以 12 為例，首先列出他的所有真因數，有 1, 2, 3, 4, 6 等五個，然後把這些真因數相加，得 $1+2+3+4+6=16$ ，我們就說「12 會遷徙到 16」並簡記為「 $12 \rightarrow 16$ 」。照這樣可以得到一連串的遷徙路線

$12 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 。

因為 1 沒有真因數，所以就終止，無法再遷徙了。有些自然數的遷徙圖很有趣，例如 6，它是個定點，不會動：

$$6 \rightarrow 6 \rightarrow 6。$$

像這樣的定點稱為「完美數」，28 也是個完美數，動手算算看吧！另一種有趣的遷徙現象發生在 220 與 284 這組數上，它們好像雙子星，遷徙路線互相纏繞：

$$220 \rightarrow 284 \rightarrow 220 \rightarrow 284 \rightarrow \cdots。$$

這種雙子星有一種特別的名稱，叫「親和數」。第二組小的親和數為 1184 與 1210，在十九世紀後期才由一位十六歲的義大利男孩帕格尼尼找到；費馬也找到過一組親和數：17296 與 18416。玩自然數遷徙遊戲的人很自然會問：完美數與親和數為有限個或組嗎？會有三子星，四子星，…之類嗎？會有不是循環，但又走不完的遷徙圖嗎？

在 1955 年，東非一位名叫卡珊卡基（Kashangaki）發現了判斷 7, 13, 17, 19 的整除性質的一個新方法，這個方法有點妙：給定一個自然數 N ，我們可以把它寫成 $10a+b$ 的形式，例如 $N=1547$ 可以寫成 $10 \times 154 + 7$ ，這時 $a=154, b=7$ 。卡珊卡基提出下列的整除性質：

- (1) 判斷 N 是否為 7 的倍數，只要檢驗 $a-2b$ 是否為 7 的倍數。
- (2) 判斷 N 是否為 13 的倍數，只要檢驗 $a+4b$ 是否為 13 的倍數。
- (3) 判斷 N 是否為 17 的倍數，只要檢驗 $a-5b$ 是否為 17 的倍數。
- (4) 判斷 N 是否為 19 的倍數，只要檢驗 $a+2b$ 是否為 19 的倍數。

根據卡珊卡基的判別法，因為 $a-2b=154-2 \times 7=140$ 是 7 的倍數，所以 1547 是 7 的倍數。

平方數是自然數裡一類重要的成員，除了畢氏定理常用到之外，它也是構成自然數的重要份子。在 1770 年，法國數學家拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736-1813）證明了這樣的性質：

「每個自然數都可以表成一個，兩個，三個或四個平方數的和。」

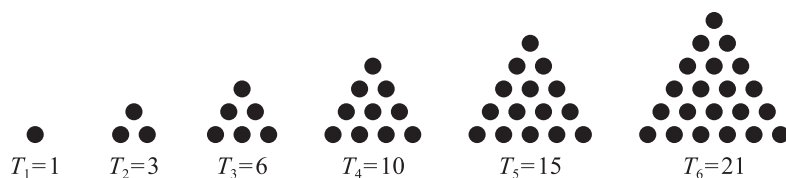
這曾經是公元三世紀前後，數學家丟番圖的猜測。事實上，這問題也讓尤拉想了十三年之久，在研究過程中，他得到過如下的等式

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax-by-cz)^2+(bx+ay)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2。$$

在畢達哥拉斯時，像

$$1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \dots$$

這樣的數稱為三角形數。今天習慣以符號 T_n 代表第 n 個三角形數，如下圖所示：



德國大數學家高斯 (C. F. Gauss, 1777-1855) 自 1796 年至 1814 年，在他的《數學日記》上記錄了 146 條很短的註記，其中有數值計算結果，也有數學定理。這本日記是 1898 年偶然在高斯孫子的財產中發現的一本筆記。高斯雖然勤於寫日記，但他的日記有個與眾不同的地方，他從不註明年月日，而是用一個自然數代替。比如他獲得博士學位那天的日記上標記為 8113，這數字代表那一天是高斯出生後的第幾天。高斯是 1777 年 4 月 30 日出生的，他獲得博士學位的年月日是何時呢？（此為中國規模最大的大學生 IT 學科賽事「藍橋杯大賽」的考題，答案：1799 年 7 月 16 日。）

高斯從 1796 年 3 月 30 日開始寫日記，那天日記寫道「圓的分割定律，如何以幾何方法將圓十七等分。」這為流傳兩千年的歐氏幾何提供了自古希臘以來的第一次重要突破。

在 1796 年 7 月 10 日的日記中，高斯又寫下

$$\text{「EΨPHKA! num}=\Delta+\Delta+\Delta\text{」}$$

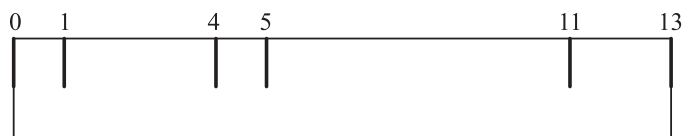
這樣的符號。前面那個希臘字是阿基米德發現浮力定律後，光著屁股跑出浴室喊的話「我發現了！」而後面的等式是指

「每個自然數都可以表成一個，兩個或三個三角形數的和。」

這是費馬在 1654 年寫給巴斯卡的信中所提的猜測。

~~~~~ 名題欣賞 ~~~~~

1. 十九世紀英國遊戲家杜登尼 (H. E. Dudeney, 1857-1930) 曾發現：一根 13 公分長的量尺，只需在 1, 4, 5, 11 公分處刻上四種刻度（連同頭尾，共六個刻度），便可測量 1~13 公分間任何正整數公分的長度。用下面的「省刻度尺」檢驗看看！



【註】日本人滕村幸三郎發現長 23 公分的「省刻度尺」，只需在 1, 4, 10, 16, 18 和 21 公分等六處刻上刻度，便可測量 1~23 公分間任何正整數公分的長度。

2. 費波那契為了解羅馬皇帝腓特烈二世的一道數學題，提出和諧數的概念。他把形如  $mn(m+n)(m-n)$ （其中  $m+n$  為偶數）或  $4mn(m+n)(m-n)$ （其中  $m+n$  為奇數）這樣的正整數稱為和諧數。

【證明】費波那契的和諧數都是 24 的倍數。

3. 數學家費馬在 1635 年所提出的問題：

「找  $5^{99999}$  被 7 除後的餘數？」

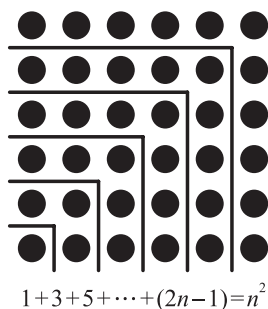
【提示】從  $5^1, 5^2, 5^3, \dots$  被 7 除後的餘數來尋找規律。

## 二、奇數定理》

正奇數求和公式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

也稱為奇數定理，早在古希臘時期，畢達哥拉斯就以圖示的方式發現這個結果。在中古歐洲，費波那契於 1225 年出版的《平方數之書》，也圖示出這個定理，這圖示也成為奇數定理最經典的一幅無字證明：



值得一提的是，摩洛利克 (F. Maurolico, 1494-1575) 曾利用遞推關係巧妙的證明了「前  $n$  個奇數的總和是  $n^2$ 」，對數學歸納法雛形的建立功不可沒。他的證明也成為現在教科書講授數學歸納法的經典或啟蒙範例。

~~~~~ 名題欣賞 ~~~~~

畢達哥拉斯學派熱衷於尋找整數邊長的直角三角形，即滿足

$$a^2 + b^2 = c^2$$

的正整數 a, b 及 c 。這種序對 (a, b, c) 被稱為畢氏三元數。畢氏學派發現：當正奇數求和公式的最後一項加上的奇數為完全平方數時，可以得到一組畢氏三元數，例如前五個奇數 1, 3, 5, 7, 9 的和

$$\begin{aligned} 1+3+5+7+9 &= 5^2 \\ (1+3+5+7)+9 &= 5^2 \\ 4^2+3^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

可得到畢氏三元數 $(3, 4, 5)$ 。

(1) 根據正奇數求和公式，可以得到的畢氏三元數公式為何呢？

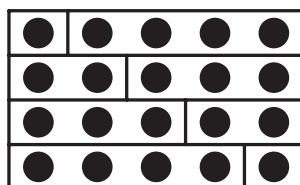
(2) 在古巴比倫的普林頓 322 號泥版上找到一組畢氏三元數 $(119, 120, 169)$ 。這組畢氏三元數可以由正奇數求和公式得到嗎？

三、正整數求和公式》

正整數求和公式

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

是一道大家耳熟能詳的公式。早在畢達哥拉斯的時代，就靠著下圖所示，一眼就能看出的神奇分割，得到頭 n 個正整數的和，是長方形中圓圈數的一半，即 $\frac{n(n+1)}{2}$ ：



中國著名數學家劉徽在注釋《九章算術》時，也給出了這個公式。

數學巨人高斯十歲時，躲過了繁瑣的計算，快速回答老師給的習題：

$$1+2+3+4+\cdots+100=5050$$

更是這求和公式的一段插曲。廣為流傳的說法是，聰明的高斯用倒序相加的辦法得出了和數，但事實上後人根據高斯逝世後發現的《數學日記》分析，他所採取的辦法其實是逐步歸納而得的歸納法。

有個有趣的問題：倘若高斯的老師把習題的最後一項 100 漏掉，即

$$1+2+3+4+\cdots=?$$

真不知道高斯會如何解它，又這所有正整數的總和應該是多少呢？上世紀的另一位數學天才——拉馬努金給出了一個奇怪的答案，在拉馬努金寫給哈代的第二封信中寫道（日期為 1913 年 2 月 27 日）：

「親愛的先生，我很感激地讀到你 1913 年 2 月 8 日的信。…一個倫敦的數學教授寫信要我仔細研究布羅米奇的『無窮級數』而不要陷入發散級數的陷阱。…我告訴他，在我的理論中一個無窮級數

$$1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}。如果我告訴你這個，你肯定會勸我進精神病收容院。…」$$

拉馬努金將所有的正整數和定義為 $-\frac{1}{12}$ ，看似有點離譜，但誰知道：此結果在後來的量子力學及弦理論等領域中有重要的應用。事實上，讀者可以在網路上找到多種

$$1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$$

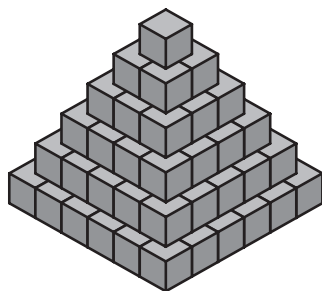
的求和過程。

四、平方數求和公式》

平方數求和公式

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

是一道不是那麼容易被學生理解的等式。古埃及與巴比倫人，大概基於金字形神塔的需要與啓發，了解這個公式；古希臘的畢達哥拉斯也知道這個結果；阿基米德可能是第一位給予這公式完整證明的人；另外，中國北宋沈括在《夢溪筆談》第 18 卷第 301 條及南宋楊輝在《詳解九章算法》中分別提出這則公式；而元代數學家朱世傑也推導過這則公式。



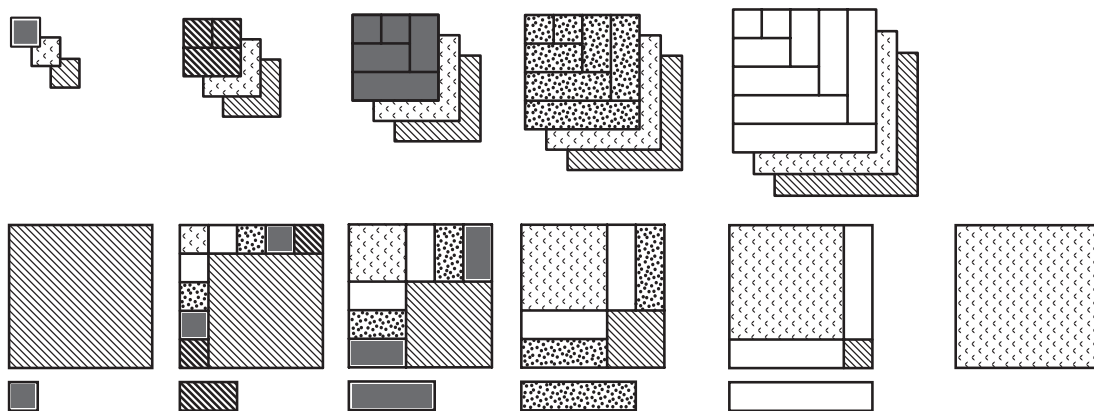
多數的老師都使用數學歸納法來教授學生這則公式，但是，對第一次接觸此公式的學生而言，這樣的教導方式，是很難了解與接受的。難怪，高德納（D. E. Knuth）在《電腦程式設計藝術》第一冊中寫道：

「多數教科書只是簡單的敘述這些公式，並且使用數學歸納法證明他們。儘管歸納法是一個完美且有效的證明方法，但是，這樣的教學方式並沒有給學生足夠的洞察力，讓學生一開始學習時有夢想公式從何而來的土壤。」

阿基米德在《論螺線》的命題 10 中，得到底下的等式

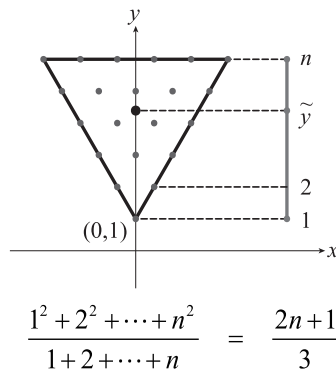
$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = (n+1)n^2 + (1+2+3+\cdots+n)。$$

這等式可以很快推得平方數求和公式。但是，這等式又是如何想到的呢？倘若，阿基米德將平方數以正方形展示在沙盤上，佐以不同顏色，並做有規律的分割，如下圖所示（Sum Squares in the Sand），可否幻想一下，把這幾何圖示與上述等式相連結呢？



「給我一個支點，我可以舉起整個地球」是阿基米德最膾炙人口的一句話。體現在數學解題上，阿基米德擅長使用平衡或重心等物理原理來解題。接下來這則以「正三角形的重心公式」解「平方數求和公式」的無字證明，直到近代才被發現，可算是阿基米德的漏網之魚。

將邊長平均分布 n 個點的正三角形倒畫在坐標平面上，如圖所示，由下往上，第一排那個灰點之 y 坐標為 1，第二排那兩個灰點之 y 坐標都是 2， $\dots$ ，第 n 排那 n 個灰點之 y 坐標都是 n （此圖是 $n=6$ 的情形），而且黑點為正三角形的重心，其 y 坐標記為 $\tilde{y}$ 。想想看，這個圖示真的可以推得「平方數求和公式」嗎？



因為 y 軸是正三角形的一條中線，而重心會將中線分割成 2:1 的兩條線段，所以由分點公式，得

$$\tilde{y} = \frac{1 \times 1 + 2 \times n}{2 + 1} = \frac{2n+1}{3}。$$

另一方面， $\tilde{y}$ 也是所有灰點的 y 坐標之平均值，即

$$\tilde{y} = \frac{1 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + n \times n}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + \dots + n}。$$

綜合得到

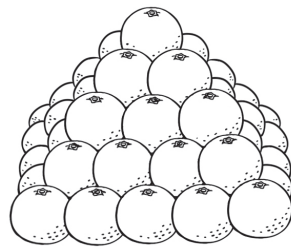
$$\tilde{y} = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n+1}{3}，$$

此即平方數求和公式。

雖然上述方法不是阿基米德所發現，但是這種透過「物理模型」來構造數學公式的手法，阿基米德算是史上第一人。只是對「證明」要求嚴謹的他，總是會說：「這裡所陳述的事實不能以上面的過程作為真正的證明，但這一過程卻暗示了結論的正確性。鑑於該定理並未得到證明，同時它的真實性又值得懷疑， $\dots$ 。」

普林斯頓大學數學教授巴爾加瓦（Manjul Bhargava），2014 年的菲爾茲獎得主，他曾回憶起兒時的一段數學經歷：

「我一直喜歡數學，兒時我喜歡形狀和數位。我最早的數學記憶來自於八歲時將柳丁堆成金字塔形狀（專門用於榨汁機！）的事。我想知道，堆出底層每邊有 n 個柳丁的一個金字塔需要多少個柳丁？我思考了很久，最終確定答案是 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。」



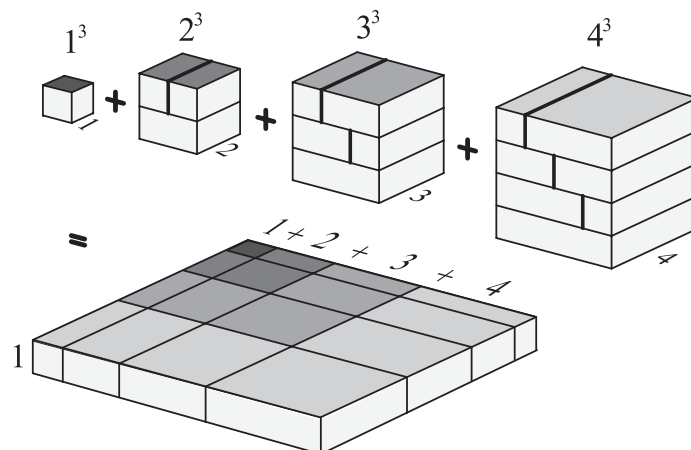
柳丁堆垛起來的體積（或個數）之所以不好算，困擾著巴爾加瓦的童年，完全是因為它有空隙的關係。南宋沈括早就體會到這個困難點，他在《夢溪筆談》裡以「隙積術」之名來稱呼這方面的研究，即含有空隙的體積（或個數）要如何算的技術。

五、立方數求和公式》

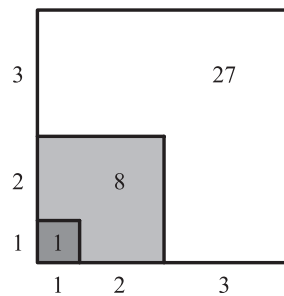
在數論裡，立方數求和公式

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

也稱為尼科馬庫斯定理（Nicomachus Theorem），這是為了紀念古希臘數學家尼科馬庫斯在他的書中書寫過這公式。下圖是有關立方數求和公式的一則精彩無字證明：



伊斯蘭數學家阿爾-凱拉吉（Al-Karaj）西元 953 年出生於巴格達，他以下圖的幾何方法得到立方數求和公式：



$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

中國元代數學家朱世傑在 1303 年出版的《四元玉鑒》裡，也推導過立方數求和公式。在金庸名著《射雕英雄傳》裡，黃蓉臨走時給瑛姑出了三道難題中第二道數學題：

「今有官府要依據立方數招兵，第一日招兵 3^3 人，次日招兵 4^3 人，依此類推。已招兵 23400 人，問：招兵一共多少天？」

就是出自朱世傑的《四元玉鑒》。

在「數學歸納法」被普遍使用的今天，首先「歸納」前幾項的結果

$$1^3 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

再「臆測」可能的公式

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

最後，使用數學歸納法「驗證」公式成立。這流程無疑是完美無缺的數學證明方法，也是當今數學老師普遍的教學方式。但是，學生除了把公式記住，歸納法背起來之外，真的有學到數學的核心嗎？

六、算幾不等式》

「不要讓幾何直觀，蒙蔽我們的雙眼。」

——柯西

算幾不等式，即對任意的正實數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ，不等式

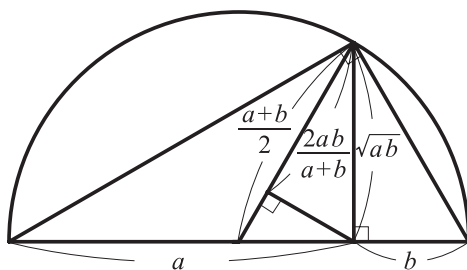
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

恆成立，而且等號成立的條件為 $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ ，它是一個常見而基本的不等式。特例 $n=2$ 的情況很早就為人所知，而且此特例剛好說明了命題「周長固定的矩形中，以正方形的面積最大」成立。

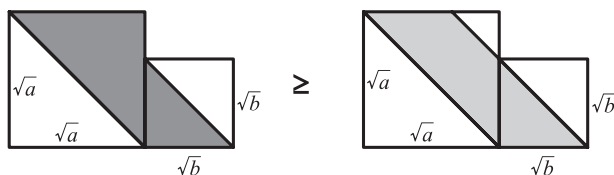
希臘人對兩個變量的不等式

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

就特別感到興趣，例如，帕普斯（Pappus）曾在其著作《數學彙編》中給了這些平均數的不等式一個漂亮的無字證明：



下圖是臺灣人周伯欣在 2014 年 11 月 6 日晚上，躺在床上準備就寢時想到的證明，他將此無字證明發表在《數學傳播，158 期，40 卷，2016》上：



$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{b} \cdot \sqrt{a}$$

關於算幾不等式的一般性的證明，在 1729 年，英國數學家麥克勞林（Colin Maclaurin）最早給出了一般情況的證明，用的是調整法，然而這個證明並不嚴謹。在 1821 年，法國數學家柯西在他的著作《分析教程》中給出一個巧妙的歸納法證明，證明過程中「既使用了前進，也使用了後退」，這種後退是為向前的手法堪稱一絕。在此稍微描述一下向前與後退怎麼使用。

向前用法（由 $n=2$ 向前推 $n=4$ 成立）：

因爲

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}},$$

所以

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

向後推法（由 $n=4$ 往後推 $n=3$ 成立）：

將 $n=4$ 的算幾不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

中的 a_4 換成

$$a_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3},$$

得

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)},$$

整理，得

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^4 \geq a_1 a_2 a_3 \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right),$$

此即

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}.$$

讀者可以仿照上述的前進與後退過程，證明 $n=8$ 及 $n=5, 6, 7$ 都成立。照這歸納方式可證得「算幾不等式」成立。

算幾不等式雖然是一個古老的定理，但是在二十世紀初，匈牙利數學家波里亞（G. Pólya, 1887-1985）利用指數函數的性質，給出一個既簡短又漂亮的證明：

爲了方便起見，令

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}, \quad g = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}.$$

首先，對所有的實數 x ，不等式

$$e^x \geq x + 1$$

恆成立。

其次，將 $x_i = \frac{a_i}{a} - 1 (i=1,2,\cdots,n)$ 分別代入上述不等式，得

$$e^{\frac{a_i}{a}-1} \geq \frac{a_i}{a} (i=1,2,\cdots,n)。$$

最後，將此 n 個不等式相乘，得

$$\prod_{i=1}^n e^{\frac{a_i}{a}-1} \geq \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a^n} = \left(\frac{g}{a}\right)^n，$$

又因爲

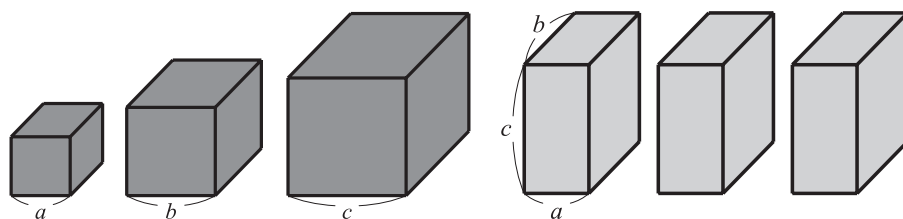
$$\prod_{i=1}^n e^{\frac{a_i}{a}-1} = e^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a}-n} = e^{n-n} = e^0 = 1，$$

所以

$$1 \geq \left(\frac{g}{a}\right)^n，$$

即 $a \geq g$ ，得証。

~~~~~ 名題欣賞 ~~~~~  
 百貨公司週年慶，推出甲、乙兩種香皂組合，其中甲組合是邊長爲  $a, b$  與  $c$  的立方體香皂各一塊；而乙組合是三塊長、寬與高分別爲  $a, b$  與  $c$  的長方體香皂。



當甲、乙兩種香皂組合的售價一樣時，你會選擇哪種組合呢？

# 利用拼圖面積來詮釋二元算幾不等式

李維昌／宜蘭高中退休教師

## 一、研究目的》

本人是數形一家的信奉者，那麼二元算幾不等式所代表的幾何意義如何用圖形來詮釋呢？眾裡尋他千百度，幾經思索，拼圖面積的靈感由腦海閃過，這是可遇不可求的，終於可以得到完美的望圖生義，請看下文的剖析。

## 二、研究過程》

已知  $a, b$  為正實數，求證  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。

幾何證法：

(1) 當  $a \neq b$  時：

不失一般性，較大的正數稱為  $a$ ，較小的正數稱為  $b$ 。

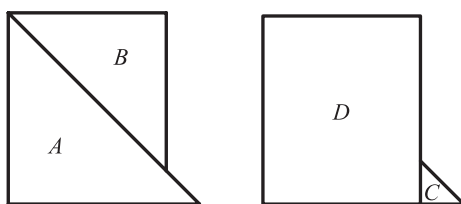
拼圖元件  $A$  為等腰直角三角形，腰長為  $\sqrt{a}$ ，面積為  $\frac{a}{2}$ ；

拼圖元件  $B$  為等腰直角三角形，腰長為  $\sqrt{b}$ ，面積為  $\frac{b}{2}$ ；

拼圖元件  $C$  為等腰直角三角形，腰長為  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ，面積為  $\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$ ；

拼圖元件  $D$  為矩形，長為  $\sqrt{a}$ ，寬為  $\sqrt{b}$ ，面積為  $\sqrt{ab}$ 。

由底下拼圖得知：



元件  $A$  的面積+元件  $B$  的面積=元件  $D$  的面積+元件  $C$  的面積

推得元件  $A$  的面積+元件  $B$  的面積>元件  $D$  的面積，即  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 。

(2) 當  $a = b$  時：

拼圖元件  $A$  為等腰直角三角形，腰長為  $\sqrt{a}$ ，面積為  $\frac{a}{2}$ ；

拼圖元件  $B$  為等腰直角三角形，腰長為  $\sqrt{b}$ ，面積為  $\frac{b}{2}$ ；

拼圖元件  $D$  為矩形，長為  $\sqrt{a}$ ，寬為  $\sqrt{b}$ ，面積為  $\sqrt{ab}$ （此時元件  $D$  為正方形，因  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ ）。

由底下拼圖得知：元件  $A$  的面積+元件  $B$  的面積=元件  $D$  的面積，即  $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 。



由(1)(2)的討論，得證二元算幾不等式

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}。$$

結論：1. 藉由數的恆等式： $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}}{2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{2}$

轉換成拼圖面積的概念：兩相異等腰直角三角形拼在一起的圖形全等矩形與等腰直角三角形拼在一起的圖形，來詮釋二元算幾不等式。

2. 藉由數的恆等式： $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$

(1)當  $a = b$  時， $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ ；

(2)當  $a \neq b$  時， $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 。

# 由誤差談常態分布的機率密度函數由來

李隆振／斗六高中數學科教師

## 一、前言》

從 95 課綱開始，常態分布就出現在高中數學課程中，然而在一般的統計學書本裡並不容易看到常態分布的機率密度函數推導過程，本文將簡單介紹數學大師 Gauss 如何以其深刻的觀察力推導出常態分布的機率密度函數，而這一切可以由誤差的基本觀念說起。

## 二、誤差恆在》

近代科學的發達以及技術的進步，奠定於兩大基石：系統推演以及經由實驗觀察獲得數據，驗證事實。因此科學的理論與模型，除了能解釋各種外在現象，對於現象的發生，也具有一定的預測力。

數據（data）是人類向自然界敲門的回音，而回音會伴有雜訊（noise），導致誤差。雜訊包括有人為的和隨機的兩個因素，前者如儀器不精、觀測角度不同等；後者如溫度、濕度、重力變化等。它們所產生的誤差分別叫做系統性誤差（systematic error）與隨機性誤差（random error），前者可以改進，後者只能任其自然，因此誤差恆在！

假設  $\mu$  表示射擊時靶心的位置， $x_i$  表示射擊者擊中靶面的位置， $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  代表算術平均數，表示射擊者擊中靶面位置的平均值，則

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^n \left[ (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu) \right]^2 \\&= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - \mu) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^n (\bar{x} - \mu)^2 \\&= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - \mu) \cdot 0 + \sum_{i=1}^n (\bar{x} - \mu)^2 \\&= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \mu)^2$$

所以期望值

$$E[(x_i - \mu)^2] = E[(x_i - \bar{x})^2] + [E(x_i) - \mu]^2 \quad (1)$$

(1)式中  $E(x_i) - \mu$  代表因為槍枝機械性能的優劣所產生的誤差， $x_i - \bar{x}$  代表因為各人的射擊能力與心理素質的高低所造成的誤差。因此，如果真的存在一把機械性能十全十美，能達到  $E(x_i) - \mu = 0$ ，以此槍射擊還是無法達到100%的命中率！因為人的心理、生理因素難以維持恆定，再加上氣候、噪音等干擾，使得各種不明原因的誤差隨時產生，因此射擊時  $x_i - \bar{x}$  不會等於零，所以誤差恆在。

### 三、科學的預測方法》

以科學為基礎的預測方法，是藉由收集過去的資料或數據，加以歸納整理分析、找尋關係、製作統計圖表。由數據獲得一些統計量（如平均數、標準差等），將過去的行爲模式化，然後建立模型來配適（fit）已知，預測未來。這些過程需要透過機率論與統計學來完成。

大部分的預測方法，都假設一序列過去的行爲或它與其他序列的關係（例如溫度、氣壓對颱風路徑的影響）將持續到未來，也就是一序列的未來值是過去值的數學函數。以單一程式而言就是

$$\text{未來值} = f(\text{過去值})$$

或

$$\text{未來值} = f(\text{過去值}, \text{其他變數之值})$$

例如，假定經濟理論認為利率和貨幣供給額的變動會影響股價的高低，如果這些變量的關係是線性的，則可用如下模型表示：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \quad (2)$$

其中  $y$  表示股價， $x_1$  表示利率， $x_2$  表示貨幣供給額。求出參數  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  的估計值，就能根據利率和貨幣供給額的變動資訊來預測未來的股價。但是，因為誤差恆在，利用(2)式的模型進行預測時將會產生不可預期的變異，因此，我們必須去估計預測誤差的可能範圍。解決這個問題的辦法，就是建立一個統計模型，如果用下標  $i$  表示樣本數中第  $i$  個觀察值，那麼(2)式的統計模型為：

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + e_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

其中  $e_i$  是誤差項，它代表模型以外所有變數的影響，包括隨機性誤差。

誤差項的機率分布型態有很多種，常態分布是最常見的一種。藉由研究誤差項的機率分布型態可以設定模型的機率結構，然後推導出估計式與檢定統計量。利用檢定統計量就可以判定假說是否與實際資料所提供的證據一致，進而修正模型，改善預測績效。

#### 四、誤差的隨機變數導循常態分布的機率法則》

誤差雖然存在，卻並非無法掌握。十八世紀中葉以後，統計學者發現，不論工作人員的訓練多完備，其所測量或紀錄的觀測值必然產生誤差，因而引起學者研究誤差分布的興趣。對於誤差的機率分布型態，就是要找出誤差隨機變數的機率密度函數（probability density function, p.d.f.）。假設誤差隨機變數  $X$  的 p.d.f. 為  $f(x)$ ，數學大師 Gauss 在 1809 年成功的找到  $f(x)$  而發現常態分布，並且建立了誤差理論，作法如下：

假使某個參數的真值是  $\theta$ ，而  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  是  $\theta$  的  $n$  個獨立觀測值，則  $X$  的  $n$  個觀測值為：

$$x_1 = \theta_1 - \theta, x_2 = \theta_2 - \theta, \dots, x_n = \theta_n - \theta \quad (4)$$

將(4)式看成  $n$  個隨機變數  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的觀測值：

$$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n \quad (5)$$

其中  $X_1, X_2, \dots, X_n$  互相獨立且每一個都和  $X$  有相同機率分布。則(5)式的聯合機率密度函數為

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta) \\ &= f(\theta_1 - \theta; \theta) \cdot f(\theta_2 - \theta; \theta) \cdots f(\theta_n - \theta; \theta) \end{aligned} \quad (6)$$

合理估計參數  $\theta$  的方法是將(6)式看成是  $\theta$  的函數，然後求一個  $\theta$  值使得此函數的值最大。亦即，找到使此組樣本觀測值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  產生的可能性為最大的  $\theta$  值。Gauss 在此提出了一個深具觀察力的假設：

$$\text{算術平均數 } \bar{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i \text{ 是參數 } \theta \text{ 的最佳可能值}$$

根據這個假設得知， $\bar{\theta}$  為使得(6)式有最大值的  $\theta$  值，於是

$$\left. \frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) \right|_{\theta=\bar{\theta}} = 0$$

即

$$\sum_{i=1}^n \frac{f'(\theta_i - \bar{\theta})}{f(\theta_i - \bar{\theta})} = 0 \quad (7)$$

令  $\lambda_i = \theta_i - \bar{\theta}$  且  $g(\lambda) = \ln f(\lambda)$ ，則

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = 0 \quad (8)$$

且(7)式變成

$$\sum_{i=1}^n g'(\lambda_i) = 0 \quad (9)$$

由(8)式得  $(\lambda_1 + \varepsilon) + (\lambda_2 - \varepsilon) + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = 0$ ， $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ，代入(9)式得

$$g'(\lambda_1 + \varepsilon) + g'(\lambda_2 - \varepsilon) = g'(\lambda_1) + g'(\lambda_2)$$

則

$$\frac{1}{\varepsilon} [g'(\lambda_1 + \varepsilon) - g'(\lambda_1)] = \frac{1}{\varepsilon} [g'(\lambda_2) - g'(\lambda_2 - \varepsilon)]$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ ，得到

$$g''(\lambda_1) = g''(\lambda_2)$$

所以

$$g''(\lambda) = c, \quad c \text{ 是常數} \quad (10)$$

由(10)式得到

$$g'(\lambda) = c\lambda \quad (\text{由(9)式知常數項爲 } 0)$$

故

$$g(\lambda) = \frac{1}{2} c \lambda^2 + c_1$$

其中  $c_1$  是常數，由  $g(\lambda) = \ln f(\lambda)$  得到

$$f(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2} c \lambda^2 + c_1\right) = k \cdot \exp\left(\frac{1}{2} c \lambda^2\right)$$

因爲 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 時， $f(\lambda) \downarrow 0$ ，所以 $c < 0$ ，令其爲 $-\alpha^2$ ，則

$$f(\lambda) = k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\lambda^2\right)，其中 k = \exp(c_1)$$

又因爲 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\lambda = 1$ ，推得 $k = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}$ ，故得

$$f(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha x)^2\right]$$

通常令 $\alpha = \frac{1}{\sigma}$ ，則誤差隨機變數 $X$ 的 p.d.f.寫成

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right] \quad (11)$$

(11)式就是常態分布的機率密度函數，今天我們熟知它的圖形是鐘形曲線，期望值 $E(X) = 0$ ， $\sigma^2$ 爲 $X$ 的變異數，記成 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 。若 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 的平均數爲 $\mu$ ，則(11)式就變成

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right] \quad (12)$$

這是我們在一般統計書籍上常看到的常態分布的機率密度函數的寫法。據此，Guass 提出了他的誤差理論：「誤差的隨機變數遵循常態分布的機率法則。」

## 五、結語》以管窺豹，可見『一般』

有了誤差的機率分布型態，再藉由改進模型的技術，科學就可以『相當高』的機率產生『相當接近』參數真值的估計值。因此，只要遵循科學方法，預測可以做的愈來愈準確。所以抽樣可以『以少論全』，以管窺豹不只見到『一斑』，而是『一般』。

科學預測的準確度如何，最後仍然要由實際發生的結果來定論，這也是實證研究的一部分。臺灣每年的颱風路徑預測就是在多年的經驗累積之下，不斷的修正預測變數，增加觀測值，才能得到不錯的預測結果。最近報載，有一個熱門的禪修團體內部也設有「實證研究中心」，但不知他們用什麼方法來證實他們的實證是真的實證。

最後，請看看老美是如何對付以水晶球來做預測的人：

「Persons pretending to forecast the future shall be considered disorderly under subdivision 3, section 901 of the criminal code and liable to a fine of \$250 and/or six months in prison.」

Section 889, New York State Code of Criminal Procedure

這是紐約州刑法法條之一，它說僞稱能夠預測未來的人應被視爲神經錯亂並應處以 250 元的罰款或六個月的監禁。

## 六、參考文獻》

Harvey, A. C. (1990), *The Econometric Analysis of Time Series*, Cambridge, Massachusetts : The MIT Press.

Pindyck, R. S., and Rubinfeld, D. L. (1998), *Econometric Models and Economic Forecasts*, Fourth Edition, N. Y. : McGraw-Hill, Inc.

許純君(1999)，預測的原則與應用，第一版，臺北，臺灣西書出版社。

蔡聰明(1997)，誤差論與最小平方法，數學傳播，第 21 卷第 3 期，頁 3-13。

# 用計算機發現，用數學方法證明

## 從一道段考命題談起

吳孝仁／政大附中數學科教師

### 一、緣起》

翔哥是在補習班打工的小鮮肉，算得上是資深解題老師。補習班在蒐集各校考題效率極高，拜翔哥所賜，我們偶爾也能欣賞到不同學校老師在段考命題上的設計與巧思，某種程度也算是一種跨校交流。有一次翔哥傳了一張段考題目的照片，要跟我們分享一道指對數範圍考題。照片中我反而關心另一道題目，它是這樣子敘述的：

方程式  $x^{\frac{1}{3}} = 3$  的解  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

我問翔哥，你們寫的解答是不是  $x = \sqrt[3]{3}$ 。果不其然，而且過程不外乎是下面這幾種。例如：

| 解法一                                                                | 解法二                                                                                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 因爲 $x^{\frac{1}{3}} = 3$ ，<br>所以 $x^3 = 3$ ，從而 $x = \sqrt[3]{3}$ 。 | 因爲 $x^{\frac{1}{3}} = 3$ ，<br>所以 $\log x^{\frac{1}{3}} = \log 3$ 。<br><br>$x^{\frac{1}{3}} \log x = \log 3$<br>$\Leftrightarrow 3 \log x = \log 3$<br>故 $x = \sqrt[3]{3}$ 。 |

因爲是高一段考，範圍是指數與對數，題型又是填充題，考量學生的背景知識，**解法二**猜測應該是命題老師所設定的解題思維，而**解法一**的過程比較類似循環小數化分數的符號操作。總之，兩種作法得到相同的答案，應該是不會有什麼問題才對。我的數學小素養告訴我這道命題背後大有文章，所以這一題反而成爲遺珠之憾，沒有被翔哥推薦給我們欣賞。

這篇文章以探究這道命題出發，過程中我們借助圖形計算機 GeoGebra (GGB) 來理解數值的特性及變化，最後再輔以數學方法來論證，某種程度算是對於這道命題的讀書筆記。又新課綱中的計算機議題正夯，希望這樣搭配計算機的探究過程能與各方先進分享並作爲概念連結或深入教學的素材。

## 二、用圖形計算機 GGB 計算數值 (1) 》

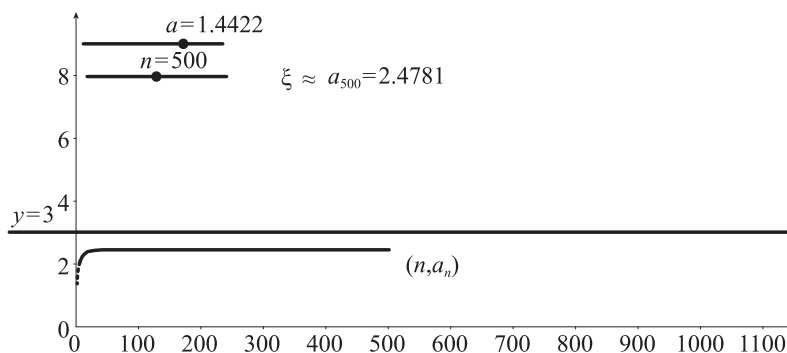
爲了方便起見，我們將題目改成

命題 (P)：方程式  $a^{a^{a^{\dots}}} = 3$  的解  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

關於  $a^{a^{a^{\dots}}}$  這個數，我們應理解成數列  $\langle a_n \rangle$  的極限  $\xi$ ，即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi = a^{a^{a^{\dots}}}$ 。其中  $a_n = a^{a_{n-1}}$ ，且  $a_1 = a > 0$ 。我們在 GGB 的輸入欄裡依序輸入指令如下：

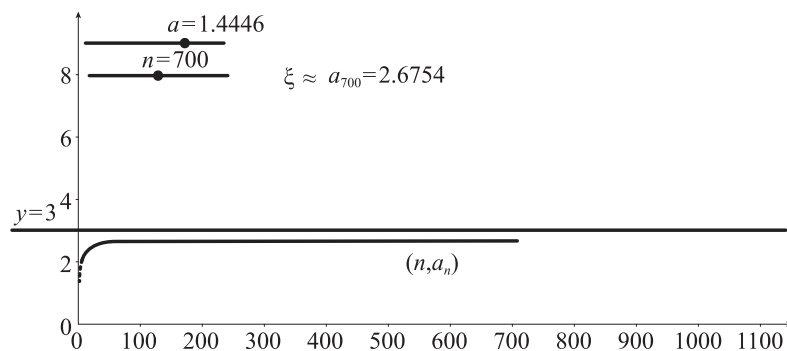
| 步驟 | 輸入指令                                | 附註說明                                                                                                                            |
|----|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | $a = \sqrt[3]{3} \approx 1.4422$    | 調整數值滑桿 $a$ 的區間最小值爲 0，最大值爲 2，增量爲 0.0001。                                                                                         |
| 2  | $n = 1$<br>(迭代次數)                   | 調整數值滑桿 $n$ 的區間最小值爲 1，最大值爲 10000，增量爲 1。                                                                                          |
| 3  | IterationList[a^x, a, n]            | 生成串列：list1={1.4422,1.6958}。<br>改變 $n$ 的值就能看到數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 $n$ 項，例如前 5 項爲<br>{1.4422,1.6958,1.8608,1.9767,2.0624}。 |
| 4  | Sequence[(t, list1(t)), t, 1, n, 1] | 在繪圖區生成點列 $\langle (n, a_n) \rangle$ 。                                                                                           |

適當調整比例後，如下圖(1)所示。觀察發現，當  $a = \sqrt[3]{3} \approx 1.4422$ ， $a_n$  的值趨於穩定，約 2.4781。換句話說，雖然還沒有證明，但是我們願意相信  $a = \sqrt[3]{3} \approx 1.4422$  時， $\langle a_n \rangle$  收斂，即  $\xi \approx 2.4781$ ，但是  $\xi \neq 3$ 。這個觀察出來的結果與命題 (P) 矛盾！

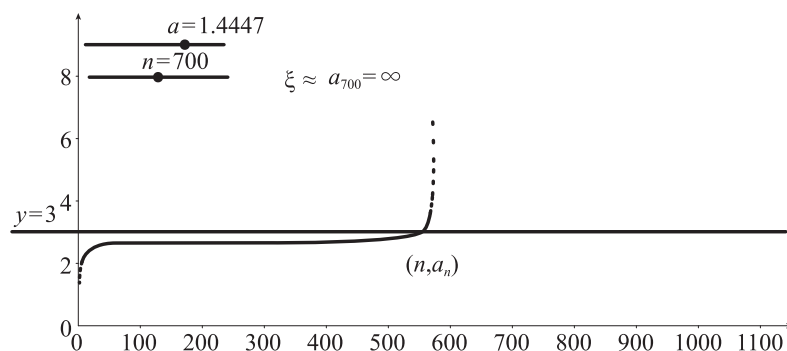


圖(1)

讓  $a$  稍微增大，如下圖(2)，圖(3)所示。



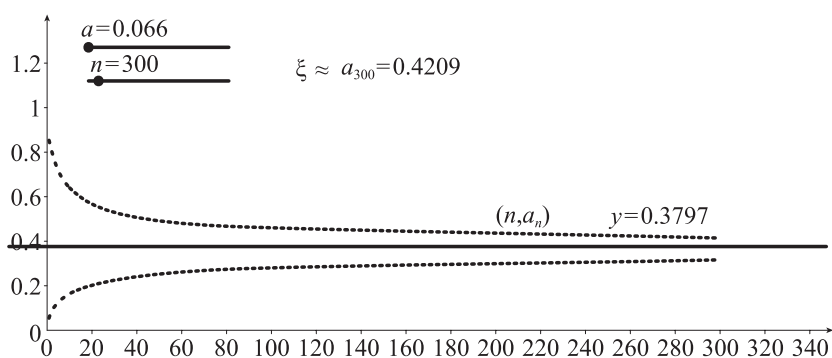
圖(2)



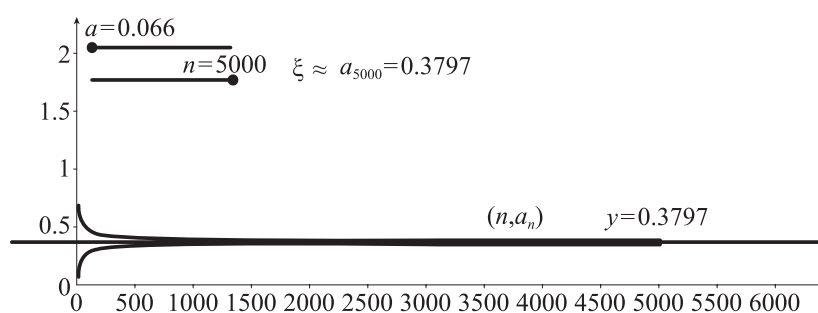
圖(3)

我們可以觀察到兩個現象。第一， $a > 1.4447$ ， $\langle a_n \rangle$  發散，並且是無界數列。而當  $1 \leq a < 1.4446$ ， $\langle a_n \rangle$  收斂。第二，在  $\langle a_n \rangle$  收斂的情況下改變  $a$  值，那麼  $\xi$  永遠達不到 3。因此，應該有個臨界值  $v$  介於 1.4446 與 1.4447，使得  $1 \leq a < v$  或  $1 \leq a \leq v$ ， $\langle a_n \rangle$  收斂。而  $a \geq v$  或  $a > v$ ， $\langle a_n \rangle$  發散。

如果  $a$  在區間  $(0,1)$  內變動，數列  $\langle a_n \rangle$  的行為又是如何呢？當  $a = 0.066$ ， $\langle a_n \rangle$  的值雖然在 0.3797 上下變動，但當  $n$  夠大的時候，其值會趨近 0.3797，如下圖(4)，圖(5)。



圖(4)



圖(5)

而當  $a = 0.065$ ，數列  $\langle a_n \rangle$  的行為產生極大的差異，其值如下表所示。可見， $\langle a_n \rangle$  總是在 0.303 與 0.436 附近變化，卻不在一個定值會聚。我們有理由相信，當  $a = 0.065$ ，數列  $\langle a_n \rangle$  是發散的。

|                                 |
|---------------------------------|
| $a_{4997} = 0.303123980546706$  |
| $a_{4998} = 0.436682282251427$  |
| $a_{4999} = 0.303123980546706$  |
| $a_{5000} = 0.436682282251427$  |
| ⋮                               |
| $a_{9997} = 0.303123980546728$  |
| $a_{9998} = 0.436682282251400$  |
| $a_{9999} = 0.303123980546728$  |
| $a_{10000} = 0.436682282251400$ |

因此，也應該有個臨界值  $u$  介於 0.065 與 0.066，使得  $u \leq a < 1$  或  $u < a < 1$ ， $\langle a_n \rangle$  收斂。而  $0 < a < u$  或  $0 < a \leq u$ ， $\langle a_n \rangle$  發散。

總結以上藉由數值的觀察，我們重新描述所關心的問題：

1. 能不能具體的描述這個「收斂」區間  $I$ ，以  $u$ ， $v$  為左右端點，使得  $a \in I$ ， $\langle a_n \rangle$  收斂？
2. 如果  $a \in I$ ， $\xi$  的值是否能刻劃出範圍？

### 三、用圖形計算機 GGB 計算數值 (11)》

前一小節由數值去觀察數列  $\langle a_n \rangle$  並不容易，有的時候必須一直調整比例，才能觀察出數值上細微的變化。在這一小節，我們要把數列  $\langle a_n \rangle$  視覺化。

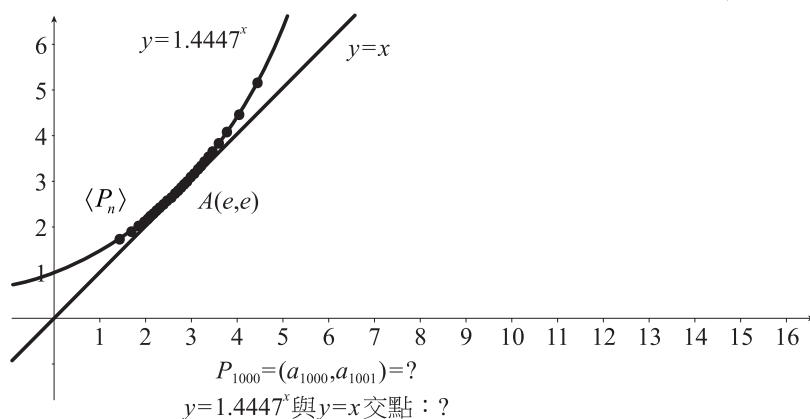
因為  $a_n = a^{a_{n-1}}$ ，考慮坐標平面上的點列  $\langle P_n = (a_n, a_{n+1}) \rangle$ ，則點列  $\langle P_n \rangle$  在函數  $y = a^x$  的圖形上。這樣考量的好處是，如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$ ，因為  $a_n = a^{a_{n-1}}$ ，又  $y = a^x$  是連續函數。所以  $\xi = a^\xi$ ，換言之， $(\xi, \xi)$  是  $y = a^x$  與  $y = x$  的交點，而函數  $y = a^x$  圖形上的點列  $\langle P_n \rangle$  會聚在  $(\xi, \xi)$ 。同時另一方面，如果  $y = a^x$  與  $y = x$  沒有交點， $\langle a_n \rangle$  一定不是收斂數列。

開啓 GGB 的副繪圖區（檢視→副繪圖區，或 Ctrl+Shift+2）。在 GGB 的輸入欄裡依序輸入指令如下：

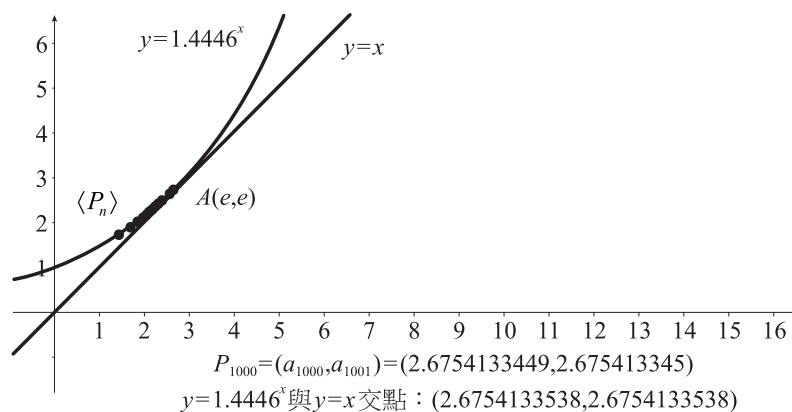
| 步驟 | 輸入指令                                         | 附註說明                       |
|----|----------------------------------------------|----------------------------|
| 1  | Sequence[(list1(t), a^list1(t)), t, 1, n, 1] | 生成點列 $\langle P_n \rangle$ |
| 2  | $y = a^x$                                    | 畫函數 $y = a^x$              |
| 3  | $y = x$                                      | 畫直線 $y = x$                |

【注意】點選生成的物件  $\langle P_n \rangle$ ， $y = a^x$ ， $y = x$ 。按右鍵→屬性→進階。在位置欄位取消繪圖區，勾選副繪圖區，這樣物件才會只顯示在副繪圖區。另外，點列  $\langle P_n \rangle$  的會聚現象很明顯，我們可以重新調整數值滑桿  $n$  的區間最大值為 1000 即足夠。

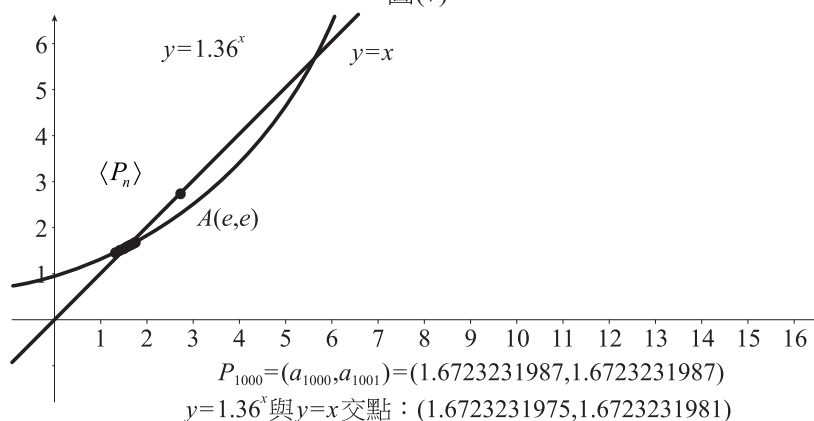
下圖(6)，圖(7)，圖(8)分別表示當  $a = 1.4447, 1.4446, 1.36$  時，點列  $\langle P_n \rangle$  的收斂情形。



圖(6)



圖(7)



圖(8)

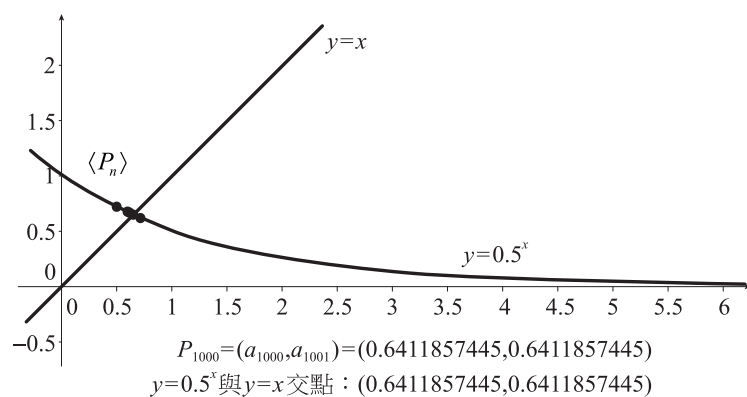
調整  $a$  值滿足  $a > 1.4447$  可以發現點列  $\langle P_n \rangle$  沒有會聚的趨勢。而當  $1 \leq a < 1.4446$ ，點列  $\langle P_n \rangle$  會聚在  $y = a^x$  與  $y = x$  的其中一個交點，事實上是  $x$  坐標不大於尤拉常數  $e$  的那一個交點，這時候  $\xi \leq e$ 。我們已經知道，當  $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ ， $y = a^x$  與  $y = x$  交於相異兩點；當  $a = e^{\frac{1}{e}}$ ， $y = a^x$  與  $y = x$  相切於  $(e, e)$ ；當  $a > e^{\frac{1}{e}}$ ， $y = a^x$  與  $y = x$  沒有交點。而  $e^{\frac{1}{e}} \approx 1.444667861$  恰好介於 1.4446 與 1.4447 之間，因此，我們猜測

A.  $a > e^{\frac{1}{e}}$ ， $\langle a_n \rangle$  發散，且  $\langle a_n \rangle$  是無界數列。

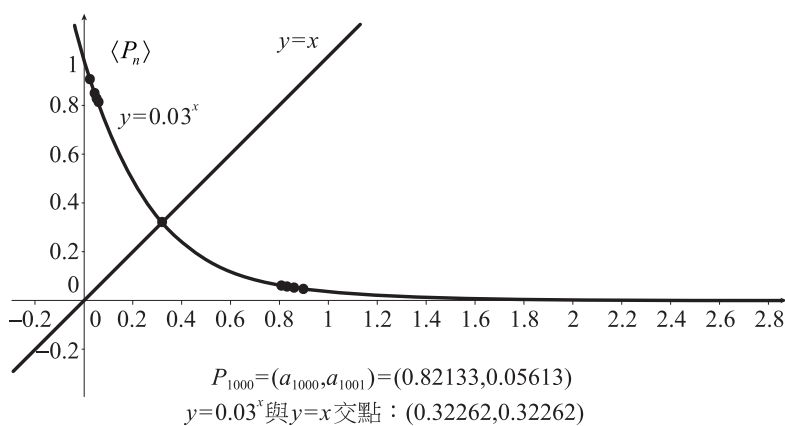
B.  $1 \leq a \leq e^{\frac{1}{e}}$ ， $\langle a_n \rangle$  收斂至  $\xi$ ，且  $\xi \leq e$ 。

關於  $y = a^x$  與  $y = x$  的交點情形，已有文獻做很詳盡的討論，請參考[1]、[2]。

同樣的，當  $0 < a < 1$ ，下圖(9)，圖(10)分別表示  $a = 0.5$ ， $0.03$  時，點列  $\langle P_n \rangle$  的收斂情形。

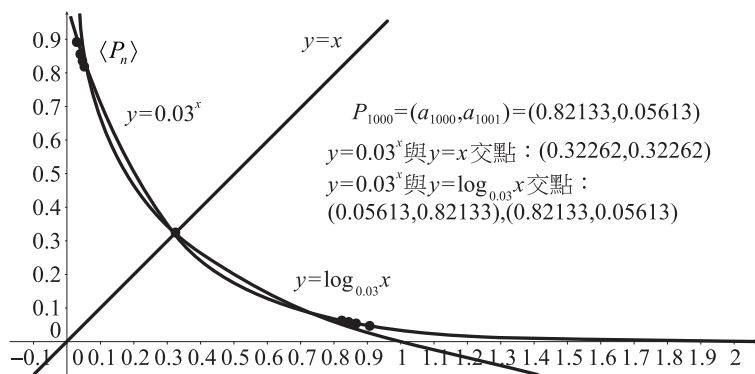


圖(9)



圖(10)

我們知道當  $0 < a < 1$ ， $y = a^x$  與  $y = x$  總是恰有一個交點。但是如圖(10)，當  $a = 0.03$ ， $\langle P_n \rangle$  的聚點卻不在  $y = x$  上，此時  $\langle P_n \rangle$  不收斂。為了解釋這個現象，我們把  $y = \log_a x$  的圖形考慮進來，如圖(11)。



圖(11)

觀察點列  $\langle P_n \rangle$  及數值，發現  $\langle P_n \rangle$  的會聚點其實是  $y = 0.03^x$  與  $y = \log_{0.03} x$  的兩個不在  $y = x$  上的交點。關於  $y = a^x$  與  $y = \log_a x$  的交點情形，請參考[1]、[2]。我們已經知道，當  $(\frac{1}{e})^e < a < 1$ ，

$y = a^x$  與  $y = \log_a x$  恰交於一點，這個交點也在  $y = x$  上；當  $a = (\frac{1}{e})^e$ ， $y = a^x$  與  $y = \log_a x$  相切於

$(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ ；當  $0 < a < (\frac{1}{e})^e$ ， $y = a^x$  與  $y = \log_a x$  有三個相異交點。而  $(\frac{1}{e})^e \approx 0.0659880358$  恰好介於 0.065 與 0.066 之間，因此，我們猜測

C.  $0 < a < (\frac{1}{e})^e$ ， $\langle a_n \rangle$  發散。

D.  $(\frac{1}{e})^e \leq a < 1$ ， $\langle a_n \rangle$  收斂至  $\xi$ ，且  $\frac{1}{e} \leq \xi$ 。

接下來，我們要用數學方法證明以上的猜測。

#### 四、用數學方法證明

**引理 1.**  $a > e^{\frac{1}{e}}$ 。存在  $d > 0$ ，使得  $a^x - x > d$ 。

**證明：**注意到  $a > e^{\frac{1}{e}} > 1$ ，考慮函數  $f(x) = a^x - x$ 。

則  $f'(x) = (\ln a)a^x - 1$  且  $f''(x) = (\ln a)^2 a^x > 0$ 。

又  $a > e^{\frac{1}{e}}$ ，即  $\ln a > \frac{1}{e} > 0$ ，故存在實數  $r$ ，使得  $a^r = \frac{1}{\ln a} < e$ 。

於是  $f'(r) = (\ln a)a^r - 1 = 0$ ， $f''(r) = (\ln a)^2 a^r > 0$ 。

由二階導數檢驗得知  $f(r)$  為最小值，即  $f(x) \geq f(r)$ 。

令  $d = f(r) = a^r - r = \frac{1}{\ln a} - r$ 。

因為  $a^r < e$ ，從而  $r < \log_a e = \frac{1}{\ln a}$ ，因此  $d = \frac{1}{\ln a} - r > 0$ 。 ■

**性質 A.**  $a > e^{\frac{1}{e}}$ 。  $\langle a_n \rangle$  發散且  $\langle a_n \rangle$  是無界數列。

**證明：**因為數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_n = a^{a_{n-1}}$ ，且  $a_1 = a > 0$ 。由引理 1，

$$a_k - a_{k-1} = a^{a_{k-1}} - a_{k-1} > d > 0，$$

即  $\langle a_n \rangle$  為單調遞增數列。又

$$a_n - a_1 = \sum_{k=2}^n a_k - a_{k-1} > (n-1)d。$$

所以  $a_n > a + (n-1)d$ ， $\langle a_n \rangle$  是無界數列且發散。 ■

**性質 B.**  $1 \leq a \leq e^{\frac{1}{e}}$  。  $\langle a_n \rangle$  收斂至  $\xi$  且  $\xi \leq e$  。

**證明：**因為  $a = 1$  是顯然的情形，以下我們討論  $1 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$  。

既然  $a > 1$ ， $a_2 = a^a > a^1 = a_1$ ， $a_3 = a^{a_2} > a^{a_1} = a_2$ 。由簡單的歸納法可以得知

$$a_n = a^{a_{n-1}} > a^{a_{n-2}} = a_{n-1}。$$

因此  $\langle a_n \rangle$  是單調遞增數列。另一方面，

$$a \leq e^{\frac{1}{e}} < e，a_2 = a^a < (e^{\frac{1}{e}})^a < (e^{\frac{1}{e}})^e = e，a_3 = a^{a_2} < (e^{\frac{1}{e}})^{a_2} < (e^{\frac{1}{e}})^e = e。$$

由簡單的歸納法可以得知

$$a_n = a^{a_{n-1}} < (e^{\frac{1}{e}})^{a_{n-1}} < (e^{\frac{1}{e}})^e = e。$$

因此  $\langle a_n \rangle$  是有界數列，且  $e$  為上界。

綜合上述， $\langle a_n \rangle$  是遞增的有界數列。由單調收斂定理， $\langle a_n \rangle$  收斂。又因為

$$a_n < e，故 \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq e。$$

■

當  $\langle a_n \rangle$  收斂至  $\xi$ ，因為  $a_n = a^{a_{n-1}}$ ， $y = a^x$  是連續函數，所以  $\xi = a^\xi$ 。換言之， $(\xi, \xi)$  是  $y = a^x$  與  $y = x$  的交點。因為  $1 \leq a \leq e^{\frac{1}{e}}$ ，性質 B 告訴我們， $(\xi, \xi)$  是  $y = a^x$  與  $y = x$  的交點中  $x$  坐標不大於尤拉常數  $e$  的那一個交點，順帶一提的是，當  $a = e^{\frac{1}{e}}$ ，此時  $\langle a_n \rangle$  收斂至  $e$ 。

**引理 2.**  $0 < a < 1$ 。

$$(1) a^{a_n} < \log_a a_n \Leftrightarrow a^{a_{n+1}} > \log_a a_{n+1}。$$

$$(2) a^{a_n} > \log_a a_n \Leftrightarrow a^{a_{n+1}} < \log_a a_{n+1}。$$

**證明：**證明(1)是直接的

$$\begin{aligned} a^{a_n} &< \log_a a_n \\ \Leftrightarrow a^{a^{a_n}} &> a^{\log_a a_n} \\ \Leftrightarrow a^{a_{n+1}} &> a_n = \log_a a^{a_n} = \log_a a_{n+1}。 \end{aligned}$$

同理可得(2)。

■

**引理 3.**  $0 < a < (\frac{1}{e})^e$ 。

(1)  $f(x) = a^x - \log_a x$  恰有三個相異實根  $\alpha < \beta < \gamma$ ，其中  $\alpha < a^\alpha$ ， $\beta = a^\beta$ ， $\gamma > a^\gamma$ 。

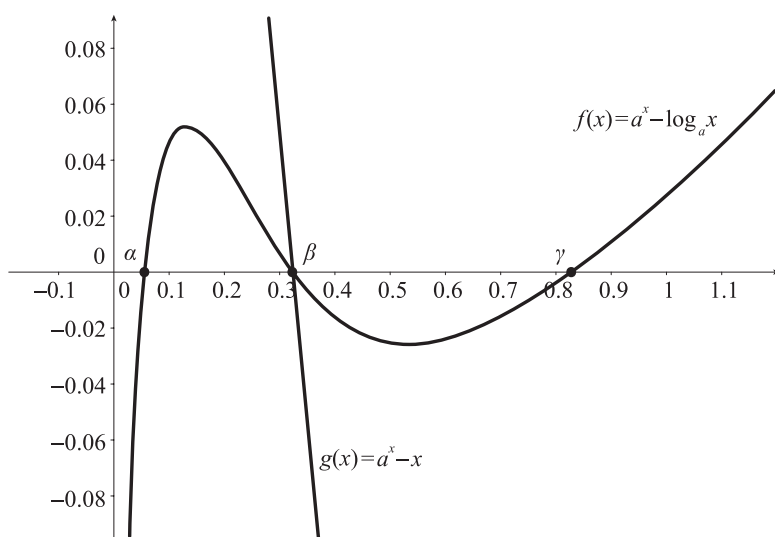
且  $x \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \gamma) \Leftrightarrow f(x) < 0$ ； $x \in (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \infty) \Leftrightarrow f(x) > 0$ 。

(2)  $g(x) = a^x - x$  恰有一個實根  $\beta$ ，其中  $\beta = a^\beta$ 。

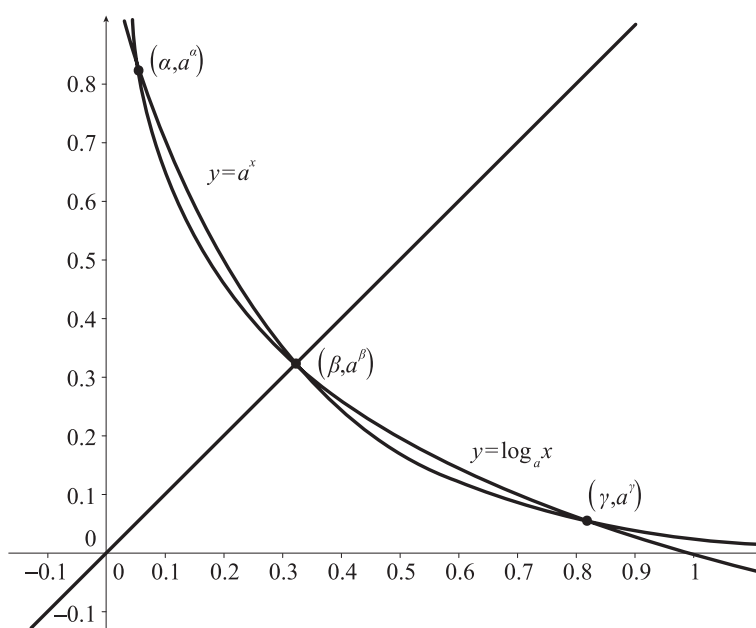
且  $x \in (-\infty, \beta) \Leftrightarrow g(x) > 0$ ； $x \in (\beta, \infty) \Leftrightarrow g(x) < 0$ 。

證明請參考[1]、[2]。我們想從圖形上來理解這件事。當  $0 < a < (\frac{1}{e})^e$ ， $f(x)$  與  $g(x) = a^x - x$  的圖

形如圖(12)，而關係式： $\alpha < a^\alpha$ ， $\beta = a^\beta$ ， $\gamma > a^\gamma$  其實反應  $y = a^x$  與  $y = \log_a x$  的三個相異交點  $(\alpha, a^\alpha)$ ， $(\beta, a^\beta)$ ， $(\gamma, a^\gamma)$  中，點  $(\alpha, a^\alpha)$  位在  $y = x$  上方半平面，點  $(\beta, a^\beta)$  位在  $y = x$  上，而點  $(\gamma, a^\gamma)$  位在  $y = x$  下方半平面，如圖(13)。



圖(12)



圖(13)

性質 C.  $0 < a < (\frac{1}{e})^e$  ,  $\langle a_n \rangle$  發散。

證明：因爲  $a \in (0, (\frac{1}{e})^e) \subseteq (0, 1)$  ,  $a^{a_1} = a^a < a^0 = 1 = \log_a a = \log_a a_1$  。

由引理 2 ,  $a^{a_2} > \log_a a_2$  。由簡單的歸納法可以得知：

$$\{a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots\} \subseteq \{a^x < \log_a x\} ,$$

$$\{a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots\} \subseteq \{a^x > \log_a x\} 。$$

另一方面，因爲  $a < 1$  ,  $a^{a_1} > a^1 = a_1$  , 即  $a_1 \in \{a^x > x\}$  。

類似的  $a^{a_2} = a^{a^{a_1}} < a^{a_1} = a_2$  ,  $a_2 \in \{a^x < x\}$  。歸納可得知：

$$\{a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots\} \subseteq \{a^x > x\} ,$$

$$\{a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots\} \subseteq \{a^x < x\} 。$$

因此

$$\{a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots\} \subseteq \{a^x < \log_a x\} \cap \{a^x > x\} ,$$

$$\{a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots\} \subseteq \{a^x > \log_a x\} \cap \{a^x < x\} 。$$

由引理 3 ,  $a_{2k-1} < \alpha < \gamma < a_{2k}$  對任意  $k$  。

其中  $\alpha < \beta < \gamma$  是  $f(x) = a^x - \log_a x$  的三個相異實根並滿足  $\alpha < a^\alpha$  ,  $\beta = a^\beta$  ,  $\gamma > a^\gamma$  。

由於  $|a_{2n} - a_{2n-1}| > \gamma - \alpha > 0$  , 因此  $\langle a_n \rangle$  不是收斂數列。 ■

引理 4.  $(\frac{1}{e})^e \leq a < 1$ 。

(1)  $f(x) = a^x - \log_a x$  恰有一個實根  $\beta$ ，其中  $\beta = a^\beta$ 。

(2)  $a = (\frac{1}{e})^e$ ， $g(x) = a^x - x$  恰有一個實根  $\frac{1}{e}$ 。

且  $x \in (-\infty, \frac{1}{e}) \Leftrightarrow g(x) > 0$ ； $x \in (\frac{1}{e}, \infty) \Leftrightarrow g(x) < 0$ 。

證明請參考[1]、[2]。

性質 D.  $(\frac{1}{e})^e \leq a < 1$ 。 $\langle a_n \rangle$  收斂至  $\xi$  且  $\frac{1}{e} \leq \xi$ 。

證明：因為  $a \in [(\frac{1}{e})^e, 1) \subseteq (0, 1)$ ， $0 < a_2 = a^a < a^0 = 1$ ， $0 < a_3 = a^{a_2} < a^0 = 1$ 。

由簡單的歸納法可以得知： $0 < a_n < 1$ 。另一方面，

$$a_2 = a^a > a^1 = a_1, \quad a_3 = a^{a_2} > a^1 = a_1, \quad a_4 = a^{a_3} < a^{a_1} = a_2, \\ a_5 = a^{a_4} > a^{a_2} = a_3, \quad a_6 = a^{a_5} < a^{a_3} = a_4。$$

由簡單的歸納法可以得知：

$$a_1 < a_3 < a_5 < \cdots < a_6 < a_4 < a_2。$$

換言之，我們有下列的一組區間套列

$$[a_1, a_2] \supset [a_3, a_4] \supset \cdots \supset [a_{2n-1}, a_{2n}] \supset \cdots$$

因為數列  $\langle a_{2k-1} \rangle$  遞增且有上界  $a_2$ ，數列  $\langle a_{2k} \rangle$  遞減且有下界  $a_1$ 。

所以  $\langle a_{2k-1} \rangle$ ， $\langle a_{2k} \rangle$  收斂。

假設  $\lim a_{2k-1} = \beta_1$ ， $\lim a_{2k} = \beta_2$ ，利用

$$a_{2k} = a^{a_{2k-1}}, \quad a_{2k-1} = a^{a_{2k-2}} \text{ 及 } y = a^x \text{ 是連續函數。可得 } \beta_2 = a^{\beta_1}, \quad \beta_1 = a^{\beta_2}。$$

因此， $a^{\beta_1} = \beta_2 = \log_a \beta_1$ ， $a^{\beta_2} = \beta_1 = \log_a \beta_2$ 。

即  $\beta_1$ ， $\beta_2$  為  $f(x) = a^x - \log_a x$  的根。

由引理 4， $\beta_1 = \beta_2$ 。

由區間套定理，唯一存在  $\xi \in [a_{2n-1}, a_{2n}]$  對所有  $n$ ，並且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$ ，同時  $\xi = a^\xi$ 。

既然  $0 < a_n < 1$ ，所以  $\xi \leq 1$ 。

最後，因為  $a \geq (\frac{1}{e})^e$ ， $0 < a_n < 1$ 。所以  $a^{a_n} \geq (\frac{1}{e})^{ea_n}$ ，從而  $\xi = a^\xi \geq (\frac{1}{e})^{e\xi}$ 。

換言之， $\xi$  滿足  $x \geq (\frac{1}{e})^{ex}$ ，由引理 4， $\frac{1}{e} \leq \xi$ 。 ■

## 五、結論與評註》

我們總結所有結果如下：

1.  $a \in [(\frac{1}{e})^e, e^{\frac{1}{e}}]$ ， $\langle a_n \rangle$  收斂至  $\xi$ ，其中  $\xi \in [\frac{1}{e}, e]$  且  $a^\xi = \xi$ 。概略來看， $a$  介於 0.0659 與 1.4446， $\langle a_n \rangle$  的極限會落在 0.3678 與 2.7182 之間。
2. 承上， $\langle a_n \rangle$  的極限  $\xi$  在幾何上的意義是： $(\xi, \xi)$  是  $y = a^x$  與  $y = x$  的交點中  $x$  坐標介於  $\frac{1}{e}$  與  $e$  的那一個交點。
3.  $a \in (0, (\frac{1}{e})^e) \cup (e^{\frac{1}{e}}, \infty)$ ， $\langle a_n \rangle$  不收斂。
4. 命題 (P) 其實是一道錯誤的命題。但也因為這個錯誤，讓我們得有機會得以探究下去，所以，稱得上是一個美麗的錯誤！
5. 謝謝翔哥，愛心。

## 六、參考資料》

1. 李政豐、顏貽隆、蔡敏娟、陳明君，函數  $y = a^x$  與  $y = \log_a x$  的圖形交點個數的探索。
2. 許燦煌、彭詢、吳文正，指數函數與其反函數圖形的交點。

# 專欄 動手玩數學



遊戲 137

☆☆

某年二月剛好有 4 天是星期三，而且這 4 天的日期數字和為 62。

(1) 試完成該月的日曆，如下圖所示：

| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 日 |
|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |

(2) 該年的元旦（即一月一日）是星期幾。

## 〔玩鎖・玩索〕

日曆是一種週期性的數學，這個週期性讓我們處理起來省事不少。同樣的情形也可以推到年齡與十二生肖的對應上，如下題所示：

「一位數學家的生平是這樣寫的：死於龍年，一生共經歷九個龍年，且在這九個龍年中，他的歲數總和是 378。問：數學家出生於十二生肖的哪一肖（註：年紀的計算以出生那年算一歲）。」



遊戲 138

☆

許志農／臺灣師大數學系

以簡馭繁、寓複雜於簡單是碎形幾何的基本概念，簡單規則的大量重複使用是達到這兩個目的的不二法門。例如，謝爾品斯基船帆是歷史相當悠久的碎形幾何圖形，它的概念就很簡單，先取一個正三角形，挖掉那個正三角形正中間的四分之一，就產生三個小一點的正三角形。然後就開始「迭代」了，我們對每一個剩下的三角形做同樣的動作：「挖掉它正中間的四分之一」。



第1圖



第2圖



第3圖

在謝爾品斯基船帆的第  $n$  個圖中，令  $b_n$  代表各種灰色三角形（剩下三角形）的總數， $w_n$  代表各種白色三角形（挖掉三角形）的總數。

(1) 求  $b_n$  的公式。

(2) 求  $w_n$  的公式。

## 〔玩鎖・玩索〕

約 1970 年代左右，數學家波努瓦·曼德布洛特 (B. Mandelbrot) 在一篇幾乎算是他思想轉捩點的論文「英國的海岸線有多長？」中，發展出新的維度觀念…，今日稱它為碎形幾何學。在真實的世界裡，如花朵、雪花、樹木、海岸線與股市波動等，都具有碎形的特徵，而聯考考過的科克雪花，也是碎形幾何一個重要的例子：

科克雪花的第 1 圖是邊長為 1 的正三角形；第 2 圖是將第 1 圖的每條邊三等分，以每邊中間部分的線段為邊，向外作正三角形，再

將中間部分的線段去掉，所得到的多邊形；以此規律繼續下去，就得到第3圖…等，如下圖所示。



第1圖

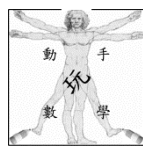
第2圖

第3圖

令  $a_n$  代表科克雪花第  $n$  圖的多邊形邊數， $b_n$  代表第  $n$  圖的邊長總和。

- (1) 寫下  $a_n$  與  $a_{n-1}$  的關係。
- (2) 求一般項  $a_n$ 。
- (3) 寫下  $b_n$  與  $b_{n-1}$  的關係。
- (4) 求一般項  $b_n$ 。

像謝爾品斯基船帆、科克雪花這種簡單規則大量重複使用的過程，在數學上稱之為迭代。所謂迭代，就是高潮迭起的「迭」和變數代換的「代」，在概念上，就是有某個變化，它的圖形或數值被一次又一次地代換成新的圖形或數值，而每次代換之後都做同樣的動作。迭代不僅在曼德布洛特的碎形幾何學裡發生，電腦的運算也用到許多迭代的觀念，電腦程式語言稱它為迴圈。

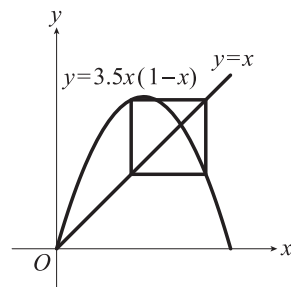


遊戲 139

☆☆☆☆

如下圖所示：拋物線

$y = 3.5x(1-x)$  與直線  $y = x$  上各取兩個相異點當頂點，使它們成為正方形。求拋物線上取的點坐標為何？



### 〔玩鎖・玩索〕

「蝴蝶效應」相傳是洛倫茲在一次計算中首次偶然發現的。1961年洛倫茲在進行長期天氣預報的計算，當時在計算中使用了一臺現在看來速度太慢的電腦，有一次他在計算中斷後重新開始計算時，把上一次計算的中間資料作為這次計算的初始值輸入電腦，指望在重複給出上次的計算結果後電腦再繼續運行下去。然而出人意料的是計算結果只在開始的一小段與原來結果偏差很小，之後偏差愈來愈大以致得到完全相反的結果。洛倫茲意識到問題出在他輸入資料的精度上。因為電腦能以六位元小數運行，這次儲存下的是：0.606127，而印表機僅列印了前三位元數位：0.606。這次他是以這個三位小數作為重新計算的初始值，忽略掉了尾數 0.000127。洛倫茲認為造成重大偏差的原因就是忽略掉了這點尾數，由此他認定這個方程式對初始值具有高度的敏感性。洛倫茲將這一現象比喻為「蝴蝶效應」，意思是說一隻蝴蝶煽動翅膀所引起的氣流擾動會發展成一場「巨大風暴」。

「蝴蝶效應」是「混沌數學」可以解釋的一種現象。什麼是「混沌數學」呢？它是由多項式、三角函數等這些基本函數迭代而成的複雜數學，本遊戲就是一道拋物線所產生的「混沌數學」。



遊戲 140

☆☆

在「代數基本定理」尚未被證明正確之前，萊布尼茲就質疑過「每個實係數多項式都可以分解成一次或者兩次實係數多項式的乘積」的正確性。數學家白努利更舉一個精確的例子說：「四次多項式  $f(x)$  就不可能分解成兩個實係數多項式的乘積」。

然而，代數大師尤拉在 1742 年時，將白努利所舉的四次多項式  $f(x)$  分解為二次多項式

$$x^2 - (2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}})x + (1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{7})$$

與二次多項式

$$x^2 - (2 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}})x + (1 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}} + \sqrt{7})$$

的乘積。

將白努利所舉的多項式  $f(x)$  表成降次排列的形式。

### 〔玩鎖・玩索〕

類似的例子有許多，例如將乘式

$$\begin{aligned} & (x^2 + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}x + \sqrt{5}) \\ & \times (x^2 - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}x + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

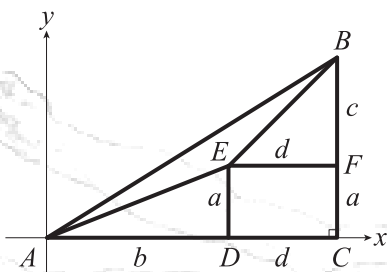
乘開，也是一個整係數多項式。

# 動手玩數學~破解祕笈

第34期

## 遊戲 133

如下圖所示，以  $A$  點為原點，畫一坐標系：



此時

$m_1$  = 直線  $AE$  的斜率；

$m_2$  = 直線  $EB$  的斜率；

$m_3$  = 直線  $AB$  的斜率。

根據斜率的定義，因為直線  $EB$  最傾斜，其次為直線  $AB$ ，最後是直線  $AE$ ，所以

$$m_2 > m_3 > m_1。$$

## 遊戲 134

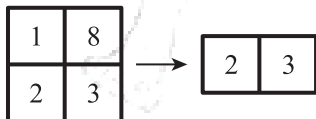
設強盜  $x$  人，搶來  $y$  匹布，依題意

$$\begin{cases} y = 6x + 5 \\ y = 7x - 8 \end{cases} \Rightarrow x = 13, y = 83。$$

故強盜 13 人，搶來 83 匹布。

## 遊戲 135

摺成 12345678 是可以辦到的，方法如下：先對摺地圖成下圖中的左圖



再對摺成上圖中的右圖。此時地圖厚度是四頁，依序為 2, 3，5, 6，4, 7 與 1, 8。接下來，將 2, 3 那一頁往上掀，此時會看到 5, 6 的第二張與 4, 7 的第三張。用手抓著 4, 5 兩頁向上並往內摺，最後抓著 1, 2 兩頁向上往 3 那邊貼即完成。

## 遊戲 136

因為  $c \neq 0$ ，所以  $cx$  是無理數，即  $cx + d$  也是無理數，又由

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax+b}{cx+d} \\ &= \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}， \end{aligned}$$

推得

$$(y - \frac{a}{c})(cx + d) = b - \frac{ad}{c}。$$

根據〈玩鎖·玩索〉的提示，得

$$0 = b - \frac{ad}{c}， y - \frac{a}{c} = 0$$

$$\Rightarrow ad = bc, y = \frac{a}{c}，$$

即當  $ad = bc$  時， $\frac{ax+b}{cx+d}$  為有理數  $\frac{a}{c}$ 。