龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第33刊

贈品禁止轉售 #3

55201N/C/0000000

龍騰文化

編輯室墨記

數學是由什麼構成的？哪種類型的大腦能夠創造數學的定理和系統？幾何學家或是代數學家的思維活動和音樂家、詩人、畫家及象棋選手有什麼不同？在許志農教授的〈龐加萊談數學創造〉中，我們一起來看看什麼是數學創造。

熱騰騰的〈國立臺灣師範大學數學系106學年度大學甄選入學指定項目甄試試題〉出爐囉！快來看看這次甄試考了些什麼題目，也讓自己小試身手吧。

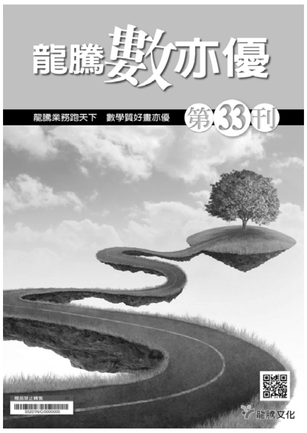
教育改革一直是各方關注的焦點，同時也是爭論不斷的議題。從陳玟樺老師的「民國五十至八十年代（1961~2000年）數學課程改革之探究」中，我們可以了解到過往數學課程的改革之路，並以古鑑今，尋找未來數學改革的新思維。

在〈直觀插值公式解法搭配兩個恆等式等價牛頓當年提出的插值公式解法與其推廣應用〉中，李維昌老師以有別於拉格朗日的方式來證明牛頓插值法，我們來看看是怎麼做到的吧。

數學家經常用函數 $\pi(n)$ 來表示「小於或等於 n 的質數總數」，它有什麼特殊的性質呢？翻開動手玩數學，跟著許教授一起來解密吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的內容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 kilro_pan@lungteng.com.tw。



發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
執行編輯：潘善興
美術編輯：林佳瑩

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248新北市五股區五工六路30號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2298-9755
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2017/5/8
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2017.5 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

許志農 臺灣師大數學系 3

》》龐加萊談數學創造

許志農 臺灣師大數學系 8

》》國立臺灣師範大學數學系 106 學年度大學甄選入學指定項目甄試試題

陳玟樺 新北市立清水高中 15

》》民國五十至八十年代（1961～2000 年）數學課程改革之探究

李維昌 宜蘭高中退休教師 34

》》直觀插值公式解法搭配兩個恆等式等價牛頓當年提出的插值公式解法與其推廣應用

許志農 臺灣師大數學系 45

》》動手玩數學專欄

》》動手玩數學《第 32 期》破解祕笈

龐加萊談數學創造

（Poincaré on Mathematical Creation）

許志農／臺灣師大數學系

一、作者介紹與文章引言》

數學是由什麼構成的？哪種類型的大腦能夠創造數學的定理和系統？幾何學家或是代數學家的思維活動和音樂家、詩人、畫家及象棋選手有什麼不同？數學創造中，哪些是關鍵元素？直覺？空間和時間的精確感覺？像機器般的計算準確性？超強的記憶力？複雜邏輯推導的超強技能？極好的注意力？

心理學家試著想回答這問題，但他們的解釋並不深刻。雅克・阿達瑪（Jacques Hadamard），一位傑出的法國數學家，出版一本小書《數學領域中的發明心理學》來介紹這個主題。這本書是以輕鬆有趣的方式，而不是用啟發的手法來入筆。例如，書中提到，著名的骨相學家加爾（Gall）說「數學能力僅與大腦的某些不為有關連，而且與腦殼的某些部位也有聯繫。」心理學家梭里奧（Souriau）說「發明純粹是一種機遇。」

數學家馬耶（Maillet）曾具體地向數學家們提出過「數學夢」是否存在的問題。數學家是否受噪音或天氣的影響？這些說法現在看來，只是茶餘飯後的趣談，沒有太多實質上的意義。但是，阿達瑪也在書中深刻的探討了創造（特別是數學創造）的心理學。例如，克勞德・伯納德（Claude Bernard），一位偉大的生理學家，說「思想過於古板的人，不適宜從事發明的工作。」赫姆霍爾茲（Helmholtz）和亨利・龐加萊（Henri Poincaré）對出現在面前的解答的特色經常是

(1)與我前些日子的努力似乎毫無關係，因而難以認為是以前工作的結果。

(2)出現得非常突然，幾乎無暇細想。

事實上，阿達瑪寫這本書的動機是來自龐加萊一次重要的演講。

接下來的文章，是 1908 年 5 月 23 日在巴黎心理學會上做的一份報告，這內容是描述關於數學家大腦如何運轉的最著名的嘗試。該報告的作者，亨利・龐加萊（法國總統雷蒙德的表親），是承擔該任務的極其適當的人選。作為歷史上最重要的數學家之一，一位無可匹敵的分析和數學物理學家，龐加萊同樣擅長對科學哲學作出清晰準確的闡釋。這份報告對於科學家們而言是一極為重要的專業論述，同時在很大程度上，也可以為非專業人士所理解。

二、演講稿譯文》

數學創造的產生是一個會引起心理學家強烈興趣的問題。它是一種活動，在這種活動中，人類心智似乎從外部世界取走的東西最少，在這種活動中，人類心智起著作用，或者似乎只是自行起作用和憑靠自己起作用。因此，通過瞭解數學創造活動的過程，我們或許能夠瞭解到人類頭腦思考運作的最基本之處。

最初的事實應使我們感到驚奇，或者更確切地講，如果我們還不這樣習慣它，它就會使我們感到驚訝。有人不理解數學，這是怎麼發生的呢？既然數學只求助於諸如所有正常心智都能接受的邏輯規則，既然數學的證據建立在對一切人都是共同的原理的基礎上，既然沒有一個不發瘋的人會否認這一點，那麼在這裡為何出現如此之多執拗的人呢？

不是每一個人都能發明東西，這一點人人都知道。不是每一個人都能夠記住一次學到的數學證明，這一點也說得過去。但是，「當把數學推理加以說明之後，並非每一個人都能夠理解它，甚至一再說明，也無法理解」，我們想想這件事，似乎是十分奇怪的。而且不可否認的，大多數人只能夠相當吃力地仿效這一推理，相信這是每位中學教師都有的共同感受。

進而要問：在數學中，為何也可能出錯？一般人不會犯邏輯思考上的錯誤，而那種發生在日常的生活活動中的簡短推理方面，不會犯錯的敏銳者，卻不能毫無錯誤地仿效或重複較為冗長的數學證明；這些證明雖然較長，但畢竟只是完全類似於他們容易作出的簡短推理的堆積而已。我們還需要補充說數學家本人是不會犯錯的嗎？這答案對我來說是顯而易見的。

對於我自己，我必須承認：甚至連做加法我都有可能會算錯。我的記性不是不好，但它不足以使我成為一位高明的棋手。但，在一段困難的數學推理中，最高明的棋手也會暈頭轉向，可是我為什麼不會失敗呢？顯然，這是因為一般的推理步驟引導著我。數學證明並不是簡單的一堆演繹的排列而已，它是將這些演繹按照特定的順序排列而成，而且排列的順序比演繹元素本身更為重要。如果我對這個順序產生某種感覺，或稱直覺，只需要一眼就能領悟到這些演繹的整體，那麼我不會擔心我忘記其中的一個元素，原因是每個元素都是以特定方式被放置在這個陣列中的，而不需要我用記憶去牢記。

我們知道，對數學秩序的這種感覺，可以讓我們察覺到隱藏的和諧和關係的這種直覺，它並不是每一個人都具有的。有些人既缺乏這種難以被定義的精妙感覺，又缺少超常的記憶力和注意力，他們絕對不可能理解較高級的數學。這種人是多數。另一些人僅略有這種感覺，但是他們具有非同尋常的記憶力和高度的注意力這樣的天賦。他們將一個接一個地記住各種細節；他們能夠理解數學，有時也能應用，但是他們不能創造。最後，還有一些人或多或少地具有所提到的特殊的直覺，就算他們沒有出眾的記憶力，他們卻不僅能夠理解數學，而且可以成為創造者，並試圖作出發明，其成功之大小取決於這種直覺在他們身上發展的程度之大小。

事實上，什麼是數學創造呢？它並不意味著對已知數學事物的重新組合而已。任何人都可以做到重新組合，但這種組合的數量是無限的，並且大多數毫無價值。創造，意味著不製造無用的組合，而僅製造那些少量且有用的組合。創造即是辨別，就是選擇。

現在，比較深刻地洞察一下，看看在數學家的心靈本身中發生著什麼。關於這一點，我相信，回憶一下我自己的心靈是最好不過的了。不過我將僅限於講述我寫第一篇關於富克斯函數論文的情況。我請求聽眾原諒：我將會使用某些技術術語，但你們無需感到害怕，因為你們並不需要理解它們。比如，我會這麼說，我是在這樣的情況下找到了這樣一個定理的證明。這個定理有一個奇怪的名字，恐怕我們之中大多數人都不熟悉它。但這一點無關緊要，對於心理學家來說，重要的並不是定理本身，而是發現這定理的種種情形。

我曾用了十五天時間力圖證明，不可能存在任何類似於我後來稱之為富克斯函數的函數，但這個想法之後被證明是錯誤的。當時我對這函數一無所知，每天坐在書桌前，呆坐一兩個小

時，嘗試大量的組合，卻一無所獲。直到一天晚上，我違反了我的習慣，我喝了黑咖啡，難以入眠。眾多思緒蜂擁而至，我感到他們在不斷的衝突和碰撞…直到最後，他們一一相連，也就是說，形成了一個穩定的組合體。第二天早上，我已經建立好一類富克斯函數的存在性證明，這些函數來自於超幾何級數。我只需要把結果寫下來即可，前後花了不過幾個小時。

接著，我想用兩個級數之商把這些函數表示出來；這種想法完全是有意識的和深思熟慮的，是過去的橢圓函數的情形指導著我這樣做。我問我自己，如果這些級數存在，它們必須具有什麼性質，我毫無困難地獲得了成功，形成了我所謂的 θ-富克斯函數。

就在此時，我離開了我所居住的地方—卡昂。在礦業學院的支助下，開始了地質考察的旅行生活。沿途的景致使我忘卻了我的數學工作。到達康斯坦茨湖後，我們要乘一輛馬車到其他地方去，就在我把腳放到馬車踏板上的一剎那，一個思想突然閃爍在我腦海中，而在此之前，我還從來沒想過這個思想。這思想就是：定義富克斯函數的變換與非歐幾何中的變換是等價的。當時我並沒有馬上去證明這個想法，因為我當時沒有時間去考慮這件事。我繼續和馬車裡的旅伴海闊天空地談論著其他事情，然而我能感覺得到剛才所獲得的這個思想是完全確實的。在旅行結束回到我所居住的卡昂之後，為了能問心無愧，我還是抽空給出了這個思想的證明。

然後，我把注意力轉向一些算術問題的研究，表面看來沒有取得許多成果，也沒有想到它們與我以前的研究有什麼關聯。我為我的失敗而掃興，於是前往海濱消磨幾天時間，想一些其他事情。有一天早上，當我正在懸崖上散步時，一種新的思想在我的腦海中又和上一次同樣地突然閃現出來，而且同樣是一種簡潔而確定的思想。這思想就是：不定三元二次型的算術變換與非歐幾何變換是等價的。

回到卡昂，我對此結果進行思考，並得到了一些結論。二次型的例子向我表明，存在新的富克斯群，即還存在著與那個不眠之夜所想到的富克斯函數不同的富克斯函數，以前找到的只是一類特殊情況，而接下來的事情應該是研究普遍的一般情況。

很自然地，我著手構建這些函數。我有系統性地研究他們並且得到一個接一個的結果。但還留有一個關係到全局的問題遲遲不能解決，而我的全部努力告訴我，這是一個很困難的問題。這些工作都是在我有意識地狀態下完成的。

後來我去了瓦勒里昂山服兵役，因此我忙著完全不相干的事情。有一天，我正沿街走著，曾經阻礙我的困難的答案突然呈現在我的面前。我當時並沒有立即深入去研究，直到服完兵役，我才重新拾起該問題。我已經有了所有的元素，只需排列它們和整理它們。就這樣，我一舉寫出了我的最後的論文，絲毫沒有感到什麼困難。我只限於舉這一個例子；多舉也無用。關於我的其他研究工作，我可以講出類似的情況。

起初，最為引人注目的是頓悟的顯現，所說的這種「頓悟」，乃是在此之前的一段長時間內無意識工作的明顯徵兆。在數學的發明中，這種無意識工作的重要性，在我看來是毋庸置疑的，並且在其他不那麼明顯的例子中，也可以找到無意識工作的痕跡。通常，當人們研究一個艱難的問題時，最初的嘗試不會帶來太好的結果。於是，休息一會兒或更長時間，然後重新坐下來工作。在起初半小時內，也許像以前一樣，沒什麼發現，然後一個決定性的想法冷不防地浮現在腦海。

關於無意識工作，還可以評論如下：它是可能的，而且成效很好，但有一個前提是，在此之前和之後都進行了長期有意識的工作。這些突如其來的靈感（之前的例子已經表明了），只有當之前大量的努力失敗，沒有好的結果發生，而且好像完全走錯路時，才會發生。這些努力並不像我們認為的毫無作用；它們啟動了無意識這台機器，否則這架機器永遠不會運轉起來，也不會有成果。

現在讓我們來回想一下現實的問題。無意識，或稱之為潛意識，在數學創造中佔有重要地位；這和我們之前所說是一致的。然而通常潛意識被認為是完全自發的。現在我們看到數學工作並不是簡單的機械運算，一架無論如何精密的儀器是不能勝任數學工作的。它也不僅僅是應用規則的問題，不是根據某些固定法則做出最可能的組合。這樣得到的組合可能數量巨大，但毫無用處、繁冗不堪。創造者的真實工作包括在這些組合中進行挑選以減少無用的，避免製造無用結論的麻煩，並且藉以挑選的法則必須極其精緻準確。幾乎不可能準確陳述這些法則；我們更多地是感覺而不是規定。在這些條件下，怎能想像機械地來應用這些法則呢？

現在我們可以得到第一個假設；潛意識並不比意識來得差；潛意識並不是純粹自動的；它是有辨別能力的；它很老練，很精巧；它知道如何挑選，如何推測。我還可以說，它甚至比意識本身還更善於推測，因為它不怕挫折，不怕困難，甚至可變失敗為成功。簡言之，潛意識不是要比意識本身來得更高級嗎？至少，你現在應該瞭解這個問題的重要性了。

但，是否我剛才舉的實例就能確定無誤地說明問題呢？我承認，在我的方面，我不喜歡這個結論。讓我們重新檢查這個例子，看看能不能得到其他解釋。

我們會有的第一印象是：在潛意識進行一段工作時間後，就會產生一種「頓悟」的想法，並且是相當有用且豐富的組合。這是由於潛意識產生的微妙直覺，判斷出哪些組合是有用的，就只採用了這些組合，而同樣也產生了很多其他組合，由於其無用性就停留在潛意識中嗎？

再從另一個角度來看，潛意識會自動將所有的組合產生，但只有最令人感興趣的組合能突破並來到意識的層面。這仍是非常神秘的一件事。是什麼原因，使得我們的潛意識活動所產生的千百種組合中，只有少數能跨過門檻來到意識層面，而大多數仍停留在意識層面之下呢？僅僅是因為機遇的原因，讓那少數組合得到這種特權嗎？顯然不是；例如在我們的感覺所受到的所有刺激中，除非是特殊原因，否則只有那些最強烈的刺激能夠吸引我們的注意力。更一般地講，那些有特權的潛意識活動，即那些可以跨過門檻成為意識層面的活動，都是直接或間接地能深刻影響我們情感認知的活動。

很奇怪的是：在數學上，情感會要求我們對一個數學問題作出嚴格的證明，而這初看起來似乎只是理智感興趣的事。況且，這樣做也似乎會使我們忘記數學之美，忘記數字的與形式的和諧，忘記幾何的雅致。但在實際上，這是一種真正的美感一每一位優秀的數學家都懂得，這種美感是隸屬於情感的。

那麼，這些所謂的數學美和優雅，是透過哪種特徵或載具，來引起我們美的情感的注意的呢？這些特徵或載具就是元素的和諧放置，可以讓思想無需費力就能感知整體和理解細節。這種和諧感也能符合我們頭腦的審美需求，並且幫助和引領頭腦。同時，隨著我們眼前出現一個美妙排序的整體，我們可以看到其中隱含的數學原理。這種特殊的審美就像是一個濾網，就像我說的那樣，提煉出我們所需要的東西；這也充分解釋了為什麼缺乏這種審美的人永遠不可能成為數學的創造者。

然而困難還沒有完全消失。意識是有其限制的，但對於潛意識，我們並不知道它是否有限制？也因為這樣，我們不願意假設潛意識在短期內能夠完成的組合，比有意識在長期內能夠進行的更多。但是，潛意識的限制一定是有的。當組合的數量遠超過我們的想像時，潛意識有辦法形成所有這些組合嗎？然而這是必須的，因為如果它只生成少數的組合，而且又是隨機生成的，那麼我們所能挑選的比較好的組合的機率就相對太小了。

有意識的工作總是在所有富有成果的無意識的勞動之前，也許我們應當在有意識的工作的初期尋求說明。請允許我做一個粗略的比喻。假設那些形成數學思想組合的基本元素有點像伊壁鳩魯的帶鉤狀的原子。在心智完全休眠時，這些帶鉤的原子是不動的，也可以說，它們鉤住了牆壁。因此，這種完全的休息可以無限地延續下去，沒有相遇的原子，從而在它們之間也沒有任何組合。

另一方面，在表面上休息卻是潛意識工作的階段（稱為醞釀期），某些觀念原子從牆上脫離開來並進入運動狀態。它們向空間（我偏好說房間）的各個方向漂移，就像一大群昆蟲一樣，或者用更學術的比喻，就像氣體運動理論中的氣體分子那樣。它們之間的互相影響可能形成新的組合。

剛開始，我們有意識的努力工作（稱為準備期）的用處是什麼呢？該工作推動了某些觀念原子，將它們從牆上釋放並進入運動狀態。我們雖然已用了千百種不同方式把這些觀念原子相互組合，卻依然未獲得令人滿意的結果，此時我們就認為我們做得不好。但是，在經過這樣的努力之後，這些觀念原子卻已被激發並運動起來了，他們再也不會回到原先的位置上去了，而是連續不斷地向四面八方自由飛舞。

現在，我們不是隨機的挑選它們；它們按照自己的意願行事。運動起來的觀念原子們肯定不再是普通原子了；它們是那些我們可以期待成為解的那些觀念原子。這些運動起來的原子產生衝擊，讓它們彼此之間產生組合，直到停止下來為止。這裡我請聽眾們原諒，因為我的比喻相當粗糙，但我不知道有什麼更好的比喻了。

無論如何，這最後可能的組合，至少包含了部分由我們的意志所釋放的原子。在這些原子加入後，產生了被我們稱之為「好」的組合。也許，這是一種使得原始假設不那麼荒謬的說法。

最後我還要做出一些說明：當我在上面發表某些個人的觀察材料時，我談到我不由自主地工作時的令人激動的夜晚。這樣的情況是經常發生的，不過大腦的反常活動不必要由我曾提到的物質刺激物引起。在這樣的案例中，人們在他自己的無意識的工作中呈現出的東西似乎可以部分地被過分激動的意識所領悟，可是這並不改變無意識的工作的本性。於是，我們不甚明確地理解了兩種機制一如果你願意的話，也可以說是兩種自我的工作方法。

而且，在我看來，我從中能夠作出的心理學觀察似乎在它們的總輪廓上確認了我提出的觀點。的確，這些觀點需要確認，因為不管怎樣，它們是而且依然是真正的假設：對這些問題的興趣如此之大，以致我不後悔向讀者提出了上述觀點。

國立臺灣師範大學數學系

106學年度大學申請入學指定項目甄試試題

筆試一、計算證明題（考試時間：2小時）

1. 坐標平面上，$\triangle OAB$ 為直角三角形，其中 O 為原點，$\angle A$ 為直角，且 $\overline{AB}=2\overline{OA}$。已知 $A(3,4)$，且 B 的 y 坐標為正數。

   (1)試求向量 $\overrightarrow{AB}$。

   (2)若拋物線 $y=ax^2+1$ 上有兩相異點關於直線 OB 對稱，試求 a 的範圍。

2. 設 n 為正整數，令 $p(n)$, $q(n)$ 分別表示 n 的各位數字的和與乘積。例如：

   $p(9527)=9+5+2+7=23$, $q(9527)=9\times5\times2\times7=630$。

   (1)已知 $p(n)=4n-42$，試求 n 的所有可能的值。

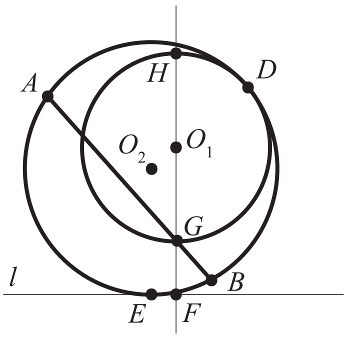
   (2)已知 $q(n)=n^2-9n-49$，試求 n 的所有可能的值。

3. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 各項皆為正數，$a_1=1$，且 $n\ge2$ 時滿足

   $$a_{n-1}-a_n=a_na_{n-1}(a_n+a_{n-1})\text{，}$$

   試求 a_n 的一般項公式。

4. 如圖，已知圓 O_2 與圓 O_1 內切於點 D，且直線 l 與 O_2 切於點 E。過 O_1 作 l 的垂線，交 l 於 F，且交 O_1 於點 H, G。過 G 任作 O_2 的一弦 AB（此弦不在直線 GH 上）。



   (1)證明 E, G, D 三點共線。

   (2)試證 A, F, B, H 四點共圓。

5. 設複數 z_1, z_2, z_3 為實係數多項式 $P(z)=z^3+qz+r$ 的三個根，且滿足

   $$|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2=100\text{。}$$

   已知在複數平面上，z_1, z_2, z_3 所對應的三個點恰為一直角三角形的三頂點，試求此直角三角形的斜邊長。

筆試二、填充題（考試時間：1.5小時）

1. 設 $L_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$ 與 $L_2:\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-1}{1}$ 為坐標空間中兩歪斜線，則 L_1 與 L_2 公垂線的比例式為________。
2. 設 $A(2,5)$，$B(5,9)$ 為坐標平面上兩定點，且 P 點為直線 $L:y=3x$ 上的動點，則 $\triangle ABP$ 周長之最小值為________。
3. 設 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 之角平分線交 $\overline{AC}$ 於 P 點。若 $\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=8$，$\cos(\angle B)=\dfrac{-4}{5}$，則 $\overline{BP}$ 之長為________。
4. 已知 $g(x)=x^4-(a+3)x^3+(3a+7)x^2-(7a+5)x+5a$ 為實係數多項式，若 $g(1+2i)=0$，則方程式 $g(x)=0$ 的解為________。
5. 已知 x,y,z 為一公比為負數之等比數列，且 $x+y+z=5$，則 xyz 的最小值為________。
6. 設 k 為實數，坐標平面上，已知方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的圖形與 $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=k^2$ 的圖形有四個交點，則 k 的範圍為________。
7. 設 p 是 $x+\log x=2017$ 的解，q 是 $x+10^x=2017$ 的解，則 $p+q$ 之值為________。
8. 同時投擲兩顆均勻的骰子，觀察出現的點數和是否大於或等於 5。若是，則視為成功（$X=1$），若否，則視為失敗（$X=0$），則 X 的變異數為________。
9. 給一個 5×5 的矩陣 $A=\begin{bmatrix}\frac{6}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{6}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{6}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{6}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{6}{5}\end{bmatrix}$，且 k 為任意正整數，則 A^k 為________。
10. 袋中有十個銅板，出現正面的機率分別為 $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{5}$。今隨機選取一銅板來投擲，已知出現正面，則該銅板出現正面機率為 $\frac{1}{4}$ 的機率為__________。

解析

筆試一、計算證明題

1. (1)因為 $\overline{OA}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\overrightarrow{OA}=(3,4)$ 且 $\angle OAB=90^\circ$，所以 $\overrightarrow{AB}=\pm2(4,-3)$，解得

$$B=(-5,10)\text{ 或 }B=(11,-2)\text{（不合），故 }\overrightarrow{AB}=(-8,6)\text{。}$$

(2)設拋物線上 P, Q 兩點是以 $\overrightarrow{OB}$ 為對稱軸。因為 $\overrightarrow{OB}=(-5,10)=5(-1,2)$ ，所以可令直線

$\overleftrightarrow{PQ}$ 的方程式為 $y=\frac{1}{2}x+b$ 。解方程組

$$\begin{cases} y=ax^2+1 \\ y=\frac{1}{2}x+b \end{cases} \Rightarrow ax^2-\frac{1}{2}x+(1-b)=0 \text{ ，}$$

即 $\overline{PQ}$ 的中點 M 之 x 坐標為 $\frac{1}{4a}$ ，又因為 M 在 $\overline{OB}$ 上，所以 M 之 y 坐標為 $-\frac{1}{2a}$ 。

因為 M 在 $\overline{PQ}$ 上，所以 $-\frac{1}{2a}=\frac{1}{8a}+b$ ，即 $b=-\frac{5}{8a}$ 。將 $b=-\frac{5}{8a}$ 代入二次方程式

$ax^2-\frac{1}{2}x+(1-b)=0$ ，得 $ax^2-\frac{1}{2}x+(1+\frac{5}{8a})=0$ 。

因為此方程式有兩相異實根，所以判別式 $\Delta=(-\frac{1}{2})^2-4a(1+\frac{5}{8a})>0$ ，

即 $a<\frac{-9}{16}$ 。

2. (1)當 x 是一位正整數時，因為 $p(x)=4x-42=x$ ，即 $3x-42=0$ ，得 $x=14$ （不合）。
當 x 是二位以上的正整數（ $x\geq 10$ ）時，令 $x=a_na_{n-1}\cdots a_1$ （其中 $a_n\neq 0$ ），得

$p(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\leq\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i=x$ ，即 $4x-42\leq x$ ，因此 $x\leq 14$ 。

檢驗 $x=10,11,12,13,14$ 五種情況如下：

$x=10$, $p(x)=1$, $4x-42=-2\neq p(x)$ ；

$x=11$, $p(x)=2$, $4x-42=2=p(x)$ ；

$x=12$, $p(x)=3$, $4x-42=6\neq p(x)$ ；

$x=13$, $p(x)=4$, $4x-42=10\neq p(x)$ ；

$x=14$, $p(x)=5$, $4x-42=14\neq p(x)$ 。

由上面討論，知道只有一個解 $x=11$ 。

(2)當 x 是一位正整數時，因為 $q(x)=x^2-9x-49=x$ ，即 $x^2-10x-49=0$ ，此時無整數解。當 x 是二位以上的正整數（ $x\geq 10$ ）時，令 $x=a_na_{n-1}\cdots a_1$ （其中 $a_n\neq 0$ ），得

$$q(x)=a_n\times a_{n-1}\times\cdots\times a_1\leq a_n\times 9^{n-1}\leq a_n\times 10^{n-1}\leq x \text{ ，}$$

即 $x^2-9x-49\leq x$ ，得到 $x^2-10x-49\leq 0$ ，因此 $0<x\leq 5+\sqrt{74}<14$ 。

只需檢驗 $x=10,11,12,13$ 這四種情況即可，檢驗如下：

$x=10$, $q(x)=0$, $x^2-9x-49=-39\neq q(x)$ ；

$x=11$, $q(x)=1$, $x^2-9x-49=-27\neq q(x)$ ；

$x=12$, $q(x)=2$, $x^2-9x-49=-13\neq q(x)$ ；

$x=13$, $q(x)=3$, $x^2-9x-49=3=q(x)$ 。

由上面討論，只有一個解 $x=13$ 。

3. 將$a_1=1$代入遞迴關係式，得$a_2=\sqrt{2}-\sqrt{1}$， $a_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ，猜測

$$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\ 。$$

現在利用數學歸納法證明這個猜測：

(1)當$n=1$時， $a_1=1=\sqrt{1}-\sqrt{1-1}$ ，等號成立。

(2)設$n=k$時，等號成立，即$a_k=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ 。

當$n=k+1$時，由$a_k=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$及$a_k-a_{k+1}=a_{k+1}a_k(a_{k+1}+a_k)$得

$$a_ka_{k+1}^2+\left(a_k^2+1\right)a_{k+1}-a_k=0\Rightarrow a_{k+1}^2+\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)a_{k+1}-1=0$$

$$\Rightarrow a_{k+1}^2+2\sqrt{k}a_{k+1}-1=0$$

$$\Rightarrow a_{k+1}=\frac{-2\sqrt{k}\pm\sqrt{4k+4}}{2}=\pm\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\ 。$$

因為a_{k+1}是正數，所以$a_{k+1}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ ，故得證。

4. (1)因為O_1， O_2, D 三點共線，且$\overline{O_2E}$和$\overline{O_1F}$平行，所以$\angle EO_2D=\angle GO_1D$ 。再利用$\overline{O_2E}=\overline{O_2D}$和$\overline{O_1G}=\overline{O_1D}$ ，可推得

$$\triangle EO_2D\sim\triangle GO_1D\ ，$$

即D，G，E三點共線。

(2)因為$\overline{HG}$為圓O_1的直徑，所以$\angle HDE=\angle HDG=90^\circ$ ，又因為$\angle HFE=90^\circ$，所以E, F, D, H四點共圓。由圓冪定理可得$\overline{HG}\times\overline{FG}=\overline{EG}\times\overline{DG}=\overline{AG}\times\overline{BG}$ ，即A, F, B, H四點共圓。

5. 設$z_1=a$， $z_2=b$， $z_3=c$ ，且a, b, c三根在複數平面所對應的三點為A, B, C，並令$\angle ABC$為直角。取點 D 為$\overline{AC}$的中點，對應的複數為$\dfrac{a+c}{2}$ 。由於$P(z)$中z^2項的係數為 0，所以$a+b+c=0$ ，或$b=-(a+c)$ 。因為點 D 為$\triangle ABC$ 外接圓的圓心，所以$\overline{DB}=\overline{DC}$ ，因而$|b-d|=\dfrac{1}{2}|a-c|$。由此可知

$$\left|-(a+c)-\frac{a+c}{2}\right|=\frac{|a-c|}{2}\ ，$$

即$|a-c|=3|a+c|$。因為$|a|^2+|c|^2=\dfrac{|a-c|^2}{2}+\dfrac{|a+c|^2}{2}$ ，所以

$$100=\frac{|a-c|^2}{2}+|a+c|^2+\frac{|a+c|^2}{2}=6|a+c|^2\ 。$$

故， $h^2=|a-c|^2=9|a+c|^2=\dfrac{9\cdot100}{6}=150$ ，即直角三角形斜邊長$h=\sqrt{150}$ 。

筆試二、填充題

1. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{2}$或$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{2}$，

   設公垂線與L_1, L_2的交點分別為P, Q兩點，可令

   $$P=(-1+t,4+2t,-2-2t),\quad Q=(3-3s,-1+4s,s+1)\text{ 。}$$

   此時，

   $$\overrightarrow{PQ}=(-3s-t+4,4s-2t-5,s+2t+3)\text{，}$$

   因為$\overline{PQ}$為公垂線段，所以$\overline{PQ}\perp L_1$且$\overline{PQ}\perp L_2$，

   又因為$\overrightarrow{v_1}=(1,2,-2)$和$\overrightarrow{v_2}=(-3,4,1)$分別為$L_1$與$L_2$的方向向量，所以$\overrightarrow{PQ}//\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$，而

   $$\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\left(\begin{vmatrix}2&-2\\4&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\1&-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\-3&4\end{vmatrix}\right)=(10,5,10)\text{，}$$

   可得

   $$\frac{-3s-t+4}{10}=\frac{4s-2t-5}{5}=\frac{s+2t+3}{10}\text{，}$$

   即

   $$\begin{cases}5(-3s-t+4)=10(4s-2t-5)\\10(5s-2t-5)=5(s+2t+3)\end{cases}\Rightarrow s=1,t=-1\text{ 。}$$

   因此

   $$P=(-2,2,0),\quad Q=(0,3,2),\quad \overrightarrow{PQ}=(2,1,2)\text{，}$$

   故L_1與L_2公垂線的比例式為

   $$\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}\text{或}\frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{2}\text{ 。}$$

2. A點對直線L之對稱點A'坐標為$(\dfrac{7}{5},\dfrac{26}{5})$。

   $\triangle ABP$之最小周長$=\overline{AB}$長度$+\overline{A'B}$長度$=5+\sqrt{(\dfrac{18}{5})^2+(\dfrac{19}{5})^2}=5+\dfrac{\sqrt{685}}{5}$。

3. 因為$\cos(\angle B)=\dfrac{-4}{5}$，所以$\sin\angle B=\dfrac{3}{5},\ \cos\dfrac{\angle B}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \sin\dfrac{\angle B}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$。

   利用面積公式，得

   $$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times8\sin\angle B=\frac{1}{2}\times6\times\overline{BP}\sin\frac{\angle B}{2}+\frac{1}{2}\times8\times\overline{BP}\sin\frac{\angle B}{2}\text{，}$$

即

$$6\times 8\times \frac{3}{5}=6\times \overline{BP}\times \frac{3}{\sqrt{10}}+8\times \overline{BP}\times \frac{3}{\sqrt{10}}\ ，$$

解得

$$\overline{BP}=\frac{24\sqrt{10}}{35}\ 。$$

4. 利用比較係數法，及實係數虛根成對出現，可得$1+2i, 1-2i, a, 1$ 。

5. 可設首項為 a，而公比為$-r$（ $r\geq 1$ ），此時

$$x+y+z=5\Rightarrow a-ar+ar^2=5\Rightarrow a\left(1-r+r^2\right)=5\Rightarrow a>0\ 。$$

由 $a-ar+ar^2=5$ 得 $a+ar^2=5+ar$ ，再利用算幾不等式，得

$$ar=\sqrt{a\times ar^2}\leq \frac{a+ar^2}{2}=\frac{5+ar}{2}\Rightarrow ar\leq 5\ 。$$

故

$$xyz=a(-ar)(ar^2)=-(ar)^3\geq -125\ 。$$

6. 橢圓 $(\frac{x}{3})^2+(\frac{y}{2})^2=1$ 與 x 軸的交點為 $(\pm 3, 0)$ ，

而雙曲線 $(\frac{x+1}{4k})^2-(\frac{y}{3k})^2=1$ 與 x 軸的交點為 $(\pm 4|k|-1, 0)$ 。

因此，當

$$-4|k|-1>-3$$

時，雙曲線與橢圓會有四個交點，即當 $|k|<\frac{1}{2}$ 時，雙曲線與橢圓會有四個交點。

7. 因為 p 是 $x+\log x=2017$ 的解，所以

$$p+\log p=2017\Rightarrow 10^{\log p}+\log p=2017$$
$$\Rightarrow \log p+10^{\log p}=2017\ ，$$

從最後的式子及 q 是 $x+10^x=2017$ 的解知道 $q=\log p$ ，代入 $p+\log p=2017$ 得

$$p+q=2017\ 。$$

8. 因為 $X=1$ 的機率為 $\frac{5}{6}$ ，而 $X=0$ 的機率為 $\frac{1}{6}$ ，所以 X 的變異數為

$$\frac{1}{6}\times \frac{5}{6}=\frac{5}{36}\ 。$$

9. 若令 $e=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\top$，則 $A=I_5+\frac{1}{5}ee^\top$，由下列計算可得

$$A^k=I_5+\frac{2^k-1}{5}ee^\top \text{。}$$

$A^2=(I_5+\frac{1}{5}ee^\top)(I_5+\frac{1}{5}ee^\top)=I_5+\frac{3}{5}ee^\top$；

$A^3=(I_5+\frac{3}{5}ee^\top)(I_5+\frac{1}{5}ee^\top)=I_5+\frac{7}{5}ee^\top$；

$A^4=(I_5+\frac{7}{5}ee^\top)(I_5+\frac{1}{5}ee^\top)=I_5+\frac{15}{5}ee^\top$；

$A^5=(I_5+\frac{15}{5}ee^\top)(I_5+\frac{1}{5}ee^\top)=I_5+\frac{31}{5}ee^\top$。

10. $\dfrac{3\times\frac{1}{4}}{2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{21}$。

民國五十至八十年代（1961~2000年）數學課程改革之探究

陳玟樺／新北市立清水高中

一、摘要》

民國五十年至八十年代（1961～2000年）間，隨時代變遷和教育哲學改變，數學課程標準經多次修訂，約有四波較大幅度的數學課程變革。回顧該時期數學課程的改革，反映當時時勢條件的限制和數學學習的特性，或受現實環境限制，或為回應國家社會需要等，集中地體現了數學教育時代特徵。檢視數學課程改革的歷史，不僅有助於理解數學課程發展的脈絡，亦有助於從中反思可資借鏡之處，做為未來數學教育籌劃之殷鑑。

關鍵詞：課程標準、數學課程

二、前言》

政府遷臺後，因應時代變遷、政經環境轉變，及國家需要等眾多項因素交織，各級學校經歷多次課程改革。在高中課程標準方面，經民國 41 年（1952）局部修正之中學課程標準 [1]、44 年（1955）修訂之中學教學科目及時數表 [2]、51 年（1962）修訂之中學課程標準、53 年（1964）訂頒之高級中學數學及自然學科教材大綱、60 年（1971）修訂之高級中學數學課程標準、72 年（1983）修訂之高級中學課程標準、84 年（1995）修訂之高級中學課程標準等；在國中課程標準方面，經民國 41 年（1952）局部修正之中學課程標準 [3]、44 年（1955）修訂之中學教學科目及時數表 [4]、51 年（1962）修訂之中學課程標準、57 年（1968）訂頒之國民中學暫行課程標準、61 年（1972）修訂之國民中學課程標準、72 年（1983）修訂之國民中學課程標準、74 年（1985）修訂之國民中學課程標準、83 年（1994）修訂之國民中學課程標準等；至於在國小課程標準方面，經民國 41 年（1952）國民學校國語和社會二科修訂標準 [5]、51 年（1962）修訂之國民學校課程標準、57 年（1968）訂頒之國民小學暫行課程標準、64 年（1975）修訂之國民小學課程標準、82 年（1993）修訂之國民小學課程標準等。

前述各級學校歷次修訂（含訂頒）課程標準中，除了民國 41 年和 44 年課程標準限於某些特定學科之修訂外，高中數學課程標準一共經歷五次修訂（含訂頒）（分別於民國 51 年、53 年、60 年、72 年、84 年），國中數學課程一共經歷六次修訂（含訂頒）（分別在民國 51 年、57 年、61 年、72 年、74 年、83 年），國小數學課程一共經歷四次修訂（含訂頒）（分別在民國 51 年、57 年、64 年、82 年），其修訂或訂頒 [6] 時間集中體現於民國五十年代至八十年代（1961～2000）間。課程改革之發生與所在時代背景脈絡常有聯繫，茲將民國五十年代至八十年代（1961～2000）間數學課程改革之時代背景脈絡整理如圖 1 所示。

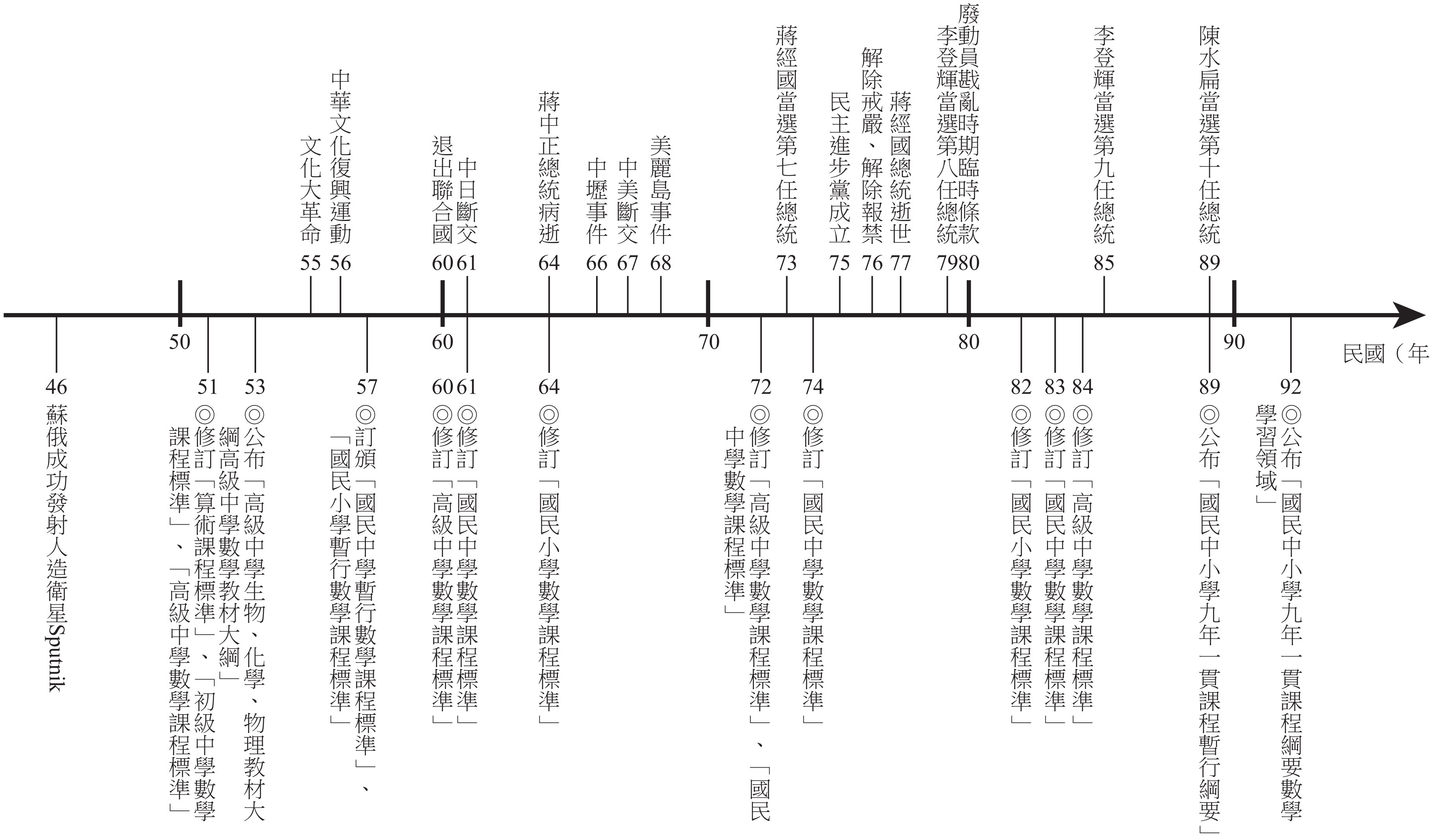


圖1 民國五十至八十年代（1961～2000）間數學課程標準（綱要）修訂之時代背景脈絡
資料來源：本研究整理自國史館（1990）、教育部（2012、2016）

由圖 1 知，民國 89 年以前，我國國民教育階段的數學課程是依「課程標準」規定實施，並經數度修訂，且最後一次數學課程標準修訂在於民國 84 年「高級中學數學課程標準」。政府遷臺後的數學課程改革，集中體現於民國五十年至八十年代（1961～2000）間，且該時期也是「課程標準」轉變為「課程綱要」重要時期，具體實踐了課程鬆綁教改主張，成功過渡至民間教科書編輯，以及學校實施課程時具有較高自主性（教育部，2000），其數學課程改革歷史探索甚具價值與重要性，值得我數學教育工作者一同回顧與反思。林碧珍（2010）指出，臺灣數學課程發展與演變至今已超過五十餘年，數學課程演變史雖為臺灣數學教育歷史上重要紀事，卻甚缺乏回顧性論文。基於上述，本研究目的在探究該時期數學課程改革歷史，由於可探面向廣泛，為能有所聚焦、深入，本研究先著重民國五十年至八十年代（1961～2000）間「課程標準時期」歷次數學課程嬗變之探討，針對「課程標準時期」轉向至「課程綱要時期」的數學課程改變，僅做背景脈絡鋪陳，暫不涉深於兩種不同學校教育活動實施準繩下之實質內容轉變層面，以期能有一較為深入、完整探討。

本研究參考該時期歷次修訂之數學課程標準、相關文獻和文件，配合時代背景，對該時期數學課程改革發生促動之關鍵事件或背景、改革中各級學校數學課程標準修訂之展演脈絡等進行探究。回顧我國數學課程之演變，從清末民初著重的實用教育、抗戰與遷臺後以富國強兵為目的，至邁入二十一世紀以培養「二十一世紀的健全國民」為最高理想目標（教育部，1994），無論九年一貫課程所強調的十大基本能力，或十二年國民基本教育強調「培養能自主行動、溝通互動、社會參與的終身學習者」的九大核心素養（教育部，2014），不同時代背景下的數學課程改革，反映有不同關注的焦點。本研究採課程的歷史探究，參考該相關歷史背景脈絡、歷次修訂之各級學校數學課程標準、相關研究文獻（包含口述歷史等）等，透過文獻分析、文件分析等方法，探究重點在於瞭解該時期：我國數學課程改革之背景脈絡、促使數學課程改革發生的關鍵事件或原因、數學課程改革的重點，以及數學課程改革中各學習階段課程標準修訂之展演脈絡等。

呂溪木（2007）指出，民國五十年以來，我國數學課程主要有三次主要改革[7]：第一次改革從民國 53 年起至 57 年，第二次改革從民國 60 年至 61 年，以及第三次改革從民國 64 年至 72 年。由於本研究所設定之探究時期範疇與呂溪木（2007）有相當重疊，故除援此「分段」作為本研究重要參酌外，再根據時代背景和相關文獻和文件等，另增第四次數學課程改革「政治民主轉型下的數學課程統整」於第三次數學課程改革階段後。惟本文基於研究旨趣，更傾向於將民國五十年至八十年代間的數學課程改革視為一連續時間軸，故本文雖仍分為數個「時間線段」書寫該時期數學課程改革的歷史，但其目的僅為突顯歷次數學課程改革之發生有其不同背景脈絡促成及其改革重點等，階段間或有時間上的交互重疊，非嚴謹劃分。

三、第一次數學課程改革—國際潮流下對「新數學」的順應》

民國 46 年（1957）十月，蘇俄搶先成功地發射一顆人造衛星 Sputnik，向為近代美國教育主流地位的「進步主義」被抨擊已無法適應於激烈的科學競爭需求，取而代之是以科學中心的本質主義（Essentialism）教育（柯啟瑤，1977）。是時，美國為迎頭趕上「落敗於俄」的科學競賽表現，政府提供了龐大經費來改進學校課程，1958 年成立數學課程改革小組（School Mathematics Study Group，簡稱 S.M.S.G.），旨在研究數學課程的改革計畫，後更發展出一套

數學教材作為編寫數學教科書的藍本，並將 S.M.S.G.教材納入各學習階段中。美國「新數學」運動開展不久，許多國家為避免落後，紛紛起而效仿，如：1958 年法國邀請歐洲共同體各國代表對新的中小學數學教學大綱進行討論、1961 年英國劍橋大學學者和教師在南安普敦成立「學校數學設計組」，著手編寫構思新穎、與舊數學教材風格迥異的 SMP 課本等（謝明初，2010）。

為順應此波潮流，民國 49 年九月，我國修訂初高中各科課程標準時提出「提高學生科學程度」為下一次修訂工作主要目標（1971）。民國 51 年，國小、國中和高中進行「算術課程標準」、「初級中學數學課程標準」，以及「高級中學數學課程標準」修訂時，因美國「新數學」課程尚在實驗階段，故未能及時採納，然同年教育部則先成立「高級中學數學科及自然科學科教材研究編輯委員會」，並邀請當時的清華大學校長陳可忠擔任主任委員，下設數學、物理、化學、生物四科小組[8]。數學組方面，邀請成員針對最新出版之數學 S.M.S.G.教材進行研究，並依我國教學需求予以採擇、規劃納入教材（教育部，1964）。民國 53 年，教育部正式公布「高級中學生物、化學、物理教材編輯大綱高級中學數學教材大綱」，內文中提及了新教材的特色（教育部，1964）：

> 新教材並非以提示學生一些學習材料為滿足，其目標乃在誘導學生學習，啟發學生思考，使學生在觀察自然現象中，發現科學問題，並使自己能從事各種實驗，證明或解答其所發現之問題。因此，學生在學習時，正如一位科學家在實驗室中研究一項問題，亦如一位發明家在發現一個新定律，創造一個新原則…（頁 75）

教材大綱內文中另也特別註明「各年級教科書編輯應以 S.M.S.G.教材為主要參考資料並須採取其編輯精神」（教育部，1964），並規定於 54 學年度正式實施。民國 57 年，教育部先後訂頒「國民中學數學暫行課程標準」和「國民小學數學暫行課程標準」，正式將國民教育延長為九年，初中改制為「國民中學」，受文化大革命等背景因素，同時強調以民族精神教育和生活教育為中心（教育部，1983）。此時，國中數學改將算術、代數、平面幾何合併為「數學」一科，於「實施方法」下也明確規範編輯數學教材應「參酌國外一九六○年之後所出版之權威著作如 S.M.S.G.等」（教育部，1968）。是時，以「集合」為基礎發展數學概念的 S.M.S.G.教材首開先例地列入中、小學數學課程中（教育部，1968）。然而，由於此次國中、小課程標準籌備時間較為倉促（自 56 年七月至 57 年七月，約一年時間），各科標準擬定尚於草創時期，故民國 57 年訂頒課程標準稱「國民中（小）學暫行課程標準」。

整體來說，本次數學課程改革自高中端開始，後逐漸延展至國中、小階段。該教材以「集合論」為基礎發展數學概念，關注嚴密的邏輯抽象推理、注重公設系統與邏輯推理的形式，且對名詞的界定與符號的使用甚為嚴謹（李恭晴，1989；呂溪木，2007）。即使當時「學生、教師或家長都確實在下功夫學習」、「造成了一片熱烈的學習氣氛」（呂溪木，2007），但其「把數學抽象化，這樣的新教材使學生仿照唸國文或英文的方式來唸數學，課本習題較缺乏深入的思考性計算題，取得代之的是一些概念題，學生喪失計算能力，以致聯考中很多人數學成績掛零」（佘文卿，1999），在實施當下也引起了不少爭議與討論。

四、第二次數學課程改革—對「新數學」的反動》

民國五十年代至六十年代，許多留學生學成歸國，包括回臺客座講學教授在內，其基於地利之便，其對美國 S.M.S.G.教材內容及在當地實施的情形較有了解，民國 59 年九月，旅美數學家項武義先生[9]即公開反對國內直接移植美國 S.M.S.G.數學課程的作法。他在 2008 年接受「數學傳播」專訪時提及這段記憶（劉太平和張海潮，2008）：

> 記得當年回來有兩件事。一件事是在臺大講課，另一個是碰到當時正把 S.M.S.G.美國的那一套東西搬到臺灣來，他們說這是美國一套偉大的教育革命，臺灣現在正在現代化，一定要趕上…我當時公開演講反對這件事情…（頁 4～5）
>
> 說實話，S.M.S.G.實在是一塌糊塗。我舉一些還記得的例子…寫出一個行列式的乘法公式，公式下面是，讀者試自展開，驗證之…這怎麼可能用展開集項來證明？沒有一個數學家可以做那種事…其實，在私下主事者也頗有悔意…所以我等於是臨危受命，整個臺灣實在搞得亂七八糟，不得不披掛上陣來做這件事情…（頁 5～6）

事實上，在項武義先生之前，民國 51 年三月，於德國取得博士學位後、回臺任教於臺灣師範大學數學系的徐道寧女士[10]，其在 2009 年接受清華大學數學系五十週年專訪時也提及了當時國內發展新數學課程的「艱苦的回憶」（陳華和吳孟青，2014）：

> 這個也是非常艱苦的回憶…，談到翻譯，其實不是容易的事情，常常一句簡單的句子，換一種語言換一種文化，就沒辦法了解…當時安排的第一、二冊，由羅芳樺負責…第三、四冊由康洪元先生編，五、六冊就由我編，但是康先生編了沒多久，有個機會出國進修。這樣一來所有重擔就落在我頭上，而第一、二冊用了之後，出現的問題要修改和回答問題時，也都落在我的頭上…後來幾乎全部四冊都是我一個人經手…（頁 8～10）

事實上，當時不僅國內對「新數學」運動開始出現反動聲浪，S.M.S.G.教材於美國實施時也非一帆風順。1973 年，Morros Kline 出版一本名為《為何強尼不識數》（Why Jonny Can't Add－The failure of the New Math）為題的著作，即針對美國實施新數學之後所引發的一系列弊端大書特書，書中指陳在新數學盛行之際，所謂好學生只學會如何在語言中挑語病，但沒學會應用數學中把實際問題數學化，再用數學解決問題的方法；亦未學會純數學中臆測、證明、推廣與再臆測的循環研究程序，至於對判斷數學問題重要性的洞察力亦相當有限，新數學將集合論中最粗淺的部分誇大，使其凌駕在整個中小學數學之上，因而喪失學習初等數學中重要課題的機會（王九逵，2000）。由於學者提出數學課程改革呼籲，加上「中學教師開始怨聲載道，教育部也不能完全不顧這件事情，教育部也有要把它改一改的意願」（劉太平和張海潮，2008），多數以為國內中小學數學課程採用 S.M.S.G.教材的弊多於利，應加以改革（呂溪木，2007），故民國 60 年二月，高中數學課程標準先進行修訂，重點在於減輕教材中「集合論」份量；緊接再修訂國中數學課程標準，除也將「集合論」內容做出縮減外，標準中也未再提及 S.M.S.G.一詞；至於國小方面，則逐年修改教材（呂溪木，2007）。此外，在這一波數學課程改革中，教科書出版也產生了變動。徐道寧女士提及當時數學教科書的出版狀況（陳華和吳孟青，2014）：

> 數理或是生物、美勞家政等等就不一定要用統一的課本，也不一定由國立編譯館編寫。數理教科書的規定就是由書局找人編寫，送審編譯館通過，書局再出版，學校自由採

購…東華書局本來是為了出版我們的數學教科書成立的，後來既然要編數學，也就順便連其他科目的教科書一起編了…（頁 9）

原本由「東華本」獨撐數學教科書市場之大樑，但在這一波數學課程改革中，項武義先生提議教育部重新編寫一套新的課本稿件來取代「新數學」課程，並建議新課本在進行實驗教學後，再推廣至全國實施（劉太平和張海潮，2008）。教育部接受其議，後也成立一實驗教材編寫組，開始進行實驗教材的編寫工作，至此打破了「東華本」長年壟斷市場的局面。此時，市面上流通的數學教科書共有三種教本，分別為：實驗本、東華本，以及數理本，關於其編寫者及其教材定位，有學者以為（余文卿，1999）：

實驗本前兩冊由項教授執筆，第三冊以後由黃武雄教授接手，走的是高程度路線，非常精簡，但高深莫測。如利用收斂的有理數列定出無理數，進而導出實數的一些運算性質。理論上完美無缺，但有多少學生能真正體會？東華本由徐道寧教授率領一群清華大學數學教授執筆，仍擺脫不了之前東華本的抽象陰影，但已有實質改善，而數理本由師大教授執筆，適合中下程度的學生，較著重於例題的演練與計算…（頁 52）

然而，即使這一波數學課程改革中的教科書具「多版本」特色、教科書中「集合論」內容也已退居於輔助敘述數學問題之地位，但仍有僅適用於資優班學生研讀、曲高和寡等之慮（王九逵，2000），仍不脫美國教材的範疇（魏明通，2007）。不過，值得一提是，由黃武雄先生接手的實驗本教材研發，後來也首開先例地在學校進行課程實驗教學，選定的學校為彰化中學的高一和高二各一班級進行[11]試教，他以為「只有直接參與實際的教學，才能評鑑出教材本身的難、易、優、劣，了解老師們的苦情、同學們的吸收。不致讓實驗教材徒具”實驗”的虛名」，此舉堪稱數學教育史上的新猷（陸思明，1976）。至於課程實驗暫告一段落後，黃武雄先生也提出其感受（陸思明，1976）：

面對面的交談，至少拉近了教材的編者與老師的距離，消除了心理上的障礙。而許多實際教學上的細部困難也因之解決或減輕…促進了觀念的交流，經驗的交流，使大家的關係變得親切，也彼此獲得了支援，合作與鼓勵…任何一件大事，都是要靠集體的努力方能完成…（頁 39）

然而，就在這一波課程標準修訂當下，我國卻遭逢退出聯合國與中日斷交之險惡處境（見圖 1），外交上正面臨著嚴峻考驗。

五、第三次數學課程改革—外交失利下的數學課程實驗研究》

民國六十年代（1971～1980），我國經歷退出聯合國、中日斷交後，又面臨蔣中正總統逝世、中壢事件，以及中美斷交等事件，外交地位漸失，國內政治環境亦動盪不安。然此，國內一系列經濟建設計畫則甚有進展，工業加速現代化，在擴展輸出、穩定物價、擴建基本設施，以及改善產業結構等方面，均有相當成果（國家發展委員會，2015），至民國 73 年止，我對外貿易已躍居全世界第 15 位（國史館，1990）。在科學教育方面，政府以為厚植科學之根基應從中小學科學教育著手，訂定科學發展長期計劃，投資大量資金，由國科會策劃推動，教育部也決定透過實驗研究方式，有計畫地從事中、小學數學與科學課程之改革（呂溪木，2007）。

正當國內反動於「新數學」課程時，另一攸關中、小學數學課程改革計畫也同步開展，即教育部在實施九年國民教育時，即規劃有通盤研究和準備再修訂計畫。由於當時國內著重工業與產業的發展，極需科學與數學人才（陳美如、彭煥勝，2016），加上 1970 年起，世界各國相繼成立「教育研究組織及機構」從事課程研究工作（陳梅生，1986），民國 60 年，教育部在一次聽取美日科學教育考察團報告時，隨團成員包括十一位小學教師[12]向教育部提出多項建議，包括：對科學師資進修之建議、對課程研究、改進教學之建議、對充實設備及教具之建議，以及對利用博物館、科學館之建議等（陳梅生，1989），其中「常設或指定一研究機構（如科學教育中心）聘請科學教育專家及小學任課教師共同組成小組」之建議，更得與會長官支持。

民國 61 年秋，在時任教育部長朱匯森的支持下，經國教司童科長恒誠（亦是前述教師美日考察團的團長）於行政方面多方溝通，指定板橋教師研習會開始科學課程實驗研究計畫，並聘專家學者，以及任職於小學之校長和教師一共十八人組成研究小組（陳梅生，1989），即後來所稱的「板橋模式」[13]。民國 63 年秋，仿相同運作模式，又再成立國民小學數學課程實驗研究計畫，共聘十七人組成研究小組[14]（陳梅生，1989），教育部將此實驗研究目標訂為「培養學生科學概念、科學方法及科學態度」（教育部，1985）。研究初期，先針對國小「數學」和「自然科學」兩科進行，並委託於臺灣省國民學校教師研習會[15]辦理；民國 63 年三月，教育部指定國立臺灣師範大學成立科學教育中心[16]，展開國民中學「數學」和「自然科學」課程研究，同時也為高級中學科學課程研究進行準備（魏明通，2007）；同年七月，委託臺師大科學教育中心辦理國中「數學」和「自然科學」課程實驗研究工作；民國 66 年六月，教育部中等教育司亦委託臺師大科學教育中心進行高級中學科學課程研究計畫，藉研究實驗過程，編製符合國家教育宗旨及適合社會需要之高級中學「數學」和「自然科學」課程為計畫目標（魏明通，2007）。茲將此波國中、小，及高中「數學」課程實驗研究相關規劃與進程整理如表 1（教育部，1985；趙金祁，1985；李恭晴，1989；陳冒海，1989；呂溪木，2007；魏明通，2007）：

表 1

民國六十至七十年代中期國民小學、國民中學、高級中學之數學課程實驗研究進程一覽表

<table>
<tr><th>學校階段</th><th>委託時間</th><th>委託單位</th><th colspan="2">任務進程規劃</th></tr>
<tr><td>國小數學</td><td>61.7</td><td>臺灣省國民學校教師研習會</td><td>63.7
64.8
65.9
66.9</td><td>◎開始進行研究
◎修訂公布「國民小學數學課程標準」
◎指定 48 所國小分六年逐年進行教學實驗
◎分六年逐年試用與修訂</td></tr>
<tr><td>國中數學</td><td>63.7</td><td>臺師大科學教育中心</td><td>65.7
66
67.9
70.6
72
73</td><td>◎開始進行研究
◎擬定國中數學實驗教材綱要草案
◎指定 10 所國中進行教學實驗
◎第一階段實驗結束
◎修訂公布「國民中學數學課程標準」
◎分三年逐年試用與修訂</td></tr>
<tr><td>高中數學</td><td>66.6</td><td>臺師大科學教育中心</td><td>66.6
67.2

67.6

69.7
72.7
73</td><td>◎籌備階段
◎各科課程諮詢小組與研究小組聯席會議，審議各科各年級課程綱要
◎各科課程諮詢小組與研究小組聯席會議，審議各科各年級教材細目、召開第五次高中科學課程研究發展會議
◎指定中正國防幹部預備學校進行教學實驗 [17]
◎修訂公布「高級中學數學課程標準」
◎分三年逐年試用與修訂</td></tr>
</table>

陳美如和彭煥勝（2016）指出，由於蘊釀與萌芽期的奠基，加上關鍵人物陳梅生先生的遠見，民國六十年代至八十年代間可謂「板橋模式」的穩定發展期，尤其該模式最為樂道處在於教材之實驗與研究者包括了教育、課程、心理、學科等專家與優秀教師共同參與，且在「試編－試教－修訂－實驗－修訂－試用－修訂」等過程後，方才全面實施。此模式可謂臺灣六十年來課程實驗研究的先聲，亦開啟科學化課程發展之先河（教育部，1985；歐用生等，2010）。

民國 64 年，「國民小學數學課程標準」完成修訂，其教材內容改革特色包括（教育部，1975；黃敏晃，1976）：一、教材分類略作調整：將原過於細緻的十一項分類改為六項 [18]，不僅便於參酌，亦彰顯教材發展層次；二、概念與技能並重：有鑒於 S.M.S.G.教材之前的數學教學過於偏重技能的訓練，而 S.M.S.G.教材本身又過於強調名詞與定義的界定，就學習理論的觀點，概念的獲得本無法脫離技能訓練，故本次課程改革中特別將數、量、實測、計算四者概括分類，其中數與量偏重於數的概念與量的認識，而實測與計算則強調技能方面的訓練，兩者皆不可忽略；三、算盤的地位：基於美國 S.M.S.G.數學因忽略計算訓練而使學童對概念理解效果不佳，算盤正好能提供幫助，尤其是「數的十進結構」能明確表達，故將珠算作為數學計算方

法的一種技術，與心算、筆算並列；四、關於集合與關係的教材：有鑑於集合在數學中出現，乃為解決無限步驟或無限集合的問題，惟小學端尚無如此迫切需要，故集合的術語與符號盡量延後，在一、二、三年級先出現一些簡單分類的實例，四、五、六年級則出現一些實例配合表達方式；五、計算機教學的引入：適當地刪減繁複的計算教材，並在六年級引入小型計算機的介紹，以收計算上的方便效用。七、幾何教材的改變：傳統的國小幾何教材偏重量的計算，如簡單圖形的面積、體積與表面積的求法等，這些教材因新課程已歸於實測與計算一類中，在圖形與空間這一類，則羅列有關於概念與性質方面的材料，注重學生在親手操作中獲得概念、了解性質。

在國中端方面，民國 64 年，臺師大科學教育中心國中數學課程實驗研究小組仿照國小課程研究的方式進行國中數學課程研究，70 年六月，完成國中數學試用教材，緊接於 72 年七月完成國中數學課程標準修訂，73 學年度則順利承接國小數學課程（呂溪木，2007）。該次國中數學教材內容改革特色包括（教育部，1983；呂溪木，2007）：一、教材分配多元：舊課程標準僅一種數學教材，為適應學生個別差異，新課程標準除「基礎數學」外，另設置「數學（甲）」和「實用數學」兩種教材，並分列不同目標，以增進學生學習興趣、提高學習效果；二、刪減抽象及教學成效偏低之教材：如近似值的四則計算、對數與指數、無理方程式、複數等；三、「實用數學」教材增加實用和操作性內容：如資料之處理、機率與統計、電算機之使用等；四、增加計算與解題工具：如引進電算器、微電腦、基本語言程式、流程圖等。由於學習國小新課程的第一屆學生於民國 73 年七月畢業、於 73 年九月進入國中階段就讀，故自民國 73 年學年度始，國中新的數學課程分三年逐年全面進行試用與修訂。

至於在高中端方面，民國 68 年九月，教育部為加強我國教育系統中各級學校科學教育進行全盤性改進工作，成立「科學教育指導委員會」，由中央研究院院長吳大猷先生擔任主任委員，並擴大科學教育中心規模，以數學、物理、化學等為研究科目，號召百餘位大學、中學教師，在基礎科學設計、教材編寫上投入相當大精力與時間，進一步協助國、高中課程編制（趙金祁，1985；吳大猷，1987；楊翠華，2003）。試用教科書編寫完成之後，依年級分別於 69、70 和 71 學年度於中正國防幹部預備學校進行教學實驗。民國 72 年，高中數學課程實驗告一段落後，同年七月，高中數學課程標準完成修訂，根據課程標準及其在中正預校實驗結果再次修訂教材，並於民國 73 學年度全國普遍使用，試用期間科教中心再指定十所高中作為實驗場域，經常蒐集實驗學校師生意見為每年修訂教材之參考。

該次高中數學教材內容改革特色包括（教育部，1983；李恭晴，1989；余文卿，1999）：一、教材分配多元：第一學年為必修「基礎數學」，第二學年在「基礎數學」外，另設置「基礎數學演習」與「基礎數學統合」兩種教材，學生需於此兩教材中自由選修一種修習，第三學年則在「理科數學」、「商科數學」、「普通數學」三種教材中自由選修一種修習[19]；二、新增教材內容：首次將統計納入高中教材，大大提升了機率與統計在數學的地位，另也破例地將微積分納入高三的理科數學與商科數學中，需教導一些簡單的理論與公式等；四、再刪減集合相關內容：對於名詞與符號不作嚴密定義，全套教材以重要的基本觀念為主，培養學生的計算、觀察、分析等能力，對於零星的或是學生不易吸收的數學教材則盡量刪去，如集合的運算、真值表、直線的法線式、分項分式、反三角函數、實數系的完備性、圓錐曲線的準線與離心率等。而原訂民國 76 年當學生自國中畢業、九月進入高中就讀時即可順利銜接的高中數學

新課程，提前於 73 年和國中同步實施，其原因可能在於對舊教材使用有所疑慮，意圖提早換用之故（科學月刊編輯部，1985）。

然而，在民國 72 年修訂「國民中學數學課程標準」後不久，因部分學者專家以為國民教育階段宜加強學生的基本學科能力，並增加國中學生有轉換課程的機會，建議數學學習不宜過早分化（教育部，1994），故民國 74 年四月，遂再進行國中數學課程標準的微調，將數學必、選修課程時數略作調整[20]。整體來說，在此次數學課程改革中，各級學校透過實驗研究做「自己的數學課程」是主要重點，然是時關於「科學與人文之間失衡問題」論述也相繼出現。政府主管文教部門重視自然科學教育的發展、研究補助或其他大型專案研究獎助多半落在研究自然科學領域上之舉措，此時也引起不少人文與社會科學研究者的抗議（林玉體，1984）。民國 73 年，時任教育部長朱匯森（1984）亦提及，科學教育應重視以人為本，著眼於人文範疇中光大科學的特性與本質，使學生能辨識科學之誤用與科技之誤導等問題，以開創科學與非科學合一的統整文化。此一類觀點，也為下一次的數學課程改革開拓了空間與機會。

六、第四次數學課程改革─政治民主化下的數學課程統整》

民國七十年代中後期（1986～1990），國內政治依然動盪（見圖 1），為因應解嚴後政治民主化、經濟自由化、社會多元化等劇變，政府再度著手於各階段課程標準修訂（教育部，1994）。民國 78 至 79 年，國小、國中及高中課程標準修訂委員會陸續成立，邀請針對該學習階段課程標準提出修訂建議（教育部，1993；1994；1995），此波數學課程改革以「培養二十一世紀的健全國民」為最高目標，國中、小課程強調以「未來化、國際化、統整化、生活化、人性化、彈性化」之基本理念（教育部，1993；1994），高中課程修訂則強調「民主化、適切性、連貫性、統整性、彈性化」原則（教育部，1995）。

民國 82 年，「國民小學數學課程標準」率先完成修訂，受美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics，[NCTM]）於 1989 年出版《學校數學課程與評鑑標準》（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics）影響，新教材大幅刪減了繁雜計算內容，另強調以數學解題為主的學習方式、重視數學能力的培養與數學概念的理解等（教育部，1993；游自達，2010）；民國 83 年，「國民中學數學課程標準」完成修訂，教學目標從數、量、形的基礎內容，逐漸延伸到重視學生的思考、推理與創造能力，強調情意層面的學習，而必選修課程也從分立目的轉為強調相輔相成功能等（教育部，1994）；民國 84 年，「高級中學數學課程標準」亦完成修訂，除了將代數、幾何、三角等各領域進行統整外，更留意高中與國中教材之間銜接、教材平易化，以及強調小型計算器運用等[21]（教育部，1995；余文卿，1999）。

然而，在這一波數學課程改革中，民國 82 年公布的國小數學課程標準、其數學教育目標所揭示之「建構」一詞[22]（後被簡稱為「建構式數學」），成為新課程中較具爭議的一項課題（周祝瑛，2003a）。關於其爭議，周祝瑛（2003b）指出：

> 當時設計課程的委員…希望透過這樣一套建構的概念，能夠強調以學生為本位的學習，在入門階段藉由對數學的討論及操作等，讓孩子認知實務圖片，或是以較簡單的計算題來解題，理解之後再進階至更快速更抽象的解法…有人批評，在建構式數學的開放過程中，可能有圖利他人的情形發生[23]…在許多教師與家長亟須了解的情況下，於是規劃建構

式數學的學者在各地舉辦演講和研習，每次收費高達兩三千元…研討會上，由於建構式數學的運算方式非常制式化，與會的家長若提出不同的解題方式，往往會被主講者制止，這也是其後備受爭議的地方（頁 165）…

然而，擔任民國 82 年國小數學課程標準修訂數學組召集人黃敏晃教授，也曾對此相關爭議提出說明，包括「當初研究改良教學法並未提出『建構式』，而是教科書編排及教學方式出問題，已不符原旨意」、「希望國外這套數學教學方式，能夠告訴老師引導孩子針對數學問題，有不同的解題思考方向，進而培養解決問題的建構能力，打破過去傳統的教學方法」等（臺灣立報，2001）[24]，他也提及（魏慶雲，2009）：

建構兩個字事實上是用成動詞，沒有用成名詞，從來沒有變成名詞過…只要是在課程和課堂裡面，學習的環境是變成這麼的活潑，這麼的不是單向，就是我們要的。建構主義的基本要點也不是那麼深，它的意思事實上是非常清楚，從認知的角度來講，是很平常的…（頁 109）

此時，解嚴後臺灣也興起了一連串政治民主開放措施效應。民國 83 年四月，由多個民間團體組成「四一〇教育改造聯盟」發起教改大遊行，抗議中央集權教育體制所造成的升學主義和管理主義，並提出四大訴求[25]。民國 85 年十二月，行政院教育改革審議委員會公布《教育改革總諮議報告書》，依書建議，教育部先完成「國民中小學九年一貫課程總綱綱要」，確立七大學習領域名稱及課程架構，自 90 學年度起逐步實施九年一貫課程；民國 92 年十一月，公布各學習領域課程綱要，至此「課程綱要」取代「課程標準」，「課程標準」正式走入歷史。至於「建構式數學」在實施六年之後，由於爭議持續不斷，教育部長黃榮村在 2003 年宣佈九年一貫課程不再強調「建構式數學」。

七、結語》

民國五十年至八十年代（1961～2000）間，我國面臨外交處境起伏、政治環境遽變、社會制度改革，以及經濟建設逐漸開發等背景下，教育哲學幾經轉折，數學課程亦有多次變革。綜觀該時期數學課程之變革，有其時代脈絡下的關鍵事件或背景之促成，或受現實環境限制，或為回應國家和社會需要等因素，反映了當時時勢條件的限制和數學學習的特性。本研究將此期間課程標準時期數學課程變革之沿革和趨勢整理如表 2 和圖 2。

表 2

民國五十年至民國八十年代（1961～2000）課程標準時期數學課程變革之沿革

	關鍵事件或背景	改革的主要重點	各級學校數學課程標準改革脈絡
第一次數學課程改革ー國際潮流下對「新數學」的順應	蘇俄成功發射人造衛星 Sputnik	將美國 S.M.S.G.教材納入課程中	民國 53 年公布「高級中學生物、化學、物理教材編輯大綱高級中學數學教材大綱」 （民國 54 年逐年實施） ↓ 民國 57 年訂頒「國民中學數學暫行課程標準」、「國民小學數學暫行課程標準」 （民國 57 年逐年實施）
第二次數學課程改革ー對「新數學」的反動	歸國留學生與客座講學教授共同參與課程改革檢討	減輕教材中「集合論」份量	民國 60 年修訂「高級中學數學課程標準」 （民國 61 年逐年實施） ↓ 民國 61 年修訂「國民中學數學課程標準」 （民國 62 年逐年實施）
第三次數學課程改革ー外交失利下的數學課程實驗研究	外交失利、政治動盪、經濟起飛	辦理各學習階段數學課程的實驗研究	民國 64 年修訂「國民小學數學課程標準」 （民國 66 年分六年逐年試用與修訂） ↓ 民國 72 年修訂「高級中學數學課程標準」 （民國 73 年分三年逐年試用與修訂） ↓ 民國 72 年修訂「國民中學數學課程標準」 （民國 73 年分三年逐年試用與修訂） ↓ 民國 74 年修訂「國民中學數學課程標準」
第四次數學課程改革ー政治民主轉型下的數學課程統整	解除戒嚴、廢動員戡亂時期臨時條款等	重視各學年/階段數學課程連貫與銜接	民國 82 年修訂「國民小學數學課程標準」 （民國 85 年逐年實施） ↓ 民國 83 年修訂「國民中學數學課程標準」 （民國 86 年逐年實施） ↓ 民國 84 年修訂「高級中學數學課程標準」 （民國 87 年逐年實施）

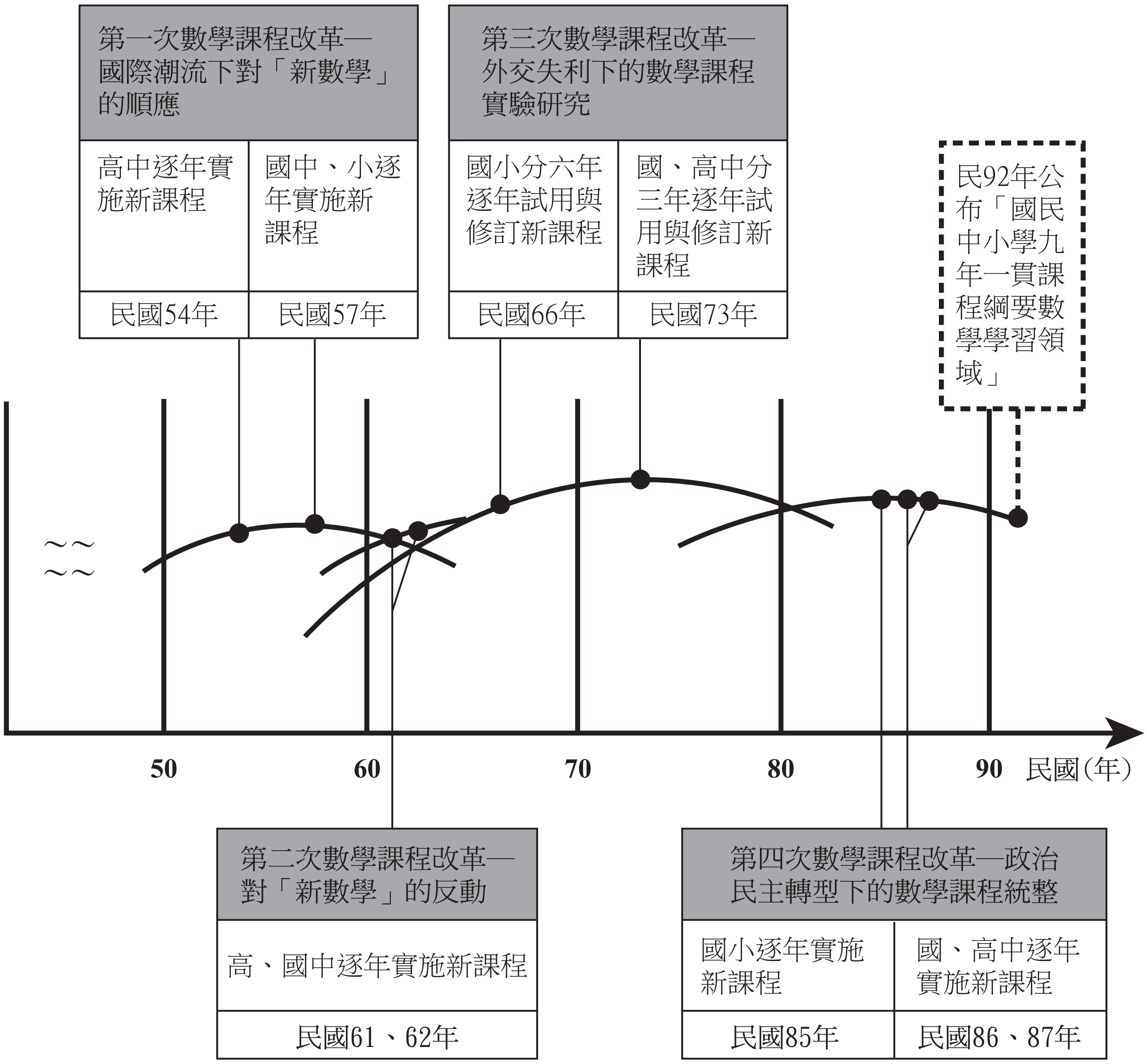


圖 2 民國五十年至民國八十年代（1961～2000）課程標準時期數學課程改革之趨勢

資料來源：本研究整理

圖 2 為依該時期數學課程改革之不同關鍵事件或背景、改革主要重點、各級學校數學課程標準改革脈絡，以及新課程正式「逐年實施」或「逐年試用與修訂」學年度為主要參照，所繪製而成的四波數學課程改革，波波之間或有部分重疊。第一波數學課程改革，主要緣起於對美國「新數學」運動潮流的順應，但民國 51 年數學課程標準修訂時，因美國「新數學」課程尚在實驗階段，故未能及時納入，直到民國 53 年才公布「高級中學生物、化學、物理教材編輯大綱高級中學數學教材大綱」，並規定 54 學年度正式逐年實施「新數學」。民國 57 年，S.M.S.G.教材也一併納入了中小學數學課程，民國 55 年至 61 年間 S.M.S.G.課程可說完全支配了我國數學教學方向（黃武雄，1978）。不過，由於「新數學」實施後爭議不斷，民國 60 年至 61 年，又分別進行高中和國中數學課程標準修訂，此為第二波數學課程改革，此波數學課程改革不少歸國留學生與回國客座講學教授共同參與，改革重點在於減少教材中「集合論」份量，而國小數學教材則採逐年修改之。此二波數學課程改革的意涵，可說突顯了數學課程改革

偏向於對數學知識的重視，反映以數學內容知識為導向的課程改革重點，彰顯對追求知識的「質」和求知「方法」的重視，數學教育目的偏向以培養優秀的「數學家」為主要任務。

再探第三波和第四波數學課程改革意涵。民國 57 年，教育部在實施九年國民教育時即規劃有再修訂之計畫，民國六十年代初起，國小、國中和高中陸續進行數學課程實驗研究，以團隊、實驗的方式發展「自己的數學課程」。民國 66 學年度起，國小分六年逐年試用與修訂，而國、高中則於 73 學年度起分三年逐年試用與修訂。然由於科學進步迅速，龐大知識量累積的同時不斷發生變化，傳統學力觀在知識爆炸的現代教育下，概念的學習也逐漸轉向以一種「連續發展的學習能力」，即「遷移的學力」、「基本概念的學習」（柯啟瑤，1977），加上 1980 年代進入後工業社會後資訊相對發達，人類需求漸次超越於僅對物質的追求，擴充到精神領域的探尋，復又因國內解除戒嚴、政治體制面臨轉型，「大中國」國族認同已不若以往明確…在諸多因素交織下，民國 78 年起，各學習階段課程標準修訂委員會陸續成立，民國 80 年，在第四次全國科學技術會議上，眾多學者也提出如「應審慎研究西方國家科技發展的經驗，以避免西方工業社會化過程中所犯的錯誤」、「認清人類對科技可能的濫用」、「人文與科技的均衡發展問題」（文建會和國科會，1991）等涉及對道德倫理議題的關懷。

從第三波數學課程改革過渡到第四波數學課程改革，逐漸轉向以「邁向二十一世紀科技時代數學教育之需求」為訴求（教育部，1994），數學課程強調以「能力」為導向的課程改革重點，數學教育目的以培養「二十一世紀的健全國民」為要務，課程目標也延展至對情意領域層面的重視，更涉道德倫理議題的關懷。整體來說，因應時代社會變遷、政經變動，以及文化背景因素等，自民國五十年至八十年代（1961～2000）間約四十年間，課程標準時期下的數學課程改革約經有四次較大幅度變革，一共有十二次數學課程標準修訂，其數學課程取向之演變如表 3 所示。

表 3

民國五十年代至八十年代（1961～2000）課程標準時期數學課程改革課程取向之演變

	民國五十年代		民國八十年代
課程改革導向	以知識和技能為主	→	逐漸轉向以能力為導向
數學教育目的	以培養「數學家」為目的	→	以培養「二十一世紀的健全國民」為目的
課程目標領域	重視「認知」和「技能」領域	→	擴展至「情意」領域
道德倫理議題	排除價值性	→	逐漸關注道德倫理議題

綜言之，本研究試圖探究民國五十年至八十年代（1961～2000）間我國數學課程之改革，逐一回顧、探索促使歷次數學課程改革發生之關鍵事件或背景、追蹤其改革的重點，以及瞭解各學習階段數學課程標準修訂之展演脈絡等，除期能對該時期數學課程改革有所理解外，亦期從中反思可資借鏡取法之處，並以可能闕漏為殷鑑，或將有助於我國數學教育未來發展方向規劃之參酌。

八、附註》

1. 民國 37 年修訂之中學課程標準，本擬施行較長時間後再行修正，但因政府遷臺緣故，課程標準僅能先於臺灣一省實施，經試行結果發現，「公民」、「國文」、「歷史」、「地理」等四科課程標準尚不能完全與當時「反共抗俄」之基本國策和「戡亂建國教育實施綱要」相互配合，故民國 41 年，教育部局部修訂中學課程標準，該次修訂僅「公民」、「國文」、「歷史」、「地理」等四科教材內容的改進，其他教學科目如數學科及其每周教學時數表並無改變（教育部，1995）。
2. 民國 43 年八月，教育部以普字第九一二八號令頒有實施「減輕中小學學生課業負擔實施方案」規定：初級中等學校之每週教學總時數，以不超過三十小時為度，高級中等學校之每週教學總時數，以不超過三十二小時為度。民國 44 年的課程標準修訂在初級中學方面，主要針對「理化」和「音樂」等科進行教學時數的調整，高級中學方面，主要針對「英語」和「化學」科進行時數的調整。初級或高級中學數學科的教學時數均無變動（教育部，1962）。
3. 同註 1。
4. 同註 2。
5. 民國 37 年九月，教育部訂頒「小學課程標準實施辦法」，通令各省市遵照辦理，後因政府移駐臺灣，此項課程標準經試行兩年結果發現「國語」、「社會」兩科課程標準未能配合國策，故民國 41 年十一月，修訂公布「國語」、「社會」兩科課程標準，此次修訂之特點依「國民學校法」的規定改稱為「國民學校課程標準」，與以往「小學課程標準」名稱不同（教育部，1993）。
6. 為行文與閱讀簡暢，後文凡提及民國五十年代至八十年代（1961～2000）間課程標準之「修訂」，均包含有「訂頒」的課程標準。
7. 呂溪木先生本文原刊登於民國 75 年出版的臺灣省國民學校教師研習會三十年紀念論文集。由於原文已不易搜尋，後受民國 96 年十二月六日舉辦之「吳大猷先生百歲冥誕科學教育學術研討會～我國近五十年之科學教育發展」研討會邀請，另以「民國 75 年之前我國數學課程演變」和「變遷時代中我國數學課程的發展」為題稍做修正後，發表於研討會中並做為參考文件。
8. 每組成員九人，成員由大學教授或曾赴美國研究進修該項最新教材之學者，以及教育部指定四所高級中學科學教育實驗之學校教師為主。數學組的成員包括：李新民（擔任小組召集人）、羅芳樺、徐道寧、康洪元、胡澄生、彭商育、余榮昌、蕭煥林、周宗樺等（教育部，1964）。
9. 項武義先生 1959 年畢業於臺灣大學數學系，1964 年獲美國普林斯頓大學數學博士學位。民國 59 年九月，項先生客座於臺灣大學講學一學期，開設課程名稱為「數學概論」（劉太平和張海潮，2008）。項武義先生後也成為民國 60 年高中數學課程標準修訂的委員之一（教育部，1971）。
10. 徐道寧女士 1947 年畢業於北平師範學院（北師大），1957 年獲西德宏博基金會獎學金，1961 年完成西德哥庭根大學理學博士，隔年返國任教於師範大學（陳華和吳孟青，2014）。徐道寧女士後也成為民國 57 年國中數學課程標準修訂的委員之一（教育部，1968）。

11. 陸思明（1976）在「同黃武雄教授談他參與數學改革的酸甜苦辣」一文中，曾提問黃武雄教授「為什麼特別選在彰化中學？」黃武雄教授回答：「…所以選在中部，一方面是那裡的老師不像臺北的老師那麼"忙"，可以有較多共同的時間觀摩探討彼此的教學得失。同時地位適中，學生入學的水準平均不算偏高，也容易試出教材對一般學生的效果…」（頁37）。
12. 此十一位教師為童恒誠、陳梅生、毛順生、樊景周、林繼興、賴順一、羅經榜、劉厚卿、吳隆熙、余雅成、游美津（陳梅生，1989）。陳梅生對此建議報告的過程有生動描述：「…回國後，全體團員十一人，並集中在板橋教師研習會，整理考察心得報告，結果編成了一本十六開，九十六頁的「美日兩國科學教育考察報告」由板橋研習會印行，執筆的考察團員，共十一人…該項報告書完成之後，並在板橋教師研習會做了一次簡報，出席簡報之長官，可說菁英俱到：有國科會吳主任委員大猷、教育部次長謝明山、教育部王次長亞權、葉司長楚生、國科會除主任委員外，還有科學教組組長朱匯森先生、王組長繼五、省教育廳廳長潘振球、臺北市教育局局長高銘輝，報告除了文字之建議外，另選了八十三張彩色幻燈片（從三千多張中選出拼成參觀重點）我們這十一位小學老師，真是報告得有聲有色，使與會長官們全都被我們說服，承認此次考察，具有成果，沒有白費國家預算（在最初組團時，有人認為小學老師，不通語言，不應該出國）並同時贊成我們對課程研究之建議，指定研習會從事課程實驗研究工作。教育廳潘廳長並認為不要分散這批參觀有見識的小學老師，就聚集在一起，好好研究。臺北市高局長亦表示，科學課程教學，亟應改進，若需要臺北市經費協助，當樂於編列預算幫忙，所以嗣後在板橋成立自然科課程實驗研究計畫，可以說就在這項簡報之中，就定下來了。所有建議之中，很多已付之實施，筆者個人頗有竊喜。因此項建議由本人起草…」（頁112～114）。
13. 陳梅生（1989）指出，他於民國65年十二月在師大科學教育中心出版之「科學教育」上發表過一篇文章「國小科學課程研究模式」，當時因板橋研習會所從事之課程實驗研究工作頗受各方矚目，時任師大科學教育中心之理學院院長楊冠政先生便稱其運作模式為「板橋模式」，後演變成一種對課程用實驗研究方法的統稱。
14. 組成委員及其時任職務分別為：黃敏晃（臺大數學系教授，擔任召集人）、邱守榕（臺大數學系教授）、呂溪木（臺師大數研所所長）、薛昭雄（政大數學系教授）、方炳林（臺師大教育系教授）、簡茂發（臺師大教育心理系教授）、郭雲欽（新竹師專數學教材教法教師）、吳貞祥（臺北女師專數學教材教法系教授）、陳梅生（板橋研習會主任）、許永賢（校長）、邱石虎（教師）、賴榮勳（教師）、魏福政（教師）、蔡進丁（教師）、楊順和（教師）、林玉珍（教師）、詹宏鈞（教師）等，一共十七人（陳梅生，1989）。
15. 創立於民國45年，會址設於新北市板橋市大觀路一段30號，48年改隸屬臺灣省政府教育廳。為加強教育研究工作，於54年奉准增設研究室，始辦理臺灣省國小校長、主任儲備訓練工作，培育國校學小行政人才。69年，行政院國家科學委員同意將其列為學術研究機構。（資料取自：國家教育研究院，2016年7月8日。
取自 http://www.naer.edu.tw/files/15-1000-10408,c292-1.php?Lang=zh-tw）
16. 創立於民國63年三月，為加強科學教育之研究實驗與推廣，由教育部指定成立科學教育中心，其成立宗旨為：(一)科學教育理論之研究，(二)科學課程之實驗與推廣，(三)科學教育

資料之編譯與出版，(四)科學教具之研究與設計，(五)輔導科學教師之教學與在職進修。中心首任主任由理學院院長楊冠政教授兼任。（資料取自：國立臺灣師範大學科學教育中心，2016 年 7 月 8 日。取自 http://www.sec.ntnu.edu.tw/about%20SEC/about-hstry.htm）

17. 李恭晴（1989）指出，當時因聯考升學壓力所致，各高中皆無意願接受新教材的實驗試教，而中正預校學生因無升學壓力，學校經費設備等也堪稱充裕，學校行政易配合試教工作，故其學校性質雖與一般高中不盡相同，在當時卻是實驗試教的最佳選擇。
18. 民國 57 年訂頒「國民小學數學暫行課程標準」中之數學教材分類分別為：數、實測、計算、集合、簡易錢幣、統計圖表、珠算、概算、折扣、利息、地圖與比例尺等十一項；民國 64 年修訂「國民小學數學課程標準」將其調整為：數與量、實測與計算、圖形與空間、統計與圖表、集合與關係、術語與符號等六項（教育部，1975）。
19. 余文卿（1999）另指出，該次課程標準修訂的新版本數學教材雖由國立編譯館統一印行，連演習（上、下冊）與統合教材（上、下冊）在內，總共有十冊之多，其中第五、六冊更各有三個版本，理論上學生應人手一冊，但實際上學生只有各校自編的講義或參考書，教科書僅是權充擺設的花瓶。
20. 魏明通（1985）指出，時任科學教育指導委員會主任委員吳大猷先生以為十二歲至十五歲即以不同的教育方式決定學生前途有違國民教育宗旨，且十五歲若無法繼續升學又未達服兵役年齡，對個人和社會將生困擾。故距離前次修訂（民國 72 年）後約兩年，再度進行國中數學課程標準修訂，本次修訂主要訴求在「加強學生英語、數學、自然科學等基本學科能力為目標，及增進學生實際生活知能為原則」（教育部，1983），將選修科目延至第三學年實施。
21. 為因應國中數學教材逐漸簡化，本次高中數學教材亦隨調整，如：行列式的理論中只談論二階與三階行列式、克拉瑪公式限於解二元一次與三元一次方程組、圓錐曲線與直線的關係不再觸及錐線的切線問題等。此外，新課程在介紹邏輯、集合與函數三個數學基本概念時，為使順利銜接國中課程，也特別透過平面幾何知識引出邏輯中的充分與必要條件；另有關指數、對數、三角函數與反三角函數的求值，亦不再侷限於古典的查表與內插法，可靈活運用小型計算機，計算教材之地位亦重新思考等（余文卿，1999）。
22. 民國 82 年修訂的國小數學課程標準中揭示，國小數學教育之目標在輔導兒童從日常生活經驗中，獲得有關數學的知識，進而培養有效運用數學方法，以解決實際問題的態度及能力。如：一、養成主動地從自己的經驗中，建構與理解數學的概念，並透過了解及評鑑別人解題方式的過程，進而養成尊重別人觀點的態度。二、養成從數學的觀點考慮周遭事物，並運用數學知識與方法解決問題的能力。三、培養以數學語言溝通、討論、講道理和批判事物的精神。四、養成在日常生活中善用各類工具從事學習及解決問題的習慣（教育部，1993）。
23. 教科書開放於民間編製時，教育部同步委託推動建構教學的學者與教師編製一套數學教材，但當該教材與其他民間業者自編教科書一同送入國立編譯館進行審查時，結果僅部編本數學教材獲得通過，以致後來其他出版業者基於商業考量，紛紛模仿起該版本寫法（翁秉仁，2009）。石厚高（2002）指出，至民國 91 年十二月止，市面上流通的五種版本全以「建構式數學」寫法編製，且附帶需購入教具，估計數學教材與補習市場一年至少一百億台幣等，也是爭議之一。
24. 參考自 2001 年二月四日之臺灣立報 http://www.lihpao.com/?action-viewnews-itemid-55340。

25. 即廣設高中大學、落實小班小校、制定教育基本法，以及推動教育現代化等（黃武雄，1997）。

九、參考文獻》

1. 王九逵（2000）。集合論與數學教育。科學月刊，31(3)，241-243。取自數學知識網站 https://goo.gl/8BiIaV
2. 石厚高（2002）。建構數學的迷思。數學傳播，26(4)，69-76。
3. 朱匯森（1984）。人性中心的科學教育。教育資料文摘，13(1)，7-9。
4. 吳大猷（1987）。臺灣的科學發展—個人廿餘年的經歷。科學教育月刊，97，2-9。
5. 余文卿（1999）。漫談高中數學新課程。數學傳播，23(1)，52-56。
6. 呂溪木（2007）。民國 75 年之前我國數學課程演變。論文發表於「吳大猷先生百歲冥誕科學教育學術研討會～我國近五十年之科學教育發展」研討會，臺灣師範大學科學教育所，臺北市。
7. 李恭晴（1989）。我國高級中學數學課程之發展。教育資料集刊，14，209-220。國立教育資料館。
8. 林玉體（1987）。臺灣教育面貌 40 年。臺北市：自立晚報。
9. 林長壽（2003）。臺灣當前數學教育的危機。論文發表於「第十屆張昭鼎紀念研討會—科學與教育」。臺灣大學應用力學所，臺北市。
10. 林碧珍（2010）。臺灣數學教育研究的回顧與反思。教育研究月刊，190，129-143。
11. 周祝瑛（2003a）。臺灣教育改革之研究。論文發表於「民辦教育」研討會。上海華東師範大學。https://goo.gl/TNB5ZL
12. 周祝瑛（2003b）。誰捉弄了臺灣教改？（1987～2003）。臺北：心理。
13. 柯啟瑤（1977）。科學概念的學習（上）。臺北市：幼獅文化。
14. 科學月刊編輯部（1985）。數學課程的過去、現在與未來。科學月刊，182，1-16。
15. 翁秉仁（2009）。談建構數學。取自國立臺灣大學數學系網站 https://goo.gl/8T0JX5
16. 國史館（1990）。中華民國教育誌（初稿）。臺北：作者。
17. 國家科學委員會與行政院文化建設委員會（1991）。第四次全國科學技術會議（第五中心議題）人文社會與科技發展之相互影響與調和會議資料。臺北：作者。
18. 國家發展委員會（2015）。臺灣經濟發展歷程與策略 2015。臺北：作者。
19. 國家實驗研究院（2012）。中華民國科學技術年鑑（101 版）。臺北：作者。
20. 教育部（1962）。中學課程標準。臺北市：作者。
21. 教育部（1964）。高級中學生物、化學、物理教材編輯大綱高級中學數學教材大綱。臺北：作者。
22. 教育部（1968）。國民中學暫行課程標準。臺北：作者。
23. 教育部（1971）。高級中學課程標準。臺北：作者。
24. 教育部（1972）。國民中學課程標準。臺北：作者。
25. 教育部（1983）。高級中學課程標準。臺北：作者。
26. 教育部（1983）。國民中學課程標準。臺北：作者。
27. 教育部（1985）。國民中學課程標準。臺北：作者。

28. 教育部（1993）。國民小學課程標準。臺北：作者。
29. 教育部（1994）。國民中學課程標準。臺北：作者。
30. 教育部（1995）。高級中學課程標準。臺北：作者。
31. 教育部（2000）。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。臺北：作者。
32. 教育部（2003）。國民中小學九年一貫課程數學領域綱要。臺北：作者。
33. 教育部（2012）。第七次中華民國教育年鑑。臺北：正中書局。
34. 教育部（2014）。十二年國民基本教育課程綱要總綱。臺北：作者。
35. 教育部（2016）。部史網站 http://history.moe.gov.tw/index.asp。
36. 陳美如、彭煥勝（2016）。探尋一段臺灣課程發展史—板橋模式的回顧與前瞻。教科書研究。9(1)，1-36。
37. 陳冒海（1989）。我國國民中學數學課程之發展。教育資料集刊，14，157-194。國立教育資料館。
38. 陳華、吳孟青（2014）。徐道寧教授專訪。載於陳國璋（主編），清華大學數學系五十週年紀念文集（頁 1-24）。新竹市：國立清華大學數學系。
39. 陳梅生（1986）。在研習會幾樁值得回憶的事。載於臺灣省國民學校教師研習會（編著），臺灣省國民學校教師研習會三十紀念專刊（頁 41-55）。臺灣省：國民學校教師研習會。
40. 陳梅生（1989）。我國小學自然、數學兩課程實驗研究。教育資料集刊，14，109-133。
41. 游自達（2010）。數學能力之內涵變遷與學習成果評量所面臨的挑戰。中等教育，61(2)，8-21。
42. 陸思明（1976）。同黃武雄教授談他參與數學改革的酸甜苦辣。數學傳播，1(1)，34-40。
43. 趙金祁（1985）。談中華民國的科學教育。科學教育月刊，81，2-5。
44. 楊翠華（2003）。臺灣科技政策的先導：吳大猷與科導會。臺灣史研究，10(2)，67-110。
45. 劉太平、張海潮（2008）。有朋自遠方來一專訪項武義教授。數學傳播，32(4)，3-15。
46. 歐用生、李建興、郭添財、黃嘉雄（2010）。九年一貫課程實施現況評估。臺北市：行政院研究考核委員會。
47. 黃武雄（1978）。「Morris Kline：新數學為何失敗」書介。數學傳播，2(4)，101-104。
48. 黃武雄（1997）。臺灣教育的重建。臺北市：遠流。
49. 黃敏晃（1976）。國民小學數學科課程標準的修訂。數學傳播，1(1)，166-172。
50. 謝明初（2010）。全球化背景下的數學課程改革。數學傳播，34(2)，82-90。
51. 魏明通（1985）。世界的教育改革(三)：英國的教育改革。科學教育月刊，80，2-8。
52. 魏明通（2007）。高級中學科學課程改進與實驗教學及全面推廣。論文發表於「吳大猷先生百歲冥誕科學教育學術研討會～我國近五十年之科學教育發展」研討會，臺灣師範大學科學教育所，臺北市。
53. 魏慶雲（2009）。黃敏晃訪談：國小 64 年版數學課程發展紀錄。國立臺北教育大學數學教育研究所碩士論文，未出版，臺北市。
54. National Council of Teachers of Mathematics（1989）. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA. The National council of Teachers of Mathematics.

直觀插值公式解法搭配兩個恆等式
等價牛頓當年提出的插值公式解法與其推廣應用

李維昌／宜蘭高中退休教師

一、研究目的》

個人突發奇想的直觀插值法經由兩個恆等式的神奇轉換即是一代大師牛頓在他的曠世鉅作《自然哲學的數學原理》一書提到的知名牛頓插值法，可惜牛頓當時並未證明，而是由拉格朗日1795年在法國巴黎高等師範學院的演講稿裡替牛頓補證明，筆者也嘗試替牛頓補證明，此法有別於拉格朗日的證法，僅以此法向我最景仰的兩位數學大師牛頓與拉格朗日致最崇高的敬意，並將筆者的過相異四點直觀插值公式解法推廣到過相異n+1點的直觀插值公式解法，同時舉例實際應用。

二、研究過程》

1. 筆者的直觀插值公式解法：

若已知 $f(x_i)=y_i,\ i=1,2,3,4$，且 x_1,x_2,x_3,x_4 互異，求至多三次牛頓插值多項式 $f(x)=$？

解法：(1) $y_1=y_1$。

(2) $y_2=y_1+\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_2-x_1)$。

(3) $$y_3=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_3-x_1)+(\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})\cdot(x_3-x_1)$$

$$=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_3-x_1)+(\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2})\cdot(x_3-x_2)(x_3-x_1)$$ 。

(4) $$y_4=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_4-x_1)+(\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})\cdot(x_4-x_1)$$

$$=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_4-x_1)+(\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2})\cdot(x_4-x_2)(x_4-x_1)$$

$$+(\frac{\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2})\cdot(x_4-x_2)(x_4-x_1)$$

$$= y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot(x_4 - x_1) + (\frac{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2})\cdot(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)$$

$$+(\frac{\frac{\frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_4 - x_2} - \frac{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2}}{x_4 - x_3})\cdot(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)$$ 。

(5)由(1)到(4)的論述可得

$$f(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot(x - x_1) + (\frac{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2})\cdot(x - x_2)(x - x_1)$$

$$+(\frac{\frac{\frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_4 - x_2} - \frac{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2}}{x_4 - x_3})\cdot(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)$$ ，

又 $\deg f(x) \le 3$ ，

因此 $f(x)$ 即為所求的至多三次牛頓插值多項式。

2. 恆等式(1)：已知 x_1, x_2, x_3 三數互異，

試證：$$\frac{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2} = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$ 。

證明：$y_2 - y_1 = y_2 - y_1$

$$\Rightarrow (y_3 - y_1) - (y_3 - y_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot[(x_2 - x_1) + (x_3 - x_3)]$$

$$\Rightarrow \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\cdot(x_3 - x_1) - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\cdot(x_3 - x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot(x_3 - x_1) - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot(x_3 - x_2)$$

$$\Rightarrow (\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})\cdot(x_3 - x_1) = (\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})\cdot(x_3 - x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2} = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$ ，得證。

3. 恆等式(2)：已知 x_1, x_2, x_3, x_4 四數互異，

試證：$$\frac{\frac{\frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_4 - x_2} - \frac{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2}}{x_4 - x_3} = \frac{\frac{\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{x_4 - x_2} - \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}}{x_4 - x_1}$$ 。

證明：$\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}[(x_4-x_2)+(x_1-x_1)]}{x_4-x_2}-\frac{-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}[(x_4-x_2)+(x_3-x_3)]}{x_4-x_2}$$

$$=\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}[(x_4-x_1)-(x_4-x_3)]$$

$$\Rightarrow \frac{(y_2-y_1)-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_4-x_1)}{x_4-x_2}-\frac{(y_2-y_3)-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\cdot(x_4-x_3)}{x_4-x_2}$$

$$=\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}[(x_4-x_1)-(x_4-x_3)]$$

$$\Rightarrow \frac{(y_4-y_1)-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_4-x_1)}{x_4-x_2}-\frac{(y_4-y_3)-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\cdot(x_4-x_3)}{x_4-x_2}$$

$$=\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}[(x_4-x_1)-(x_4-x_3)]$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}\cdot(x_4-x_1)-\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}\cdot(x_4-x_3)$$

$$=\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}\cdot(x_4-x_1)-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}\cdot(x_4-x_3)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}\right)\cdot(x_4-x_1)$$

$$=\left(\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}\right)\cdot(x_4-x_3)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_3}=\frac{\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}\text{，}$$

利用恆等式(1) $\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}=\dfrac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}$，

將等號左邊的 $\dfrac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}$ 代換成 $\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}=\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}$$，得證。

4. 等價牛頓當年所提出的插值公式解法：
將直觀插值公式解法

$$f(x)=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+\left(\frac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right)\cdot(x-x_2)(x-x_1)$$

$$+\left(\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}\right)\cdot(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$，

搭配恆等式(1)與恆等式(2)可得

$$f(x)=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+\left(\frac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}\right)\cdot(x-x_2)(x-x_1)$$

$$+\left(\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}\right)\cdot(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$，

此表達式即為過相異四點至多三次牛頓插值多項式的公式解法，牛頓當年將它發表在他的曠世鉅作《自然哲學的數學原理》一書，可惜當年牛頓並未證明。

5. 拉格朗日替牛頓補證明：
拉格朗日 1795 年在法國巴黎高等師範學院的演講稿提及：
已知 $y=f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ 且 $y_i=f(x_i)$， $i=1,2,3,4$， x_1,x_2,x_3,x_4 四數互異

$$\Rightarrow\begin{cases} y_1=a+bx_1+c{x_1}^2+d{x_1}^3\cdots\cdots① \\ y_2=a+bx_2+c{x_2}^2+d{x_2}^3\cdots\cdots② \\ y_3=a+bx_3+c{x_3}^2+d{x_3}^3\cdots\cdots③ \\ y_4=a+bx_4+c{x_4}^2+d{x_4}^3\cdots\cdots④ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\text{②}-\text{①}}{x_2-x_1}\Rightarrow\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=b+(x_2+x_1)c+d(x_2{}^2+x_2x_1+x_1{}^2)\cdots\cdots\text{⑤}\\ \dfrac{\text{③}-\text{②}}{x_3-x_2}\Rightarrow\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=b+(x_3+x_2)c+d(x_3{}^2+x_3x_2+x_2{}^2)\cdots\cdots\text{⑥}\\ \dfrac{\text{④}-\text{③}}{x_4-x_3}\Rightarrow\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=b+(x_4+x_3)c+d(x_4{}^2+x_4x_3+x_3{}^2)\cdots\cdots\text{⑦}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\text{⑥}-\text{⑤}}{x_3-x_1}\Rightarrow\dfrac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}=c+d(x_3+x_2+x_1)\cdots\cdots\text{⑧}\\ \dfrac{\text{⑦}-\text{⑥}}{x_4-x_2}\Rightarrow\dfrac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}=c+d(x_4+x_3+x_2)\cdots\cdots\text{⑨}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\text{⑨}-\text{⑧}}{x_4-x_1}\Rightarrow d=\frac{\dfrac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\dfrac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}$$，代回⑧式

$$\Rightarrow c=\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}-(x_3+x_2+x_1)\cdot\frac{\dfrac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\dfrac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}$$，代回⑤式

$$\Rightarrow b=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-(x_2+x_1)\cdot[\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}-(x_3+x_2+x_1)\cdot\frac{\dfrac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\dfrac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}]$$

$$-(x_2{}^2+x_2x_1+x_1{}^2)\cdot[\frac{\dfrac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\dfrac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}]$$

$$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-(x_2+x_1)\cdot\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}+(x_3x_2+x_2x_1+x_3x_1)\cdot\frac{\dfrac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\dfrac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}$$

代回①式

$$\Rightarrow a=y_1-x_1\cdot[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-(x_2+x_1)\cdot\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}+(x_3x_2+x_2x_1+x_3x_1)\cdot\frac{\dfrac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\dfrac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}]$$

$$-x_1^{\,2}\cdot[\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}-(x_3+x_2+x_1)\cdot\frac{\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}]$$

$$-x_1^{\,3}\cdot\frac{\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}$$

$$=y_1-x_1\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+x_1x_2\cdot\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}-x_1x_2x_3\cdot\frac{\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}$$

$$\Rightarrow f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$$

$$=[y_1-x_1\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+x_1x_2\cdot\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}-x_1x_2x_3\cdot\frac{\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}]$$

$$+x\cdot[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-(x_2+x_1)\cdot\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}+(x_3x_2+x_2x_1+x_3x_1)\cdot\frac{\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}]$$

$$+x^2\cdot[\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}-(x_3+x_2+x_1)\cdot\frac{\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}]$$

$$+x^3\cdot[\frac{\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}]$$

$$=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+(\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1})\cdot[x^2-(x_2+x_1)x+x_1x_2]$$

$$+(\frac{\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1})\cdot[x^3-(x_3+x_2+x_1)x^2+(x_3x_2+x_2x_1+x_3x_1)x-x_1x_2x_3]$$

$$=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+(\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1})\cdot(x-x_2)(x-x_1)$$

$$+\left(\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}\right)\cdot(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)\ ,$$

因此 $f(x)$ 即為當年牛頓提出的至多三次牛頓插值多項式的公式解法，證明完畢。

6. 筆者嘗試替牛頓補證明：

若已知 $f(x_i)=y_i$, $i=1,2,3,4$, 且 x_1,x_2,x_3,x_4 互異，求至多三次牛頓插值多項式 $f(x)=$ ？

解法：(1) $y_1=y_1$ 。

(2) $y_2=y_1+\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_2-x_1)$ 。

$$(3)\ y_3=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_2-x_3+x_3-x_1)+\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\cdot(x_3-x_2)$$

$$=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_3-x_1)+\left(\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\cdot(x_3-x_2)$$

$$=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_3-x_1)+\left(\frac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}\right)\cdot(x_3-x_2)(x_3-x_1)\ 。$$

$$(4)\ y_4=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_2-x_4+x_4-x_1)+\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\cdot(x_3-x_4+x_4-x_2)+\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}\cdot(x_4-x_3)$$

$$=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_4-x_1)+\left(\frac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}\right)\cdot(x_4-x_2)(x_3-x_4+x_4-x_1)$$

$$+\left(\frac{\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}\right)\cdot(x_4-x_3)(x_4-x_2)$$

$$=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x_4-x_1)+\left(\frac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}\right)\cdot(x_4-x_2)(x_4-x_1)$$

$$+\left(\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}\right)\cdot(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)\ 。$$

(5)由(1)到(4)的論述可得

$$f(x)=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+\left(\frac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}\right)\cdot(x-x_2)(x-x_1)$$

$$+(\frac{\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1})\cdot(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1) \text{ ，}$$

又 $\deg f(x)\le 3$，

因此 $f(x)$ 即為當年牛頓提出的至多三次牛頓插值多項式的公式解法，證明完畢。

7. 將筆者的過相異四點直觀插值公式解法推廣到過相異 $n+1$ 點的直觀插值公式解法：

若已知 $f(x_i)=y_i$，$i=1,2,\cdots,n+1, n\ge 2$，且 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 互異，求至多 n 次牛頓插值多項式 $f(x)=$ ？

解法：宣稱所求至多 n 次牛頓插值多項式，$n\ge 2$，

$$f(x)=y_1+\sum_{i=1}^{n}a_i(x_{i+1},y_{i+1})\cdot\prod_{j=1}^{i}(x-x_j) \text{ ，}$$

其中 $a_1(x_{k+1},y_{k+1})=\dfrac{y_{k+1}-y_1}{x_{k+1}-x_1}$，$1\le k\le n$，

$$a_i(x_{k+1},y_{k+1})=\frac{a_{i-1}(x_{k+1},y_{k+1})-a_{i-1}(x_i,y_i)}{x_{k+1}-x_i},\ 2\le i\le n,\ i\le k\le n \text{ ，}$$

檢驗如下：

(1) $f(x_1)=y_1+\sum_{i=1}^{n}a_i(x_{i+1},y_{i+1})\cdot\prod_{j=1}^{i}(x_1-x_j)=y_1+0=y_1$ 。

(2) $f(x_2)=y_1+a_1(x_2,y_2)\cdot(x_2-x_1)+\sum_{i=2}^{n}a_i(x_{i+1},y_{i+1})\cdot\prod_{j=1}^{i}(x_2-x_j)$

$=y_1+a_1(x_2,y_2)\cdot(x_2-x_1)+0$

$=y_1+(\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1})\cdot(x_2-x_1)=y_1+(y_2-y_1)=y_2$ 。

(3) $f(x_{k+1})=y_1+\sum_{i=1}^{k}a_i(x_{i+1},y_{i+1})\cdot\prod_{j=1}^{i}(x_{k+1}-x_j)+0$

$=y_1+\sum_{i=1}^{k}a_i(x_{i+1},y_{i+1})\cdot\prod_{j=1}^{i}(x_{k+1}-x_j)$，$2\le k\le n$，

又當 $2\le i\le n,\ i\le k\le n$ 時，

$\because a_i(x_{k+1},y_{k+1})=\dfrac{a_{i-1}(x_{k+1},y_{k+1})-a_{i-1}(x_i,y_i)}{x_{k+1}-x_i}$，

$\therefore a_i(x_{k+1},y_{k+1})(x_{k+1}-x_i)-a_{i-1}(x_{k+1},y_{k+1})+a_{i-1}(x_i,y_i)=0$

$\Rightarrow [a_i(x_{k+1},y_{k+1})(x_{k+1}-x_i)-a_{i-1}(x_{k+1},y_{k+1})+a_{i-1}(x_i,y_i)]\cdot\prod_{j=1}^{i-1}(x_{k+1}-x_j)=0$

$\Rightarrow \sum_{i=2}^{k}[a_i(x_{k+1},y_{k+1})(x_{k+1}-x_i)-a_{i-1}(x_{k+1},y_{k+1})+a_{i-1}(x_i,y_i)]\cdot\prod_{j=1}^{i-1}(x_{k+1}-x_j)=0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}a_i(x_{i+1},y_{i+1})\cdot\prod_{j=1}^{i}(x_{k+1}-x_j)-a_1(x_{k+1},y_{k+1})\cdot(x_{k+1}-x_1)=0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i(x_{i+1}, y_{i+1}) \cdot \prod_{j=1}^{i}(x_{k+1}-x_j)-(y_{k+1}-y_1)=0$$

$$\Rightarrow y_1+\sum_{i=1}^{k} a_i(x_{i+1}, y_{i+1}) \cdot \prod_{j=1}^{i}(x_{k+1}-x_j)=y_{k+1} \text{，}$$

因此 $f(x_{k+1})=y_1+\sum_{i=1}^{k} a_i(x_{i+1}, y_{i+1}) \cdot \prod_{j=1}^{i}(x_{k+1}-x_j)=y_{k+1}$, $2 \le k \le n$ 。

(4) $\deg f(x) \le n$ 。

(5)由(1)到(4)的論述，

所求 $f(x)=y_1+\sum_{i=1}^{n} a_i(x_{i+1}, y_{i+1}) \cdot \prod_{j=1}^{i}(x-x_j)$ ，

其中 $a_1(x_{k+1}, y_{k+1})=\dfrac{y_{k+1}-y_1}{x_{k+1}-x_1}$, $1 \le k \le n$ ，

$$a_i(x_{k+1}, y_{k+1})=\frac{a_{i-1}(x_{k+1}, y_{k+1})-a_{i-1}(x_i, y_i)}{x_{k+1}-x_i},\ 2 \le i \le n,\ i \le k \le n \text{ 。}$$

8. 應用：

(1)已知 $y=f(x)$ 為至多三次牛頓插值多項式且滿足 $(x_1, y_1)=(1,-3)$, $(x_2, y_2)=(2,13)$, $(x_3, y_3)=(3,57)$, $(x_4, y_4)=(4,147)$ ，求 $f(x)$ 為何？

①牛頓解法： $f(x)=y_1+\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+\left(\dfrac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}\right)\cdot(x-x_2)(x-x_1)$

$$+\left(\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}}{x_4-x_1}\right)\cdot(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1) \text{，}$$

$$f(x)=(-3)+\left[\frac{13-(-3)}{2-1}\right]\cdot(x-1)+\left[\frac{\dfrac{57-13}{3-2}-\dfrac{13-(-3)}{2-1}}{3-1}\right]\cdot(x-2)(x-1)$$

$$+\left[\frac{\dfrac{\dfrac{147-57}{4-3}-\dfrac{57-13}{3-2}}{4-2}-\dfrac{\dfrac{57-13}{3-2}-\dfrac{13-(-3)}{2-1}}{3-1}}{4-1}\right]\cdot(x-3)(x-2)(x-1)$$

$$=(-3)+\left(\frac{16}{1}\right)\cdot(x-1)+\left(\frac{\dfrac{44}{1}-\dfrac{16}{1}}{2}\right)\cdot(x-2)(x-1)$$

$$+\left(\frac{\dfrac{\dfrac{90}{1}-\dfrac{44}{1}}{2}-\dfrac{\dfrac{44}{1}-\dfrac{16}{1}}{2}}{3}\right)\cdot(x-3)(x-2)(x-1)$$

$$=(-3)+16(x-1)+14(x-2)(x-1)+3(x-3)(x-2)(x-1) \text{ 。}$$

②直觀解法：$f(x)=y_1+\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+\left(\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right)\cdot(x-x_2)(x-x_1)$

$$+\left(\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}\right)\cdot(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$ ，

$$f(x)=(-3)+\left[\frac{13-(-3)}{2-1}\right]\cdot(x-1)+\left[\frac{\dfrac{57-(-3)}{3-1}-\dfrac{13-(-3)}{2-1}}{3-2}\right]\cdot(x-2)(x-1)$$

$$+\left[\frac{\dfrac{\dfrac{147-(-3)}{4-1}-\dfrac{13-(-3)}{2-1}}{4-2}-\dfrac{\dfrac{57-(-3)}{3-1}-\dfrac{13-(-3)}{2-1}}{3-2}}{4-3}\right]\cdot(x-3)(x-2)(x-1)$$ ，

$$f(x)=(-3)+\left(\frac{16}{1}\right)\cdot(x-1)+\left(\frac{\dfrac{60}{2}-\dfrac{16}{1}}{1}\right)\cdot(x-2)(x-1)$$

$$+\left(\frac{\dfrac{\dfrac{150}{3}-\dfrac{16}{1}}{2}-\dfrac{\dfrac{60}{2}-\dfrac{16}{1}}{1}}{1}\right)\cdot(x-3)(x-2)(x-1)$$

$$=(-3)+16(x-1)+14(x-2)(x-1)+3(x-3)(x-2)(x-1)$$ 。

(2)已知 $f(x)$ 為五次多項式且 $(x_1,y_1)=(1,-3)$，$(x_2,y_2)=(2,13)$，$(x_3,y_3)=(3,57)$，$(x_4,y_4)=(4,147)$，$(x_5,y_5)=(5,445)$，$(x_6,y_6)=(6,777)$，求 $f(x)$ 五次牛頓插值多項式為何？

解法：

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	–3	13	57	147	445	777
$a_1(x_i,y_i)$		16	30	50	112	156
$a_2(x_i,y_i)$			14	17	32	35
$a_3(x_i,y_i)$				3	9	7
$a_4(x_i,y_i)$					6	2
$a_5(x_i,y_i)$						–4

由過相異 $n+1$ 點的直觀插值公式解法：

$f(x)=y_1+\sum_{i=1}^{n}a_i(x_{i+1},y_{i+1})\cdot\prod_{j=1}^{i}(x-x_j)$ ，

其中 $a_1(x_{k+1}, y_{k+1}) = \dfrac{y_{k+1} - y_1}{x_{k+1} - x_1}$，$1 \le k \le n$ ，

$$a_i(x_{k+1}, y_{k+1}) = \frac{a_{i-1}(x_{k+1}, y_{k+1}) - a_{i-1}(x_i, y_i)}{x_{k+1} - x_i},\ 2 \le i \le n,\ i \le k \le n$$ 。

得知：
$$\begin{aligned} f(x) &= y_1 + \sum_{i=1}^{5} a_i(x_{i+1}, y_{i+1}) \cdot \prod_{j=1}^{i}(x - x_j) \\ &= (-3) + 16(x-1) + 14(x-1)(x-2) + 3(x-1)(x-2)(x-3) \\ &\quad +6(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + (-4)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \end{aligned}$$ ，

即為所求的五次牛頓插值多項式。

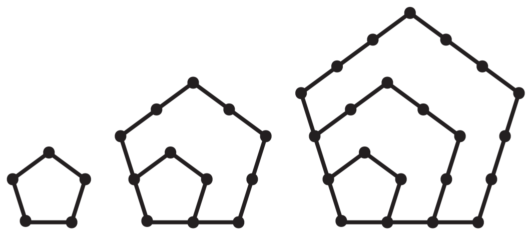
專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 129

☆☆☆☆☆

據說，畢達哥拉斯研究過這樣的問題：下圖中的黑點分別落在正五邊形的頂點或邊上，第 1 圖有 5 個黑點，第 2 圖共有 12 個黑點，第 3 圖則有 22 個黑點。



第 1 圖　　第 2 圖　　第 3 圖

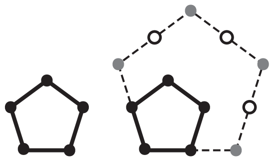
按照這樣的規律，令 a_n 為第 n 圖上的黑點總數，這樣形成的數列 $\langle a_n \rangle$ 就是畢達哥拉斯曾經研究過的五邊形數列。

試求一般項 a_n 的公式（以 n 表示）。

〔玩鎖・玩索〕

關於五邊形數列 $\langle a_n \rangle$ 的研究，首先要找出相鄰項 a_n 與 a_{n-1} 之間的遞迴關係式。在下圖中，將第 1 圖與第 2 圖塗色之後進行比較，我們發現：a_2 比 a_1 多出 4 個灰點與 3×1 個白點，即

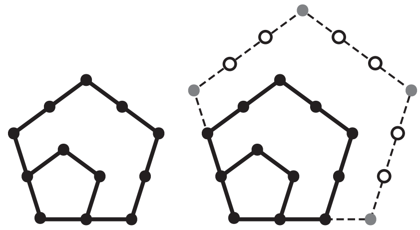
$$a_2 = a_1 + 4 + 3\times1 \text{ 。}$$



第 1 圖　　第 2 圖

在下圖中，將第 2 圖與第 3 圖塗色之後進行比較，又發現：a_3 比 a_2 多出 4 個灰點與 3×2 個白點，即

$$a_3 = a_2 + 4 + 3\times2 \text{ 。}$$



第 2 圖　　第 3 圖

採取同樣塗色的方法，可以發現 a_n 比 a_{n-1} 多出 4 個灰點與 $3\times(n-1)$ 個白點，也就是說

$$a_n = a_{n-1} + 4 + 3\times(n-1) \text{ 。}$$

因此，數列 $\langle a_n \rangle$ 中相鄰兩項 a_n 與 a_{n-1} 的遞迴關係式為

$$a_n = a_{n-1} + 3n + 1 \text{ ， } n \ge 2 \text{ 。}$$

有了數列的前後項之遞迴關係式後，借用這個關係式及前幾項的數據，我們可以進一步求出此數列的一般項 a_n。這牽涉到一個很重要的技巧，在看詳細解答之前，想想看吧！

遊戲 130

☆☆☆☆

設 a, b, c 為三正數，證明

$(1+a)(1+b)(1+c) \ge (1+\sqrt[3]{abc})^3$ 。

提示：利用算幾不等式。

〔玩鎖・玩索〕

遇到 $\sqrt[3]{abc}$ 之類的項，我們會聯想到算幾不等式。事實上，成大申請入學考過比這還複雜的題目：設 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 皆為正數。

試證明：

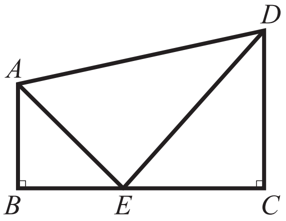
$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)(1+a_5)$$

$$\ge (1+\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5})^5 \text{ 。}$$

遊戲 131

☆☆☆

如下圖所示，梯形 $ABCD$ 的邊長 $\overline{AB}=a$，$\overline{BE}=b$，$\overline{CE}=c$，$\overline{CD}=d$：



(1)用簡單的數學語言說明

三角形 ADE 的面積$\leq \dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{2}$。

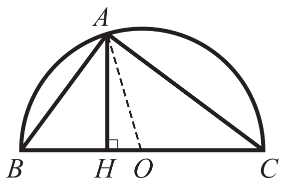
(2)將三角形 ADE 的面積以 a, b, c, d 表示。

(3)（柯西不等式）證明

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$。

〔玩鎖・玩索〕

在高中的數學課程裡有兩個很重要的不等式證明，一個是算幾不等式，另一個是柯西不等式，而算幾不等式 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 有一個漂亮的無字證明：



畫直徑 $a+b$ 的半圓，在直徑 $\overline{BC}$ 上取一點 H 使得

$$\overline{BH}=a,\ \overline{CH}=b。$$

過 H 畫鉛直線 HA 與半圓交於 A 點。此時，$\angle A=90°$，$\overline{AH}=\sqrt{ab}$，而 $\overline{AO}=\dfrac{a+b}{2}$（半徑）。顯然有

$$\frac{a+b}{2}=\overline{AO}\geq\overline{AH}=\sqrt{ab}\ 。$$

這裡的題目則是有關柯西不等式的無字證明，他是出自嘉義高中退休的黃傳紘老師的靈感。

遊戲 132

☆☆☆☆☆

數字

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, …，是前 13 個質數，為了解質數的分布，數學家經常用函數 $\pi(n)$ 來表示「小於或等於 n 的質數總數」，例如，不超過 6 的質數有 2, 3, 5 等三個，即 $\pi(6)=3$；又大家都知道小於 100 的質數有 25 個，即 $\pi(100)=25$。從這兩個值，得知

$$\frac{6}{\pi(6)}=2,\ \frac{100}{\pi(100)}=4\ 。$$

在這裡我們將探討一些有關分數 $\dfrac{n}{\pi(n)}$（有時是正整數）的性質。

(1)根據前面的質數表，求 $\pi(27)$ 及 $\dfrac{27}{\pi(27)}$ 的值。

(2)找一個不等於 100 的正整數 n，使得

$$\frac{n}{\pi(n)}=4$$

成立。

(3)已知 $\pi(1008)=168$，即

$$\frac{1008}{\pi(1008)}=\frac{1008}{168}=6\ ，$$

利用 $\dfrac{100}{\pi(100)}=4$ 及 $\dfrac{1008}{\pi(1008)}=6$ 證明：會有一個介於 100 與 1008 之間的正整數 n，使得

$$\frac{n}{\pi(n)}=5$$

成立。

〔玩鎖・玩索〕

有關函數 $\dfrac{n}{\pi(n)}$，除了

$$\frac{4}{\pi(4)}=\frac{6}{\pi(6)}=2,\ \frac{27}{\pi(27)}=3,\ \frac{100}{\pi(100)}=4$$

是正整數之外，還有如下三個例子：

$$\frac{3080}{\pi(3080)}=7,\ \frac{8472}{\pi(8472)}=8,$$

$$\frac{64540}{\pi(64540)}=10,\cdots。$$

關於(3)的證明，我們利用反證法，並引導如下：

假設介於 100 與 1008 之間的正整數 n 都讓分數 $\frac{n}{\pi(n)}\neq 5$ ，也就是說，分數

$\frac{100}{\pi(100)}=4$ ， $\frac{101}{\pi(101)}$ ， $\frac{102}{\pi(102)}$ ，$\cdots$， $\frac{k}{\pi(k)}$ ，

$\frac{k+1}{\pi(k+1)}$，$\cdots$， $\frac{1008}{\pi(1008)}=6$ 不是小於 5，就是大於 5。令 $\frac{k+1}{\pi(k+1)}$ 是上述數列從左邊數來第一個大於 5 的分數，即

$$\frac{k}{\pi(k)}<5<\frac{k+1}{\pi(k+1)}\ 。$$

推得 $k<5\pi(k)$ 及 $5\pi(k+1)<k+1$。再比較 $\pi(k)$ 與 $\pi(k+1)$ 的大小，得到矛盾。

有關質數函數 $\pi(n)$ 最有名的結果莫過於

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi(n)}=\infty\ ，$$

也就是說，當 n 很大時，分數 $\frac{n}{\pi(n)}$ 也會是很大的。

動手玩數學~破解祕笈 第32期

遊戲 125

利用 $a=bq+r \Rightarrow (a,b)=(b,r)$，

知道：任何時候，甲、乙堆方糖數的最大公因數都與 (a,b) 相等，又最後有一堆的方糖數為 0（根據規則(2)，必定是乙堆被拿光），所以甲堆有 (a,b) 顆方糖，乙堆有 0 顆方糖，而丙堆有 $a+b-(a,b)$ 顆方糖。

遊戲 126

(1) 因為 $s=\dfrac{9+(x+7)+(x+14)}{2}=x+15$，所以

由海龍公式得三角形面積

$36=\sqrt{(x+15)((x+15)-9)((x+15)-(x+7))((x+15)-(x+14))}$ 。

兩邊平方，得

$36^2=8(x+15)(x+6)\Rightarrow x^2+21x-72=0$ 。

解得 $x=3$ 或 -24（不合），因此 $x=3$。

(2) 由(1)知道三角形的三邊邊長為 9, 10, 17，令邊長 9 與 10 兩邊之夾角為 θ。

利用面積公式

$\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 10\cdot \sin\theta=36\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{4}{5}$ 。

利用正弦定理，得

$\dfrac{17}{\sin\theta}=2R\Rightarrow 2R=\dfrac{17}{\frac{4}{5}}=\dfrac{85}{4}$，

故三角形的外接圓半徑為 $\dfrac{85}{8}$ 。

遊戲 127

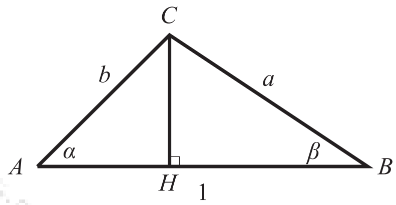
設三角形 ABC 外接圓半徑為 R。

(1) 利用正弦定理得

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{1}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))}=2R \text{ 。}$$

因為 $\sin(\pi-(\alpha+\beta))=\sin(\alpha+\beta)$，所以證得 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\alpha}{a}=\dfrac{\sin\beta}{b}$ 。

(2) 畫 C 至邊 $\overline{AB}$ 的垂直線，如下圖所示：



因為 $\overline{AB}=1$，所以

$1=\overline{AB}=\overline{BH}+\overline{AH}=a\cos\beta+b\cos\alpha$ 。

(3) 將等式 $1=a\cos\beta+b\cos\alpha$

兩邊同乘以 $\sin(\alpha+\beta)$，得

$\sin(\alpha+\beta)$

$=(a\sin(\alpha+\beta))\cos\beta+(b\sin(\alpha+\beta))\cos\alpha$ 。

利用 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\alpha}{a}=\dfrac{\sin\beta}{b}$，得

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ 。

遊戲 128

矩陣乘積 AB 的第 $(1,1)$ 元為

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\Delta \text{，}$$

同樣的方式，可得第 $(2,2)$ 元及第 $(3,3)$ 元也都是 Δ。

矩陣乘積 AB 的第 $(1,2)$ 元為

$$b_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0 \text{（前兩列相等），}$$

同樣的方式，可得其他元也都是 0。

結合前述結果，矩陣乘積 AB 為

$$AB=\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} \text{ 。}$$