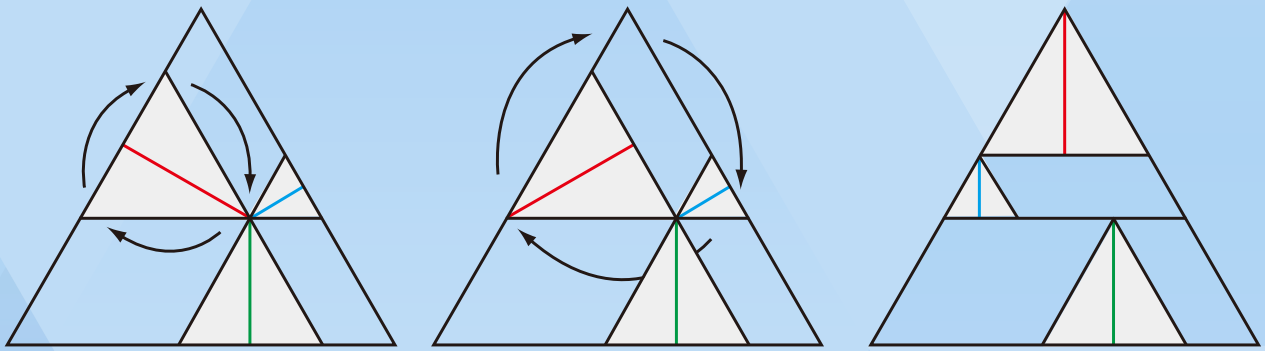
龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第31刊



55201N
A　#1

贈品禁止轉售

龍騰文化

編輯室墨記

在〈畢達哥拉斯好奇〉中，許志農教授提及魯米斯在沃特豪斯這位紐約市工程師的筆記中找到的圖形，整個圖形相當有美感，圖形之間隱含了許多事實與關係，而且都可使用中學生能理解的方式來證明。在複雜的圖形的背後，有時是由許多簡單的關係所構成。

在李維昌老師的〈過相異四點至多三次牛頓插值多項式的公式解法〉中，將介紹過相異四點至多三次牛頓插值多項式也可以使用公式解法。而在林政逸老師的〈利用「行列式」因式分解「乘法公式」〉中，則是介紹了利用行列式的運算與性質，可將乘法公式作因式分解。在此提供讀者不一樣的解題思維。

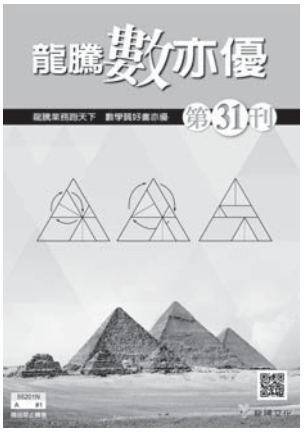
Excel的功能很多，沒想到居然能利用它來解三元一次聯立方程式，一起來看看鍾國華老師的〈利用Excel求三元一次聯立方程式〉如何做到的吧！

費馬點與拿破崙定理之間有何關聯？來看看吳孝仁老師、吳育藝老師的〈課本例題看費馬點與拿破崙定理的連結〉。

醫師在拯救病人生命的同時，也伴隨著可能被感染的風險，在條件有限的情況下，三位醫師要如何使用僅剩的二副手套呢？翻開動手玩數學，跟著許教授一起來解密吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的內容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 kilro_pan@lungteng.com.tw。



發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
執行編輯：潘善興
美術編輯：林佳瑩

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248新北市五股區五工六路30號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2298-9755
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2016/11/7
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2016.11 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

許志農 臺灣師大數學系 3

》》 畢達哥拉斯好奇

李維昌 國立宜蘭高中 16

》》 過相異四點至多三次牛頓插值多項式的公式解法

林政逸 高雄市立三民家商 24

》》 利用「行列式」因式分解「乘法公式」

鍾國華 臺北市協和祐德高中退休教師 28

》》 利用 Excel 求三元一次聯立方程式

吳孝仁、吳育藝 38

》》 課本例題看費馬點與拿破崙定理的連結

許志農 臺灣師大數學系 44

》》 動手玩數學專欄

》》 動手玩數學《第 30 期》破解祕笈

畢達哥拉斯好奇

許志農／臺灣師大數學系

一、前言》

魯米斯在沃特豪斯（John Waterhouse）這位紐約市工程師的筆記中，找到了這個圖形，它出現在 1899 年 7 月的紐約報紙上。

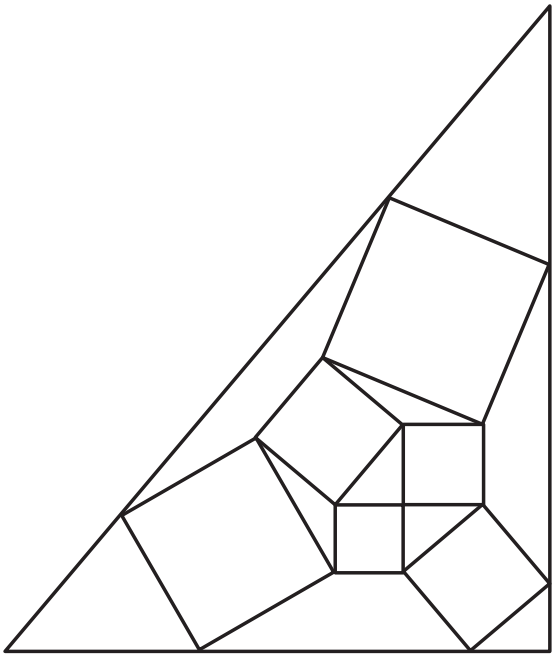


圖 畢達哥拉斯好奇

魯米斯在《勾股定理》這本書中稱它為「畢達哥拉斯好奇」（The pythagorean curiosity），並且根據這個圖形提出了八個可論證的事實，而且指出讀者也許還可以發現更多有趣的性質。以下針對魯米斯提出的八個可論證事實，將《勾股定理》這本書中提供的證明進行增補。

二、作圖》

1. 在直角△ABC 中，分別以 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 為邊長向外作正方形 $ABIH$、正方形 $ACDE$ 和正方形 $BCNM$。
2. 連 $\overline{EH}$，$\overline{IM}$，$\overline{ND}$，並分別以 $\overline{EH}$，$\overline{IM}$，$\overline{ND}$ 為邊長向外作正方形 $EHGF$、正方形 $IMLK$ 和正方形 $NDPO$。
3. 作 $\overline{PF}$，$\overline{GK}$，$\overline{LO}$，則 $\overline{PF}$ 與 $\overline{GK}$ 交於 A' 點，$\overline{GK}$ 與 $\overline{LO}$ 交於 B' 點，$\overline{LO}$ 與 $\overline{PF}$ 交於 C' 點。

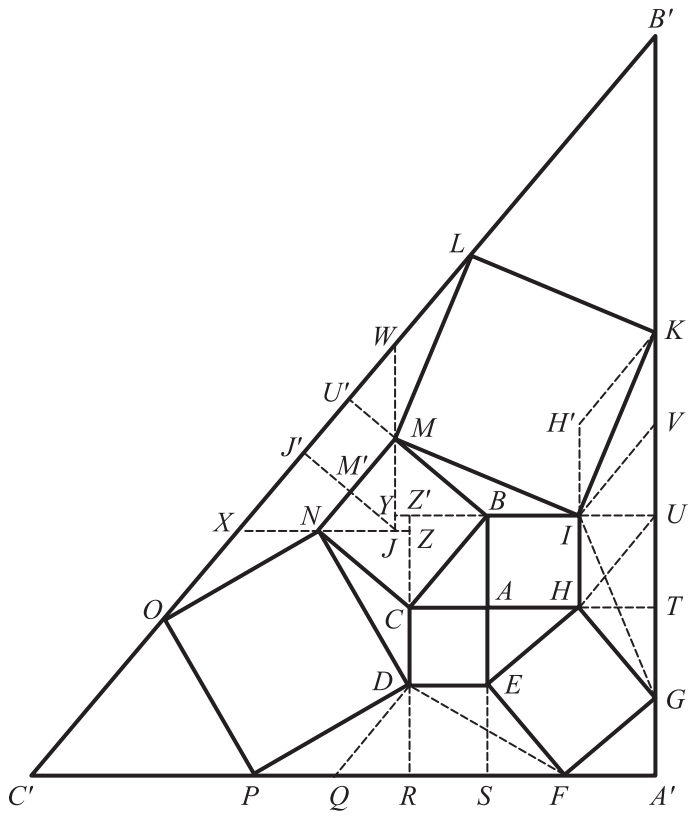
4. 過 M 點作垂直 $\overleftrightarrow{BI}$ 的直線，交 $\overleftrightarrow{BI}$ 於 Y 點。過 N 點作垂直 $\overleftrightarrow{CD}$ 的直線，交 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 Z 點。$\overleftrightarrow{MY}$ 與 $\overleftrightarrow{NZ}$ 交於 J 點，$\overleftrightarrow{BY}$ 與 $\overleftrightarrow{CZ}$ 交於 Z' 點。

5. 在 $\overleftrightarrow{HI}$ 上取一點 H'，使得 $\overline{IH'} = \overline{IH}$，連 $\overline{H'K}$。

6. 過 H 點作垂直 $\overleftrightarrow{GK}$ 的直線，交 $\overleftrightarrow{GK}$ 於 T 點。過 I 點作垂直 $\overleftrightarrow{GK}$ 的直線，交 $\overleftrightarrow{GK}$ 於 U 點，取 V 點為 $\overline{UK}$ 的中點，連 $\overline{IV}$。連 $\overline{IG}$, $\overline{UH}$。

7. 過 D 點作垂直 $\overleftrightarrow{PF}$ 的直線，交 $\overleftrightarrow{PF}$ 於 R 點。過 E 點作垂直 $\overleftrightarrow{PF}$ 的直線，交 $\overleftrightarrow{PF}$ 於 S 點，取 Q 點為 $\overline{PR}$ 的中點，連 $\overline{DQ}$, $\overline{DF}$。

8. 過 B 點作垂直 $\overleftrightarrow{LO}$ 的直線，交 $\overleftrightarrow{LO}$ 於 U' 點。過 J 點作垂直 $\overleftrightarrow{LO}$ 的直線，交 $\overleftrightarrow{LO}$ 於 J' 點，交 $\overline{MN}$ 於 M' 點。

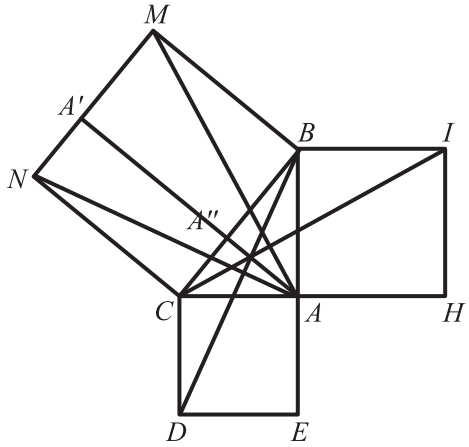


三、可論證的事實》

1. 正方形 $BCNM$ 面積=正方形 $ABIH$ 面積+正方形 $ACDE$ 面積。

證明：根據歐幾里得《幾何原本》第一卷第 47 個命題可證得，證明如下：

如下圖，過 A 點作垂直 $\overline{MN}$ 的直線，交 $\overline{MN}$ 於 A' 點，交 $\overline{BC}$ 於 A'' 點，連 $\overline{AM}$，$\overline{AN}$，$\overline{BD}$，$\overline{CI}$。



(1)證明三角形 MBA 和三角形 CBI 全等以及三角形 NCA 和三角形 BCD 全等：

因為 $\angle MBA = \angle MBC + \angle CBA = 90^\circ + \angle CBA = \angle IBA + \angle CBA = \angle CBI$，

$\overline{AB} = \overline{IB}$，$\overline{BM} = \overline{BC}$，所以

$\triangle MBA \cong \triangle CBI$（SAS 全等），

同理可證

$\triangle NCA \cong \triangle BCD$（SAS 全等）。

(2)證明正方形 $BCNM$ 面積=正方形 $ABIH$ 面積+正方形 $ACDE$ 面積：

正方形 $BCNM$ 面積=長方形 $BMA'A''$ 面積＋長方形 $CNA'A''$ 面積

=2△MBA 面積＋2△NCA 面積

=2△CBI 面積＋2△BCD 面積

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{IB} \times \overline{HI} + 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{DC} \times \overline{ED}$$

= 正方形 $ABIH$ 面積 ＋ 正方形 $ACDE$ 面積。

2. 三角形 HAE 面積=三角形 IBM 面積=三角形 DCN 面積=三角形 BAC 面積。

證明：在△HAE 與△BAC 中，

因為 $\overline{AE} = \overline{AC}$，$\overline{AH} = \overline{AB}$，$\angle EAH = 90^\circ = \angle CAB$，所以

$\triangle HAE \cong \triangle BAC$（SAS 全等），

可推得

三角形 HAE 面積=三角形 BAC 面積。

在△BYM 與△BAC 中，

因為 $\overline{BM}=\overline{BC}$，$\angle MBY=90°-\angle Z'BC=\angle CBA$，$\angle MYB=90°=\angle CAB$，

所以

△$BYM\cong$△BAC（AAS 全等），

即 $\overline{MY}=\overline{CA}$。同理可證

△$NZC\cong$△BAC（AAS 全等），

即 $\overline{NZ}=\overline{BA}$。因此

$$\text{三角形 } IBM \text{ 面積}=\frac{1}{2}\times\overline{BI}\times\overline{MY}$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{BA}\times\overline{CA}$$
$$=\text{ 三角形 } BAC \text{ 面積，}$$

且

$$\text{三角形 } DCN \text{ 面積}=\frac{1}{2}\times\overline{DC}\times\overline{NZ}$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times\overline{BA}$$
$$=\text{ 三角形 } BAC \text{ 面積，}$$

故

三角形 HAE 面積 ＝ 三角形 IBM 面積 ＝ 三角形 DCN 面積
＝ 三角形 BAC 面積。

3. $\overline{HI}$ 平行 $\overline{GK}$，$\overline{DE}$ 平行 $\overline{PF}$，$\overline{MN}$ 平行 $\overline{LO}$。

證明：因為△$HAE\cong$△BAC，所以 $\overline{HE}=\overline{BC}$，可推得 $\overline{HG}=\overline{HE}=\overline{BC}=\overline{BM}$，

又因為△$HAE\cong$△BAC，所以 $\angle EHA=\angle CBA$，可推得
$\angle IHG=360^\circ-90^\circ-90^\circ-\angle EHA=360^\circ-90^\circ-90^\circ-\angle CBA=\angle IBM$，

又 $\overline{HI}=\overline{BI}$，綜合以上可得

△$HGI\cong$△BMI（SAS 全等）。

△IHG 與△ $IH'K$ 中，因為△$HGI\cong$△BMI，所以 $\overline{IG}=\overline{IM}$，可推得

$\overline{IG}=\overline{IM}=\overline{IK}$，

又因為$\triangle HGI \cong \triangle BMI$，所以$\angle GIH = \angle MIB$，可推得

$$\angle GIH = \angle MIB = 90^\circ - \angle MIH' = \angle KIH'，$$

又$\overline{IH} = \overline{IH'}$，綜合以上可得

$$\triangle IHG \cong \triangle IH'K \text{（SAS 全等），}$$

即 G 點到$\overleftrightarrow{HH'}$的距離等於 K 點到$\overleftrightarrow{HH'}$的距離，

又 K 點和 G 點在$\overleftrightarrow{HH'}$的同一側，因此

$$\overline{HI} \text{ 平行 } \overline{GK}。$$

同理可證

$$\overline{DE} \text{ 平行 } \overline{PF} \text{ 和 } \overline{MN} \text{ 平行 } \overline{LO}。$$

故

$$\overline{HI} \text{ 平行 } \overline{GK}，\overline{DE} \text{ 平行 } \overline{PF}，\overline{MN} \text{ 平行 } \overline{LO}。$$

4. $\overline{GK} = 4\overline{HI}$，$\overline{PF} = 4\overline{DE}$，$\overline{LO} = 4\overline{MN}$。

證明：因為四邊形 $HIUT$ 為矩形，所以

$$\overline{TU} = \overline{HI}。$$

$\triangle GTH$ 與$\triangle HAE$ 中，因為

$\angle GHT = 90^\circ - \angle EHA = \angle HEA$，$\angle GTH = 90^\circ = \angle HAE$，$\overline{HG} = \overline{EH}$，

所以

$$\triangle GTH \cong \triangle HAE \text{（AAS 全等），}$$

即

$$\overline{GT} = \overline{HA} = \overline{HI}。$$

$\triangle IUK$ 與$\triangle IUG$ 中，

因為$\overline{IK} = \overline{IG}$，$\overline{IU} = \overline{IU}$（共用邊），$\angle IUK = 90^\circ = \angle IUG$，所以

$$\triangle IUK \cong \triangle IUG \text{（RHS 全等），}$$

即

$$\overline{UK} = \overline{UG} = \overline{GT} + \overline{TU} = 2\overline{HI},$$

因此

$$\overline{GK} = \overline{GT} + \overline{TU} + \overline{UK} = 4\overline{HI}。$$

同理可證

$\overline{PF}=4\overline{DE}$ 。

四邊形 $HH'KU$ 中，因為 $\overline{HH'}//\overline{UK}$ 且 $\overline{HH'}=2\overline{HI}=\overline{UK}$ ，所以

四邊形 $HH'KU$ 為平行四邊形，

即 $\overline{KH'}//\overline{UH}$ 。因為 $\triangle GTH\cong\triangle HAE$，所以 $\overline{HT}=\overline{EA}=\overline{AC}$ ，可推得

$\overline{IU}=\overline{HT}=\overline{AC}$ 。

因為 $\overline{BI}+\overline{IU}=\overline{AC}+\overline{AH}$ ，所以 $\overline{BU}=\overline{CH}$ ，又 $\overline{BU}//\overline{CH}$ ，可推得

四邊形 $BUHC$ 為平行四邊形，

即 $\overline{UH}//\overline{BC}$ ，又因為 $\overline{BC}//\overline{MN}//\overline{LW}$ ，所以 $\overline{KH'}//\overline{LW}$ ，

又 $\overline{KI}//\overline{LM}$ ，且 $\angle IKH'$ 與 $\angle MLW$ 皆為銳角，因此

$\angle IKH'=\angle MLW$ 。

因為 $\overline{KI}//\overline{LM}$, $\overline{H'I}//\overline{WM}$ ，且 $\angle KIH'$ 與 $\angle LMW$ 皆為銳角，所以

$\angle KIH'=\angle LMW$,

又 $\overline{KI}=\overline{LM}$ ，可推得

$\triangle LWM\cong\triangle KH'I$ （ASA 全等），

即 $\overline{LW}=\overline{KH'}$ ，可推得

$\overline{LW}=\overline{KH'}=\overline{HG}=\overline{HE}=\overline{BC}=\overline{MN}$ 。

$\triangle ESF$ 與 $\triangle BAC$ 中，

因為 $\overline{SF}=\overline{DE}=\overline{AC}$, $\overline{EF}=\overline{HE}=\overline{BC}$, $\angle ESF=90^\circ=\angle BAC$ ，所以

$\triangle ESF\cong\triangle BAC$（RHS 全等），

又 $\triangle DRQ$ 與 $\triangle ESF$ 中，

因為 $\overline{DR}=\overline{ES}$, $\overline{RQ}=\overline{DE}=\overline{SF}$, $\angle DRQ=90^\circ=\angle ESF$ ，所以

$\triangle DRQ\cong\triangle ESF$（SAS 全等），

可推得

$\triangle DRQ\cong\triangle BAC$。

因為$\triangle DRQ \cong \triangle BAC$，所以$\overline{DQ} // \overline{BC}$，又$\overline{BC} // \overline{MN} // \overline{XO}$，

可推得$\overline{DQ} // \overline{XO}$，又$\overline{DP} // \overline{ON}$且$\angle QDP$與$\angle XON$皆為銳角，可推得

$\angle QDP = \angle XON$,

又$\overline{PQ} // \overline{NX}$, $\overline{PD} // \overline{NO}$，且$\angle QPD$與$\angle XNO$皆為銳角，可推得

$\angle QPD = \angle XNO$,

又$\overline{PD} = \overline{NO}$，因此

$\triangle QPD \cong \triangle XNO$（ASA 全等），

即$\overline{OX} = \overline{DQ}$。

因為$\triangle DRQ \cong \triangle BAC$，所以$\overline{DQ} = \overline{BC}$，又$\overline{BC} = \overline{MN}$，可推得

$\overline{OX} = \overline{MN}$。

$\triangle MJN$與$\triangle BYM$中，

因為$\angle NMJ = 90^\circ - \angle BMY = \angle MBY$,$\angle MJN = 90^\circ = \angle BYM$, $\overline{MN} = \overline{BM}$，

所以

$\triangle MJN \cong \triangle BYM$（AAS 全等），

又$\triangle BYM \cong \triangle BAC$，可推得

$\triangle MJN \cong \triangle BAC$，

即$\overline{MJ} = \overline{BA}$，又因為$\triangle LWM \cong \triangle KH'I$，所以$\overline{WM} = \overline{H'I}$，可推得

$\overline{WM} = \overline{H'I} = \overline{IH} = \overline{BA}$，因此

M為$\overline{JW}$的中點。

在$\triangle JWX$中，因為M為$\overline{JW}$的中點且$\overline{MN} // \overline{WX}$，所以

$\overline{WX} = 2\overline{MN}$。

故

$\overline{LO} = \overline{LW} + \overline{WX} + \overline{XO} = \overline{MN} + 2\overline{MN} + \overline{MN} = 4\overline{MN}$。

5. 梯形 $HIKG$ 面積 ＝ 梯形 $DEFP$ 面積 ＝ 梯形 $MNOL$ 面積 $=5\triangle BAC$ 面積。

證明：由第 4 點的證明知$\triangle GTH\cong\triangle HAE$，

又由第 2 點的證明知$\triangle HAE\cong\triangle BAC$，可推得

$\triangle GTH\cong\triangle BAC$，

即

$\triangle GTH$ 面積 ＝ $\triangle BAC$ 面積。

因為$\triangle GTH\cong\triangle BAC$，所以$\overline{HT}=\overline{CA}$，可推得

矩形 $IUTH$ 面積$=\overline{IU}\times\overline{UT}$

$=\overline{HT}\times\overline{IH}$

$=\overline{CA}\times\overline{BA}$

$=2\triangle BAC$ 面積。

且

$\triangle IUG$ 面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{IU}\times\overline{UG}$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{HT}\times2\overline{HI}$

$=\overline{CA}\times\overline{AB}$

$=2\triangle BAC$ 面積。

由第 4 點的證明知$\triangle IUK\cong\triangle IUG$，可知

$\triangle IUK$ 面積 ＝ $\triangle IUG$ 面積

$=2\triangle BAC$ 面積。

因此

梯形 $HIKG$ 面積 ＝ $\triangle GTH$ 面積 ＋ 矩形 $IUTH$ 面積 ＋ $\triangle IUK$ 面積

＝ $\triangle BAC$ 面積 $+2\triangle BAC$ 面積 $+2\triangle BAC$ 面積

$=5\triangle BAC$ 面積。

同理可證

梯形 $DEFP$ 面積＝$5\triangle BAC$ 面積。

在$\triangle JWX$ 中，由第 4 點的證明知 M 為$\overline{JW}$的中點且$\overline{MN}//\overline{WX}$,

$\triangle MJN\cong\triangle BAC$ 所以

$\triangle JWX$ 面積 $=4\triangle MJN$ 面積

$=4\triangle BAC$ 面積。

可推得

梯形 $MNXW$ 面積 ＝ $\triangle JWX$ 面積－$\triangle MJN$ 面積

$=3\triangle BAC$ 面積。

由第 4 點的證明知$\triangle LWM \cong \triangle KH'I$，可推得

$\triangle LWM$ 面積 = $\triangle KH'I$ 面積

$$= \frac{1}{2} \times \overline{IH'} \times \overline{IU}$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{IH} \times \overline{HT}$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{BA} \times \overline{CA}$$

$= \triangle BAC$ 面積。

由第 4 點的證明知$\triangle QPD \cong \triangle XNO$, $\triangle DRQ \cong \triangle BAC$，可推得

$\triangle XON$ 面積 = $\triangle QPD$ 面積

$$= \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{DR}$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{DR}$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{CA} \times \overline{BA}$$

$= \triangle BAC$ 面積。

故

梯形 $MNOL$ 面積 = 梯形 $MNXW$ 面積 + $\triangle LWM$ 面積+ $\triangle XON$ 面積

= 3$\triangle BAC$ 面積 + $\triangle BAC$ 面積 + $\triangle BAC$ 面積

= 5$\triangle BAC$ 面積。

6. 正方形 $MIKL$ 面積+正方形 $NDPO$ 面積=5 正方形 $EHGF$ 面積=5 正方形 $BCNM$ 面積。

證明：在$\triangle MYI$ 中，因為由第 1 點知直角三角形中，由兩股向外作的兩個正方形，其面積和等於斜邊向外作的正方形面積，所以

$$\overline{MY}^2 + \overline{YI}^2 = \overline{MI}^2 \text{ 。}$$

由第 2 點的證明知$\triangle BYM \cong \triangle BAC$，即$\overline{MY} = \overline{CA}$，可推得

$$\overline{MY}^2 = \overline{CA}^2 \text{ 。}$$

又因為$\triangle BYM \cong \triangle BAC$，所以$\overline{YB} = \overline{AB}$，又$\overline{BI} = \overline{AB}$，可推得

$$\overline{YI}^2 = (\overline{YB} + \overline{BI})^2 = (2\overline{AB})^2 = 4\overline{AB}^2 \text{ 。}$$

因此

$$\begin{aligned}\text{正方形}MIKL\text{面積} &= \overline{MI}^2\\ &= \overline{MY}^2+\overline{YI}^2\\ &= \overline{CA}^2+4\overline{AB}^2\text{。}\end{aligned}$$

在△NZC 與△BAC 中，因為由第 4 點的證明知△$MJN\cong$△BAC，
所以$\angle MNJ=\angle BCA$，可推得

$$\angle CNZ=90^\circ-\angle MNJ=90^\circ-\angle BCA=\angle CBA,$$

又$\angle NZC=90^\circ=\angle BAC$，$\overline{NC}=\overline{BC}$，可推得

△$NZC\cong$△BAC（AAS 全等），

即$\overline{NZ}=\overline{BA}$，$\overline{ZC}=\overline{AC}$。

在直角三角形 NZD 中，因為由第 1 點知由兩股向外作的兩個正方形，
其面積和等於斜邊向外作的正方形面積，所以

$$\overline{NZ}^2+\overline{ZD}^2=\overline{ND}^2,$$

可推得

$$\begin{aligned}\text{正方形}NDPO\text{面積} &= \overline{ND}^2\\ &= \overline{NZ}^2+\overline{ZD}^2\\ &= \overline{NZ}^2+(\overline{ZC}+\overline{CD})^2\\ &= \overline{BA}^2+(\overline{AC}+\overline{AC})^2\\ &= \overline{BA}^2+(2\overline{AC})^2\\ &= \overline{BA}^2+4\overline{AC}^2\text{。}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\text{正方形}MIKL\text{面積}+\text{正方形}NDPO\text{面積}\\ &=(\overline{CA}^2+4\overline{AB}^2)+(\overline{BA}^2+4\overline{AC}^2)\\ &=5(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)\\ &=5\overline{BC}^2\\ &=5\times\text{正方形}BCNM\text{面積，}\end{aligned}$$

又由第 2 點的證明知△$HAE\cong$△BAC，即$\overline{HE}=\overline{BC}$，可推得

$$\begin{aligned}\text{正方形 }EFGH\text{ 面積} &= \overline{HE}^2\\ &= \overline{BC}^2\\ &= \text{正方形 }BCNM\text{ 面積。}\end{aligned}$$

故

正方形 $MIKL$ 面積＋正方形 $NDPO$ 面積 $=5\times$正方形 $EFGH$ 面積

$=5\times$正方形 $BCNM$ 面積。

7. $\angle A'$ 的角平分線通過 A 點，但是 $\angle B'$ 的角平分線不通過 B 點，而且 $\angle C'$ 的角平分線也不通過 C 點。

證明：由第 2 點的證明知 $\triangle HAE\cong\triangle BAC$，即 $\overline{AH}=\overline{AB}$, $\overline{AE}=\overline{AC}$ 。

由第 4 點的證明知 $\triangle GTH\cong\triangle HAE$，即 $\overline{HT}=\overline{AE}=\overline{AC}$ ，

又由第 4 點的證明知 $\triangle ESF\cong\triangle BAC$，即

$\overline{ES}=\overline{BA}$ ，可推得

$$\begin{aligned}\overline{AT}&=\overline{AH}+\overline{HT}\\&=\overline{AB}+\overline{AC}\\&=\overline{ES}+\overline{AE}\\&=\overline{AS}。\end{aligned}$$

在 $\triangle B'A'C'$ 中，因為 $\overline{AT}=\overline{AS}$ ，所以 A 點到 $\overline{A'B'}$ 的距離等於 A 點到 $\overline{A'C'}$ 的距離，可推得 A 點在 $\angle A'$ 的角平分線上，即

$\angle A'$ 的角平分線通過 A 點。

要證明 $\angle B'$ 的角平分線不通過 B 點，我們使用反證法，假設 $\angle B'$ 的角平分線通過 B 點，即

$\overline{BU}=\overline{BU'}$ 。

因為 $\overline{HT}=\overline{AE}=\overline{AC}$ ，所以

$$\begin{aligned}\overline{BU}&=\overline{BI}+\overline{IU}\\&=\overline{AB}+\overline{HT}\\&=\overline{AB}+\overline{AC}。\end{aligned}$$

在 $\triangle JWX$ 中，由第 4 點的證明知 $\overline{JM'}:\overline{M'J'}=\overline{JM}:\overline{MW}=1:1$ ，可推得

$\overline{M'J'}=\overline{JM'}$,

因為由第 4 點的證明知 $\triangle MJN\cong\triangle BAC$，

所以 $\overline{JM}=\overline{AB}$, $\overline{JN}=\overline{AC}$, $\overline{MN}=\overline{BC}$ ，

又在直角 $\triangle MJN$ 中， $\overline{JM'}$ 為斜邊 $\overline{MN}$ 上的高，可推得

$$\overline{JM'} = \frac{\overline{JM} \times \overline{JN}}{\overline{MN}}$$
$$= \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{BC}}。$$

因此

$$\overline{BU'} = \overline{BM} + \overline{MU'}$$
$$= \overline{BC} + \overline{M'J'}$$
$$= \overline{BC} + \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{BC}}。$$

因為 $\overline{BU} = \overline{BU'}$，所以 $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} + \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{BC}}$ ，可推得

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} + \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{BC}}$$
$$\overline{AB} \times \overline{BC} + \overline{AC} \times \overline{BC} = \overline{BC}^2 + \overline{AB} \times \overline{AC}$$
$$\overline{BC}^2 - (\overline{AB} + \overline{AC}) \times \overline{BC} + \overline{AB} \times \overline{AC} = 0$$
$$(\overline{BC} - \overline{AB})(\overline{BC} - \overline{AC}) = 0$$
$$\overline{BC} = \overline{AB} \text{ 或 } \overline{BC} = \overline{AC},$$

但是 $\overline{BC}$ 為直角△BAC 的斜邊，不可能等於 $\overline{AB}$ 或 $\overline{AC}$ ，矛盾，因此

$$\overline{BU} \neq \overline{BU'} ,$$

即

$\angle B'$ 的角平分線不通過 B 點。

同理可證

$\angle C'$ 的角平分線不通過 C 點。

8. 以 $\overline{LO}$ 為邊長向外作的正方形面積等於以 $\overline{PF}$ 為邊長向外作的正方形面積加上以 $\overline{GK}$ 為邊長向外作的正方形面積。

證明：由第 4 點知 $\overline{GK} = 4\overline{HI}$，$\overline{PF} = 4\overline{DE}$，$\overline{LO} = 4\overline{MN}$ ，

又 $\overline{HI} = \overline{AB}$，$\overline{DE} = \overline{AC}$，$\overline{MN} = \overline{BC}$ ，

且由第 1 點知正方形 $BCNM$ 面積=正方形 $ABIH$ 面積+正方形 $ACDE$ 面積，

即 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ ，因此

$$
\begin{aligned}
\overline{LO}^2 &= (4\overline{MN})^2 \\
&= (4\overline{BC})^2 \\
&= 16\overline{BC}^2 \\
&= 16(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) \\
&= 16\overline{AB}^2 + 16\overline{AC}^2 \\
&= (4\overline{AB})^2 + (4\overline{AC})^2 \\
&= (4\overline{HI})^2 + (4\overline{DE})^2 \\
&= \overline{GK}^2 + \overline{PF}^2 \text{。}
\end{aligned}
$$

故

以 $\overline{LO}$ 為邊長向外作的正方形面積等於以 $\overline{PF}$ 為邊長向外作的正方形面積加上以 $\overline{GK}$ 為邊長向外作的正方形面積。

四、註與心得》

1. 來源：Casey, J.（1990）. *A Sequel to Euclid*（6th ed., p. 16）. London, England：Longmans, Green and Co。
2. 心得：整個圖形相當有美感，圖形之間隱含了許多事實與關係，而且都可以使用中學生能理解的方式來證明。圖中的大三角形 $A'B'C'$ 可以仿造三角形 ABC 的作法，作出更大的三角形以及對應的正方形與梯形，可以如此一直反覆下去。

過相異四點至多三次牛頓插值多項式的公式解法

李維昌／國立宜蘭高中

一、前言》

研究目的：我們都知道過相異四點至多三次拉格朗日插值多項式有公式解法，那麼過相異四點至多三次牛頓插值多項式是否也有公式解法？經由巧思，這個答案是肯定的。請看下文的論述：

二、本文》

(一)若已知 $f(x_i)=y_i, i=1,2,3,4$ ，且 x_1,x_2,x_3,x_4 互異，求至多三次牛頓插值多項式 $f(x)=$？

解：宣稱所求至多三次牛頓插值多項式

$$f(x)=\left[\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}\right](x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

$$+\left[\frac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x-x_2)(x-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x-x_1)+y_1$$

檢驗如下：

$$(1)\ f(x_1)=\left[\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}\right](x_1-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_1)$$

$$+\left[\frac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x_1-x_2)(x_1-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_1-x_1)+y_1$$

$$=0+0+0+y_1=y_1$$ 。

$$(2)\ f(x_2)=\left[\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}\right](x_2-x_3)(x_2-x_2)(x_2-x_1)$$

$$+\left[\frac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x_2-x_2)(x_2-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_2-x_1)+y_1$$

$$=0+0+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_2-x_1)+y_1=(y_2-y_1)+y_1=y_2\ 。$$

$$(3)\ f(x_3)=\left[\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}\right](x_3-x_3)(x_3-x_2)(x_3-x_1)$$

$$+\left[\frac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x_3-x_2)(x_3-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_3-x_1)+y_1$$

$$=0+\left[\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_3-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_3-x_1)+y_1$$

$$=(y_3-y_1)-\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_3-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_3-x_1)+y_1$$

$$=(y_3-y_1)+0+y_1=y_3\ 。$$

$$(4)\ f(x_4)=\left[\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}\right](x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)$$

$$+\left[\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x_4-x_2)(x_4-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_4-x_1)+y_1$$

$$=\left[\frac{\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x_4-x_2)(x_4-x_1)$$

$$+\left[\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x_4-x_2)(x_4-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_4-x_1)+y_1$$

$$=\left[\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_4-x_1)-\left[\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x_4-x_2)(x_4-x_1)$$

$$+\left[\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x_4-x_2)(x_4-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_4-x_1)+y_1$$

$$=\left[\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_4-x_1)+0+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_4-x_1)+y_1$$

$$=[y_4-y_1]-\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_4-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_4-x_1)+y_1$$

$$=[y_4-y_1]+0+y_1=y_4$$ 。

(5) $\deg f(x)\le 3$ 。

(6)由(1)到(5)的論述。

所求 $$f(x)=\left[\frac{\frac{\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}\right](x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

$$+\left[\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x-x_2)(x-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x-x_1)+y_1 \text{ 。}$$

(二)若已知 $f(x_i)=y_i, i=1,2,3$ ，且 x_1,x_2,x_3 互異，求至多二次牛頓插值多項式 $f(x)=$ ？

證明：宣稱所求至多二次牛頓插值多項式

$$f(x)=\left[\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x-x_2)(x-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x-x_1)+y_1 \text{ ，}$$

檢驗如下：

$$(1)\ f(x_1)=\left[\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x_1-x_2)(x_1-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_1-x_1)+y_1$$

$$=0+0+y_1=y_1 \text{ 。}$$

$$(2)\ f(x_2)=\left[\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x_2-x_2)(x_2-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_2-x_1)+y_1$$

$$=0+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_2-x_1)+y_1=(y_2-y_1)+y_1=y_2 \text{ 。}$$

$$(3)\ f(x_3)=\left[\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x_3-x_2)(x_3-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_3-x_1)+y_1$$

$$=\left[\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_3-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_3-x_1)+y_1$$

$$=(y_3-y_1)-\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_3-x_1)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_3-x_1)+y_1$$

$$=(y_3-y_1)+0+y_1=y_3 \text{ 。}$$

$(4)\ \deg f(x)\le 2$ 。

(5)由(1)到(4)的論述

所求 $f(x)=\left[\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x-x_2)(x-x_1)+\left[\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x-x_1)+y_1$ 。

三、結論》

(一)若已知 $f(x_i)=y_i, i=1,2,3,4$ ，且 x_1,x_2,x_3,x_4 互異，至多三次牛頓插值多項式

$$f(x)=\left[\dfrac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}\right](x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

$$+\left[\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x-x_2)(x-x_1)+\left[\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x-x_1)+y_1 \text{ 。}$$

(二)三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 且滿足 $f(x_i)=y_i, i=1,2,3,4$ ，其中 x_1,x_2,x_3,x_4 互異，由結論(一)的公式解法，此時

(1) $f(x)$ 的領導係數 $a=\dfrac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}$ 。

(2) $f(x)$ 的 x^2 項係數 $b=-a(x_1+x_2+x_3)+\left(\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right)$ 。

(三)若已知 $f(x_i)=y_i, i=1,2,3$ ，且 x_1,x_2,x_3 互異，至多二次牛頓插值多項式

$$f(x)=\left[\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right](x-x_2)(x-x_1)+\left[\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x-x_1)+y_1 \text{ 。}$$

(四)二次多項式 $f(x)=lx^2+mx+n$ 且滿足 $f(x_i)=y_i, i=1,2,3$ ，其中 x_1,x_2,x_3 互異，由結論(三)的公式解法，此時

(1) $f(x)$ 的領導係數 $l=\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}$ 。

(2) $f(x)$ 的 x 項係數 $m=-l\left(x_1+x_2\right)+\left(\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$ 。

範例 1：已知 $f(x)$ 為三次多項式且滿足 $f(1)=-3, f(2)=13, f(3)=57, f(4)=147$ ，求 $f(x)$ 三次牛頓插值多項式為何？

解： $x_1=1, y_1=-3, x_2=2, y_2=13, x_3=3, y_3=57, x_4=4, y_4=147$ ，又結論(一)

$$f(x)=\left[\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}\right]\left(x-x_3\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_1\right)$$

$$+\left[\frac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right]\left(x-x_2\right)\left(x-x_1\right)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]\left(x-x_1\right)+y_1$$ ，因此

$$f(x)=\left[\frac{\dfrac{\dfrac{147-(-3)}{4-1}-\dfrac{13-(-3)}{2-1}}{4-2}-\dfrac{\dfrac{57-(-3)}{3-1}-\dfrac{13-(-3)}{2-1}}{3-2}}{4-3}\right]\left(x-3\right)\left(x-2\right)\left(x-1\right)$$

$$+\left[\frac{\dfrac{57-(-3)}{3-1}-\dfrac{13-(-3)}{2-1}}{3-2}\right]\left(x-2\right)\left(x-1\right)+\left[\frac{13-(-3)}{2-1}\right]\left(x-1\right)+\left(-3\right)$$

$$=\left[\frac{\dfrac{\dfrac{150}{3}-\dfrac{16}{1}}{2}-\dfrac{\dfrac{60}{2}-\dfrac{16}{1}}{1}}{1}\right]\left(x-3\right)\left(x-2\right)\left(x-1\right)+\left[\frac{\dfrac{60}{2}-\dfrac{16}{1}}{1}\right]\left(x-2\right)\left(x-1\right)$$

$$+\left[\frac{16}{1}\right]\left(x-1\right)+\left(-3\right)$$

$$=3\left(x-3\right)\left(x-2\right)\left(x-1\right)+14\left(x-2\right)\left(x-1\right)+16\left(x-1\right)+\left(-3\right)$$ 。

範例 2：已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為三次多項式且滿足

$f(1)=-3,\ f(2)=13,\ f(3)=57,\ f(4)=147$ ，求

(1) a 之值=？

(2) b 之值=？

解：$x_1=1, y_1=-3, x_2=2, y_2=13, x_3=3, y_3=57, x_4=4, y_4=147$

又結論(二)(1)可得

$$a=\frac{\dfrac{\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_4-x_2}-\dfrac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}}{x_4-x_3}$$ ，因此

$$a=\frac{\dfrac{\dfrac{147-(-3)}{4-1}-\dfrac{13-(-3)}{2-1}}{4-2}-\dfrac{\dfrac{57-(-3)}{3-1}-\dfrac{13-(-3)}{2-1}}{3-2}}{4-3}$$

$$=\frac{\dfrac{\dfrac{150}{3}-\dfrac{16}{1}}{2}-\dfrac{\dfrac{60}{2}-\dfrac{16}{1}}{1}}{1}=17-14=3$$ 。

結論(二)(2)可得

$$b=-a\left(x_1+x_2+x_3\right)+\left(\frac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right)$$ ，因此

$$b=-(3)(1+2+3)+\frac{\dfrac{57-(-3)}{3-1}-\dfrac{13-(-3)}{2-1}}{3-2}=-18+\frac{\dfrac{60}{2}-\dfrac{16}{1}}{1}=-18+14=-4$$ 。

範例 3：已知 $f(x)$ 為二次多項式且滿足 $f(1)=-3, f(2)=13, f(3)=57$ ，求 $f(x)$ 二次牛頓插值多項式為何？

解：$x_1=1, y_1=-3, x_2=2, y_2=13, x_3=3, y_3=57$

又結論(三)

$$f(x)=\left[\frac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}\right]\left(x-x_2\right)\left(x-x_1\right)+\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]\left(x-x_1\right)+y_1$$ ，因此

$$f(x)=\left[\frac{\frac{57-(-3)}{3-1}-\frac{13-(-3)}{2-1}}{3-2}\right](x-2)(x-1)+\left[\frac{13-(-3)}{2-1}\right](x-1)+(-3)$$

$$=\left[\frac{\frac{60}{2}-\frac{16}{1}}{1}\right](x-2)(x-1)+\left[\frac{16}{1}\right](x-1)+(-3)$$

$$=14(x-2)(x-1)+16(x-1)+(-3)$$ 。

範例 4：已知 $f(x)=lx^2+mx+n$ 為二次多項式且滿足 $f(1)=-3,\ f(2)=13,\ f(3)=57$ ，求

(1) l 之值=？

(2) m 之值=？

解：$x_1=1, y_1=-3, x_2=2, y_2=13, x_3=3, y_3=57$

又結論(四)(1)可得

$$l=\frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_2}$$ ，因此

$$l=\frac{\frac{57-(-3)}{3-1}-\frac{13-(-3)}{2-1}}{3-2}=\frac{\frac{60}{2}-\frac{16}{1}}{1}=30-16=14$$ 。

結論(四)(2)可得

$$m=-l(x_1+x_2)+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$$ ，因此

$$m=-(14)(1+2)+\frac{13-(-3)}{2-1}$$

$$=-42+16=-26$$ 。

利用「行列式」因式分解「乘法公式」

林政逸／高雄市立三民家商

一、前言》

本文所要探討的內容是利用行列式的運算與性質，將中學常出現的乘法公式作因式分解，提供讀者另類的想法。

二、本文》

(一)行列式的運算與性質：

在最近的「高中數學電子報」第105期中，任教於北一女的陳建燁老師對於 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的因式分解提供了精闢的解法，這讓筆者聯想到其實這個式子也可以透過行列式的運算與性質，輕易的分解出來。以下先列出所需要用到的行列式運算與性質：

(a)二階與三階的行列式展開後之值：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \text{ ；}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \text{ 。}$$

(b)將某一列（行），乘以 k 倍加到另一列（行），其值不變：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 \end{vmatrix} \text{ ；}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2+ka_1 \\ b_1 & b_2+kb_1 \end{vmatrix} \text{ 。}$$

(c)任一列（行），可以提出同一個數：

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{ ；}$$

$$\begin{vmatrix} ka_1 & a_2 \\ kb_1 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{ 。}$$

(d)可依任一列（行），將原行列式拆成兩個行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & a_2 \\ b_1+c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} 。$$

【註：三階行列式依然保有上述(b)、(c)&(d)性質】

接著利用上述性質因式分解 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ：由性質(a)先將此式寫成

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$ （利用性質(b)分別將第二行、第三行之值加到第一行）

$$= \begin{vmatrix} x+y+z & y & z \\ x+y+z & x & y \\ x+y+z & z & x \end{vmatrix}$$ （利用性質(c)提出第一行的 $x+y+z$ ）

$$=(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & x & y \\ 1 & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$ 。

（利用性質(a)將後面的三階行列式展開）

上題利用行列式的運算與性質，很漂亮的分解出來。這讓筆者產生好奇心，是否也可用上述方式因式分解中學常出現的乘法公式？以下就讓我們來逐一嘗試與檢驗。

(二)利用「行列式」因式分解「乘法公式」

接著針對 1.平方差　2.立方差　3.和的完全平方　4.和的完全立方，這四大公式分別用行列式的運算與性質來分解，說明如下：

1. 因式分解 a^2-b^2（平方差）。

解： a^2-b^2（利用性質(a)）

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$$ （利用性質(b)將第二行之值加到第一行）

$$= \begin{vmatrix} a+b & b \\ b+a & a \end{vmatrix}$$ （利用性質(c)提出第一行的 $a+b$ ）

$=(a+b)\begin{vmatrix}1 & b\\ 1 & a\end{vmatrix}=(a+b)(a-b)$（利用性質(a)將後面的二階行列式展開）。

2. 因式分解a^3-b^3（立方差）。

解：a^3-b^3（利用性質(a)）

$=\begin{vmatrix}a^2 & b^2\\ b & a\end{vmatrix}$（利用性質(b)將第二行之值乘以$(-1)$加到第一行）

$=\begin{vmatrix}a^2-b^2 & b^2\\ b-a & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(a+b)(a-b) & b^2\\ -(a-b) & a\end{vmatrix}$（利用性質(c)提出第一行的$a-b$）

$=(a-b)\begin{vmatrix}a+b & b^2\\ -1 & a\end{vmatrix}=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。

（利用性質(a)將後面的二階行列式展開）

【註：利用上述技巧亦可導出立方和公式】

3. 因式分解$a^2+2ab+b^2$（和的完全平方）。

解：$a^2+2ab+b^2=(a^2+b^2)+2ab$（利用性質(a)分開寫成兩個行列式）

$=\begin{vmatrix}a & -b\\ b & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & -b\\ a & b\end{vmatrix}$（利用性質(d)，因為兩個行列式的第一列皆相同，可將第二列對應相加，合併成一個行列式）

$=\begin{vmatrix}a & -b\\ b+a & a+b\end{vmatrix}$（利用性質(c)提出第二列的$a+b$）

$=(a+b)\begin{vmatrix}a & -b\\ 1 & 1\end{vmatrix}$（利用性質(a)將後面的二階行列式展開）

$=(a+b)(a+b)=(a+b)^2$。

【註：利用上述技巧亦可導出差的完全平方公式】

4. 因式分解$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$（和的完全立方）。

解：$(a^3+3a^2b)+(3ab^2+b^3)$（利用性質(a)寫成行列式）

$=\begin{vmatrix}a^2 & -b^2\\ 3a+b & 3b+a\end{vmatrix}$（利用性質(b)將第二行之值加到第一行）

$=\begin{vmatrix}a^2-b^2 & -b^2\\ 4a+4b & 3b+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(a+b)(a-b) & -b^2\\ 4(a+b) & 3b+a\end{vmatrix}$（利用性質(c)提出第一行的$a+b$）

$$=(a+b)\begin{vmatrix}(a-b) & -b^2\\ 4 & 3b+a\end{vmatrix}$$（利用性質(b)將第一行之值乘以$(-b)$加到第二行）

$$=(a+b)\begin{vmatrix}(a-b) & -ab\\ 4 & a-b\end{vmatrix}=(a+b)[(a-b)^2+4ab]=(a+b)(a+b)^2=(a+b)^3$$ 。

（利用性質(a)將後面的二階行列式展開）

【註：利用上述技巧亦可導出差的完全立方公式】

三、結語》

經由這次嘗試後的心得感想是--要將$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$寫成可以因式分解的行列式比較困難，需做一些嘗試錯誤才能成功。而上述看似順暢的解法，其實背後也曾遇到一些阻礙，需想辦法逐一克服。雖然中學的乘法公式可以用面積分割方式推導出來，但筆者仍希望提供另一種見解供各位老師參考，也希望莘莘學子不妨利用空閒時練習一下：利用行列式推導乘法公式，這樣對行列式的運算與性質，必定會有更深刻的了解。

利用Excel求三元一次聯立方程式

鍾國華／臺北市協和祐德高中退休教師

一、前言》

高中數學第四冊第 2-3 節課本習題：「小明去歐洲旅行，他在法國每天的食、宿、保險費分別為 2500 元、2000 元、300 元；在德國每天的食、宿、保險費分別為 2200 元、2800 元、300 元；在西班牙每天的食、宿、保險費分別為 2000 元、2000 元、300 元；已知他在這三個國家總共的食、宿、保險費各花了 25100 元、24400 元、3300 元。請問他在法國、德國、西班牙分別停留幾天？」（註 1）

在解決許多實際問題時，通常我們會假設未知數，根據問題的限制條件，可以形成三元一次聯立方程式：

假設小明在法國、德國、西班牙分別停留 x 天、y 天、z 天，則

$$\begin{cases} 2500x+2200y+2000z=25100 \\ 2000x+2800y+2000z=24400 \\ 300x+300y+300z=3300 \end{cases}。$$

在空間坐標中，三元一次方程式的圖形是一個平面，要討論它的解，就相當於討論三個平面在空間中的相交情形。目前課本採用三階行列式來表示三元一次方程式的解（克拉瑪公式），並且用三階行列式來判別三平面的關係，部分學生在無限多組解與無解中，常常混淆無法判別三平面的關係。本文利用 Excel 函數提出不同解法與係數判別法，幫助學生理解三平面的關係。

二、本文》

(一)Excel 函數：恰有一組解的解法

將上述例題修改為：$\begin{cases} 25x+22y+20z=251 \\ 20x+28y+20z=244 \\ x+y+z=11 \end{cases}$

1. 克拉瑪公式：（課本第四冊 2-3 節）

(1)三元一次聯立方程式：$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 中，

令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$，

可得 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$，稱為克拉瑪公式。

(2)語法：行列式值：=MDETERM(array)

參數：array 是具有相等行列數的數值陣列或儲存格區域。

(3)在儲存格 B8 輸入公式Δ=MDETERM(B4:D6)，儲存格 D8 輸入Δ_x公式=MDETERM(E4:G6)，儲存格 F8 輸入Δ_y公式=MDETERM(H4:J6)，儲存格 H8 輸入Δ_z公式=MDETERM(K4:M6)；儲存格 B7 輸入 X 值公式=(D8)/(B8)，儲存格 C7 輸入 Y 值公式=(F8)/(B8)，儲存格 D7 輸入 Z 值公式=(H8)/(B8)，如表 2-1。執行結果如表 2-2，解答：$x=5$，$y=3$，$z=3$。

表 2-1 克拉瑪公式的設定

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	三元一次方程組：												
2	解1：克拉瑪公式(2-3節)												
3		x	y	z	d	y	z	x	d	z	x	y	d
4		25	22	20	251	22	20	25	251	20	25	22	251
5		20	28	20	244	28	20	20	244	20	20	28	244
6		1	1	1	11	1	1	1	11	1	1	1	11
7	解答：	=(D8)/(B8)	=(F8)/(B8)	=(H8)/(B8)									
8	Δ=	=MDETERM(B4:D6)	Δx=	=MDETERM(E4:G6)	Δy=	=MDETERM(H4:J6)	Δz=	=MDETERM(K4:M6)					

表 2-2 克拉瑪公式計算的結果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	三元一次方程組：												
2	解1：克拉瑪公式(2-3節)												
3		x	y	z	d	y	z	x	d	z	x	y	d
4		25	22	20	251	22	20	25	251	20	25	22	251
5		20	28	20	244	28	20	20	244	20	20	28	244
6		1	1	1	11	1	1	1	11	1	1	1	11
7	解答：	5	3	3									
8	Δ=	40	Δx=	200	Δy=	120	Δz=	120					

2. 高斯消去法：（課本第四冊 3-1 節）

將三元一次聯立方程組（L）利用某條方程式中 x 的係數消去其他方程式中的 x 的係數而得出同解的方程組（L_1），再利用另一條方程式中 y 的係數消去其他方程式中的 y 的係數而得出同解的方程組（L_2），最後利用方程式 z 的係數得出同解的方程組，再反推求出 y、x 之解，此種求解方法就是高斯消去法。其型式為：

$$L:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}，L_1:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\0x+b_4y+c_4z=d_4\\0x+b_5y+c_5z=d_5\end{cases}，L_2:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\0x+b_4y+c_4z=d_4\\0x+0y+cz=d\end{cases}。$$

高斯消去法其解的判別：先消 x、消 y，再看最後一列 $cz=d$：

(1)恰有一組解：最後一列是 $cz=d$ 且 $c\neq0$。

(2)無限多組解：最後一列是 $0z=0$，即 $c=d=0$。

(3)無解：最後一列是 $0z=d$，即 $c=0$ 且 $d\neq0$。

在儲存格 D22 輸入 z 值公式=(O21)/(N21)，儲存格 C22 輸入 y 值公式=(O20-N20*D22)/(M20)，儲存格 B22 輸入 x 值公式=(O19-M19*C22-N19*D22)/(L19)，如表 2-3。執行結果如表 2-4。解答：$x=5$，$y=3$，$z=3$。

表 2-3 高斯消去法的設定（逆推法）

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
17	解2：高斯消去法(3-1節)						消x：					消y：			
18		x	y	z	d		x	y	z	d		x	y	z	d
19		25	22	20	251		1	0.88	0.8	10.04		1	0.88	0.8	10.04
20		20	28	20	244		0	10.4	4	43.2		0	1	0.38462	4.15385
21		1	1	1	11		0	0.12	0.2	0.96		0	0	0.1538	0.4615
22	解答：	=(O19-M19*C22-N19*D22)/(L19)	=(O20-N20*D22)/(M20)	=(O21)/(N21)										↑c值	↑d值

表 2-4 高斯消去法計算的結果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
17	解2：高斯消去法(3-1節)						消x：					消y：			
18		x	y	z	d		x	y	z	d		x	y	z	d
19		25	22	20	251		1	0.88	0.8	10.04		1	0.88	0.8	10.04
20		20	28	20	244		0	10.4	4	43.2		0	1	0.38462	4.15385
21		1	1	1	11		0	0.12	0.2	0.96		0	0	0.1538	0.4615
22	解答：	5	3	3										↑c值	↑d值

3. 反矩陣解法：若 $AX=B$，則 $X=A^{-1}\times B$（$\det A\neq 0$）（課本第四冊 3-2 節）

(1)語法：反矩陣：=MINVERSE(array)

乘法：=MMULT(array1，array2)

轉置矩陣：=TRANSPOSE(array)

參數：array 是一個行列數相等的數值單元區域或陣列區域。

(2)在儲存格 B32:D32 輸入公式

=TRANSPOSE(MMULT(MINVERSE(B29:D31),E29:E31))，如表 2-5。完成後按 F2 鍵，同時按住 Shift＋Ctrl 鍵，再按 Enter 鍵，執行結果如表 2-6。解答：$x=5$，$y=3$，$z=3$。

表 2-5 反矩陣的設定

	A	B	C	D	E	F
27	解3：反矩陣(3-2節)					
28		x	y	z	d	
29		25	22	20	251	
30		20	28	20	244	
31		1	1	1	11	
32	解答：	=TRANSPOSE(MMULT(MINVERSE(B29:D31),E29:E31))				

表 2-6 反矩陣計算的結果

	A	B	C	D	E
27	解3：反矩陣(3-2節)				
28		x	y	z	d
29		25	22	20	251
30		20	28	20	244
31		1	1	1	11
32	解答：	5	3	3	

4. 規劃求解：（課本第三冊 2-2 節 LP）

Excel 函數在解「線性規劃」問題時，若將目標函數的設定取消，則可以解 *n* 元一次聯立方程組。

在儲存格 B41 輸入第 1 條多項式 f(x)=B37*B40+C37*C40+D37*D40，
儲存格 C41 輸入第 2 條多項式 f(x)=B38*B40+C38*C40+D38*D40，
儲存格 D41 輸入第 3 條多項式 f(x)=B39*B40+C39*C40+D39*D40，
如表 2-7。

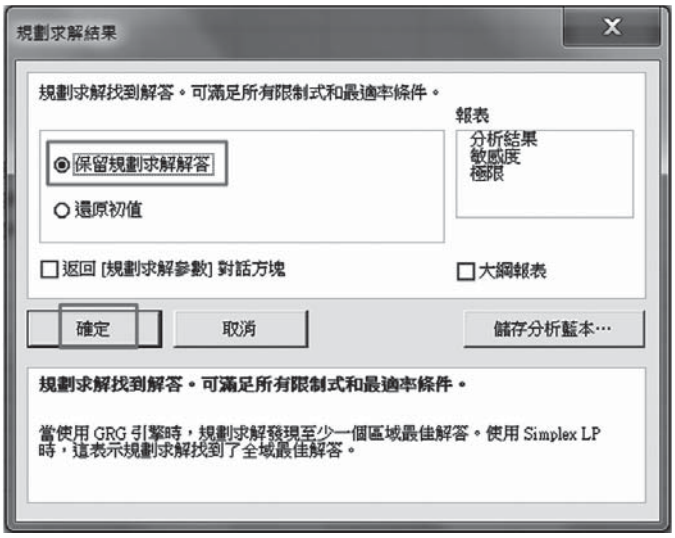
表 2-7 規劃求解的設定

執行【資料／規劃求解】，出現【規劃求解參數】的對話框：設定目標式空白→勾選最大值→設定變數儲存格→設定三條限制式→取消變數設為非負數→勾選 Simplex LP→最後按求解鍵，即設定完成，如表 2-8。

表 2-8 規劃求解參數對話框

按【求解】後，會出現【規劃求解結果】的對話框：勾選保留規劃求解解答，再按確定鍵，如表 2-9。

表 2-9 規劃求解結果對話框



按完確定鍵後，執行結果如表 2-10。解答：$x=5$，$y=3$，$z=3$。

表 2-10 規劃求解計算的結果

	A	B	C	D	E
35	解4：規劃求解				
36		x	y	z	d
37		25	22	20	251
38		20	28	20	244
39		1	1	1	11
40	解答：	5	3	3	

(二)Excel 函數：無限多組解的解法

在克拉瑪公式中 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$，當 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，則方程組為無限多組解或無解。同理，在反矩陣解法中，若行列式值 det$A=0$，則無法求出 x、y、z 的解。又高中教材沒有教 Excel 的「規劃求解」，因此本文採用課本 3-1 節的高斯消去法求解。

在儲存格 B6:D6 輸入公式=IF(AND(N5=0,O5=0),"無限多組解",IF(AND(N5=0,O5<>0),"無解","恰有一組解"))。

儲存格 B7 輸入公式=IF(AND(F9=1,F10=1,F11=1),"三平面重合",IF(AND(F9=3,F10=3,F11=3),"三平面相交於一線","兩平面重合與另一平面相交於一線"))。

儲存格 F9 輸入公式
=IF(AND(B9=C9,C9=D9,D9=E9),1,IF(AND(B9=C9,C9=D9,D9<>E9),2,3))。

儲存格 F10 輸入公式
=IF(AND(B10=C10,C10=D10,D10=E10),1,IF(AND(B10=C10,C10=D10,D10<>E10),2,3))。

儲存格 F11 輸入公式
=IF(AND(B11=C11,C11=D11,D11=E11),1,IF(AND(B11=C11,C11=D11,D11<>E11),2,3))，

如表 3-1。執行結果如表 3-2，解答：無限多組解。幾何意義是三平面相交於一線。

表 3-1 高斯消去法的設定

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	高斯消去法：(無限多組解)						消x：					消y：				
2		x	y	z	d		x	y	z	d		x	y	z	d	
3	E1：	1	2	-1	1		1	2	-1	1		1	2	-1	1	
4	E2：	2	5	1	-1		0	1	3	-3		0	1	3	-3	
5	E3：	1	4	5	-5		0	2	6	-6		0	0	0	0	
6	解答：	=IF(AND(N5=0,O5=0),"無限多組解",IF(AND(N5=0,O5<>0),"無解","恰有一組解"))														
7	幾何意義：	=IF(AND(F9=1,F10=1,F11=1),"三平面重合",IF(AND(F9=3,F10=3,F11=3),"三平面相交於一線","兩平面重合與另一平面相交於一線"))														
8	係數判定：重合為1，平行為2，相交一線為3					判定值										
9	E1/E2：	0.5	0.4	-1	-1	=IF(AND(B9=C9,C9=D9,D9=E9),1,IF(AND(B9=C9,C9=D9,D9<>E9),2,3))										
10	E1/E3：	1	0.5	-0.2	-0.2	=IF(AND(B10=C10,C10=D10,D10=E10),1,IF(AND(B10=C10,C10=D10,D10<>E10),2,3))										
11	E2/E3：	2	1.25	0.2	0.2	=IF(AND(B11=C11,C11=D11,D11=E11),1,IF(AND(B11=C11,C11=D11,D11<>E11),2,3))										

表 3-2 高斯消去法計算的結果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	高斯消去法：(無限多組解)						消x：					消y：			
2		x	y	z	d		x	y	z	d		x	y	z	d
3	E1：	1	2	-1	1		1	2	-1	1		1	2	-1	1
4	E2：	2	5	1	-1		0	1	3	-3		0	1	3	-3
5	E3：	1	4	5	-5		0	2	6	-6		0	0	0	0
6	解答：	無限多組解												↑c值	↑d值
7	幾何意義：	三平面相交於一線													
8	係數判定：重合為1，平行為2，相交一線為3					判定值									
9	E1/E2：	0.5	0.4	-1	-1	3									
10	E1/E3：	1	0.5	-0.2	-0.2	3									
11	E2/E3：	2	1.25	0.2	0.2	3									

〔練習 1〕試說明三平面 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=3 \end{cases}$ 相交情形。

ANS：無限多組解／三平面重合。（註 2）

〔練習 2〕試說明三平面 $\begin{cases} 2x-2y+4z=4 \\ x-y+2z=2 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$ 相交情形。

ANS：無限多組解／兩平面重合（$E_1=E_2$）與另一平面 E_3 交於一線。

(三)Excel 函數：無解的解法

在克拉瑪公式中 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$，當 $\Delta=0$，且（$\Delta_x\neq 0$ 或 $\Delta_y\neq 0$ 或 $\Delta_z\neq 0$），則方程組為無解。同理，在反矩陣解法中，若行列式值 det$A$＝0，則無解。又高中教材沒有教 Excel 的「規劃求解」，因此本文採用課本 3-1 節的高斯消去法求解。

在儲存格 B6:D6 輸入公式=IF(AND(N5=0,O5=0),"無限多組解",IF(AND(N5=0,O5<>0),"無解","恰有一組解")) 。儲存格 B7 輸入公式=IF(AND(F9=2,F10=2,F11=2),"三平面平行",IF(AND(F9=3,F10=3,F11=3),"三平面兩兩相交於一線且交線平行",IF(AND(F9=1,F10=1,F11=2),"兩平面重合與另一平面平行",IF(AND(F9=1,F10=2,F11=1),"兩平面重合與另一平面平行",IF(AND(F9=2,F10=1,F11=1),"兩平面重合與另一平面平行","兩平面平行與另一平面相交於一線"))))) 。儲存格 F9 輸入公式

=IF(AND(B9=C9,C9=D9,D9=E9),1,IF(AND(B9=C9,C9=D9,D9<>E9),2,3))。儲存格 F10 輸入公式=IF(AND(B10=C10,C10=D10,D10=E10),1,IF(AND(B10=C10,C10=D10,D10<>E10),2,3))。儲存格 F11 輸入公式=IF(AND(B11=C11,C11=D11,D11=E11),1,IF(AND(B11=C11,C11=D11,D11<>E11),2,3))，如表 4-1。

表 4-1 高斯消去法的設定

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	高斯消去法：(無解)						消x：					消y：				
2		x	y	z	d		x	y	z	d		x	y	z	d	
3	E1：	1	1	1	3		1	1	1	3		1	1	1	3	
4	E2：	1	2	3	4		0	1	2	1		0	1	2	1	
5	E3：	1	3	5	1		0	2	4	-2		0	0	0	-4	
6	解答：	=IF(AND(N5=0,O5=0),"無限多組解",IF(AND(N5=0,O5<>0),"無解","恰有一組解"))														
7	幾何意義：	=IF(AND(F9=2,F10=2,F11=2),"三平面平行",IF(AND(F9=3,F10=3,F11=3),"三平面兩兩相交於一線且交線平行",IF(AND(F9=1,F10=1,F11=2),														
8	係數判定：重合為1，平行為2，相交一線為3				判定值											
9	E1/E2：	1	0.5	0.333333	0.75	=IF(AND(B9=C9,C9=D9,D9=E9),1,IF(AND(B9=C9,C9=D9,D9<>E9),2,3))										
10	E1/E3：	1	0.333333	0.2	3	=IF(AND(B10=C10,C10=D10,D10=E10),1,IF(AND(B10=C10,C10=D10,D10<>E10),2,3))										
11	E2/E3：	1	0.666667	0.6	4	=IF(AND(B11=C11,C11=D11,D11=E11),1,IF(AND(B11=C11,C11=D11,D11<>E11),2,3))										

執行結果如表 4-2，解答：無限多組解。幾何意義是三平面兩兩相交於一線且交線平行。

表 4-2 高斯消去法計算的結果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	高斯消去法：(無解)						消x：					消y：			
2		x	y	z	d		x	y	z	d		x	y	z	d
3	E1：	1	1	1	3		1	1	1	3		1	1	1	3
4	E2：	1	2	3	4		0	1	2	1		0	1	2	1
5	E3：	1	3	5	1		0	2	4	-2		0	0	0	-4
6	解答：	無解												↑c值	↑d值
7	幾何意義：	三平面兩兩相交於一線且交線平行													
8	係數判定：重合為1，平行為2，相交一線為3					判定值									
9	E1/E2：	1	0.5	0.333333	0.75	3									
10	E1/E3：	1	0.333333	0.2	3	3									
11	E2/E3：	1	0.666667	0.6	4	3									

〔練習 1〕試說明三平面 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+3y+3z=3 \\ 2x+2y+2z=5 \end{cases}$ 相交情形。

ANS：無解／兩平面重合與另一平面平行（$E_1=E_2//E_3$）。

〔練習 2〕試說明三平面 $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ 2x-y+3z=5 \\ 2x-y+3z=4 \end{cases}$ 相交情形。

ANS：無解／三平面平行。

〔練習 3〕試說明三平面 $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x-y+z=3 \\ 3x+y-z=4 \end{cases}$ 相交情形。

ANS：無解／兩平面平行（$E_1//E_2$）分別與 E_3 交於一線。

(四)克拉瑪公式與高斯消去法比較：三平面關係的探討

先了解兩平面相交情形，有助於探討三平面的關係。

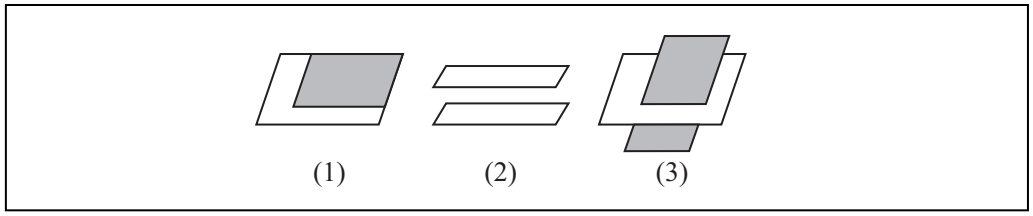
1. 兩平面之關係：設兩平面 $E_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 與 $E_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 。

(1)若 $E_1=E_2$（重合），則 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$ ，圖形如表 5-1 的(1)。

(2)若 $E_1//E_2$（平行），則 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$ ，圖形如表 5-1 的(2)。

(3)若兩平面相交於一線，則 a，b，c 有一比值不相等，圖形如表 5-1 的(3)。

表 5-1 兩平面的相交情形



2. 克拉瑪公式：三平面關係的判別看 Δ，Δ_x，Δ_y，Δ_z 及係數比。

(1)若 $\Delta\neq 0$ 時，則恰有一組解，$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ ，$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$ ，$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$ 。表示三平面相交於一點 $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta},\frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$，圖形如表 5-2 的(a)。

(2)若 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ，則方程組為無限多組解或無解。

①當方程組有無限多組解時，三平面有下列三種情形：

(b)三平面重合（ $E_1=E_2=E_3$ ）：三條方程式係數均成比例，圖形如表 5-2 的(b)。

(c)兩平面重合（ $E_1=E_2$ ）與另一平面 E_3 交於一直線：兩條方程式係數成比例，另一條不成比例，圖形如表 5-2 的(c)。

(d)三相異平面交於一線：三條方程式係數均不成比例，圖形如表 5-2 的(d)。

②當方程組無解時，三平面有下列兩種情形：

(e)兩平面重合與另一平面平行（ $E_1=E_2//E_3$ ）：兩條方程式係數均成比例，另一條常數項不相等，圖形如表 5-2 的(e)。

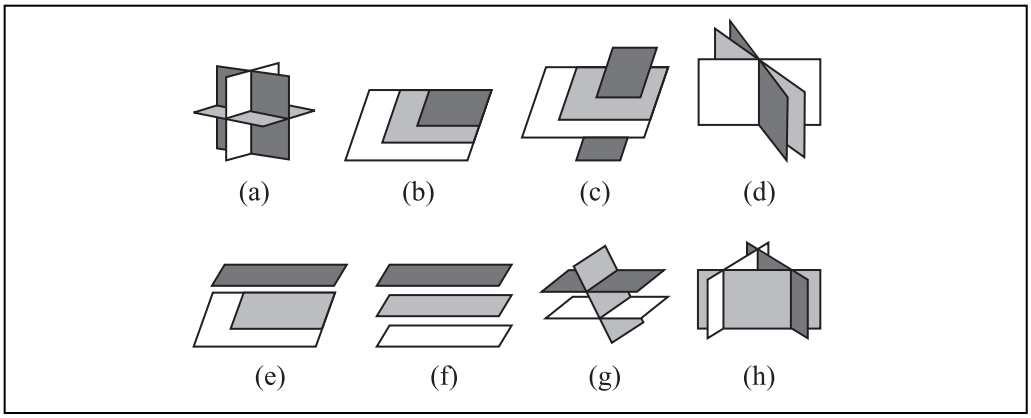
(f)三平面平行（ $E_1//E_2//E_3$ ）：三條方程式係數均成比例，且常數項不相等，圖形如表 5-2 的(f)。

(3)若 $\Delta = 0$，且（$\Delta_x \neq 0$ 或 $\Delta_y \neq 0$ 或 $\Delta_z \neq 0$），則方程組為無解。

(g)兩平面平行（$E_1 // E_2$）分別與 E_3 交於一線：兩條方程式係數成比例，常數項不相等，圖形如表 5-2 的(g)。

(h)三平面兩兩相交於一線，且交線兩兩平行：三條方程式係數均不成比例，圖形如表 5-2 的(h)。

表 5-2 三平面的相交情形



3. 高斯消去法：解看最後一列 $cz = d$，三平面關係的判別看係數比。（註 3）

(1)恰有一組解（A Unique solution）：最後一列是 $cz = d$ 且 $c \neq 0$，表示三平面相交於一點，圖形如表 5-2 的(a)。

(2)無限多組解（Multiple solution）：最後一列是 $0z = 0$，即 $c = d = 0$。

(b)三平面重合（$E_1 = E_2 = E_3$）：三條方程式係數及常數項均成比例，圖形如表 5-2 的(b)。

(c)兩平面重合（$E_1 = E_2$）與另一平面 E_3 相交於一直線：兩條方程式係數及常數項成比例，另一條不成比例，圖形如表 5-2 的(c)。

(d)三平面相交於一直線：三條方程式係數均不成比例，圖形如表 5-2 的(d)。

(3)無解（No solution）：最後一列是 $0z = d$ 且 $d \neq 0$。

(e)兩平面重合與另一平面平行（$E_1 = E_2 // E_3$）：兩條方程式係數均成比例，另一條常數項不相等，圖形如表 5-2 的(e)。

(f)三平面平行（$E_1 // E_2 // E_3$）：三條方程式係數均成比例，且常數項不相等，圖形如表 5-2 的(f)。

(g)兩平面平行（$E_1 // E_2$）分別與另一平面 E_3 交於一線：兩條方程式係數成比例，常數項不相等，另一條係數不成比例，圖形如表 5-2 的(g)。

(h)三平面兩兩相交於一線，且交線兩兩平行：三條方程式係數均不成比例，圖形如表 5-2 的(h)。

三、結語》

因為高中數學課本第四冊 2-3 節主要利用克拉瑪公式，求三元一次聯立方程式及三平面關係的探討。但克拉瑪公式的Δ，Δ_x，Δ_y，Δ_z的三階行列式值的計算繁瑣；且$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$時，則方程組為無限多組解或無解，學生常在三平面關係的判別上混淆不清。建議採用第四冊 3-1 節高斯消去法，可簡化計算過程，且在無限多組解或無解中，有關三平面關係的判別劃分得很清楚，非常值得學生參考運用。

參考資料：

1. 林福來（2014）。高中數學第四冊第二章第三節。臺南市：南一書局企業股份有限公司。P.115。
2. 許志農（2014）。高中數學第四冊第二章第三節。新北市：龍騰文化事業公司。P.104。
3. 鍾國華。高中數學第四冊講義。臺北市協和祐德高中。

課本例題看費馬點與拿破崙定理的連結

吳孝仁、吳育藝／國立政大附中

一、前言》

我右手邊的同事的碩士論文是做關於拉格朗日插值多項式（Lagrange interpolation polynomial）教學法的研究，大致上是想利用中國剩餘定理（Chinese Remainder Theorem）的概念來類推拉格朗日插值多項式，然後分析這種教學法的成效。雖然工程浩大，但是我覺得很好。現實教學現場礙於進度壓力我們可能很少這麼做，但是如果一個概念（想法、單元、性質），可以很自然地引入或類比另一個概念（想法、單元、性質），那麼也許在學習的時候就該把兩個東西擺在一起看（學）。一來是學習兩者相輔相承，二來也是期望學生在學習歷程中獲得去欣賞數學在一致性上的美感之體驗。這不也算是數學課程該有的一種特色！

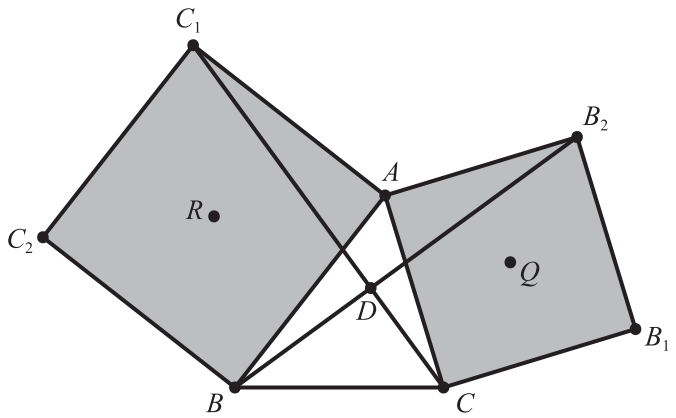
當然礙於知識結構不見得所有概念都適合這樣做，但是我們可以努力發掘出來，於是“特色”，油然而生，再自然不過。我翻一下我的筆記，之前也記錄過這樣一個例子。本文所談絕非創見，僅算是一點點教學心得，願與各位先進分享。

二、本文》

我記得國二學三角形全等性質一定有這個經典例題：如圖(一)，$\triangle ABC$ 以 $\overline{AB}$,

$\overline{AC}$ 分別為邊長做正方形 BAC_1C_2, ACB_1B_2, R, Q 分別為正方形中心。

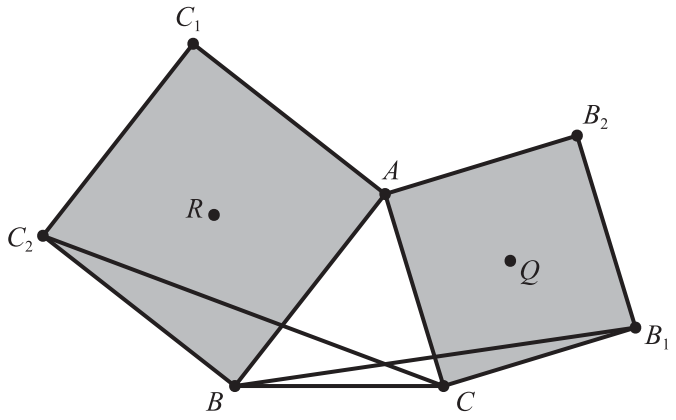
證明：$\overline{BB_2} \perp \overline{CC_1}$ 。



圖(一)

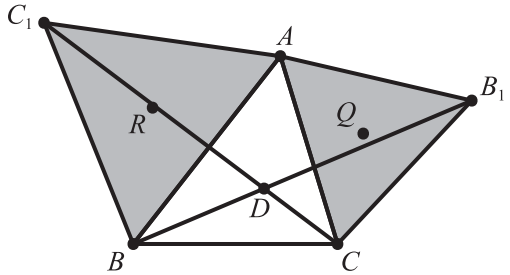
學習重點在利用 SAS 全等性質得到$\triangle AC_1C \cong \triangle ABB_2$，所以$\angle ACC_1 = \angle AB_2B$，從而$\angle CDB_2 = \angle CAB_2 = 90°$。然後在國三學圓的時候這個問題又再拿出來討論一次，這回我們關注的是$\angle ACC_1 = \angle AB_2B$提供了 $ADCB_2$ 四點共圓這件事（其實是 $ADCB_1B_2$ 五點共圓）。圓的直徑是$\overline{CB_2}$，所以$\angle CDB_2 = 90°$。當然，中間學習相似形一樣可以拿這個圖再探究一次，討論圖中哪些是相似三角形。最後，全等三角形$\triangle AC_1C$, $\triangle ABB_2$ 又能帶出旋轉變換概念。一道題目包含不同階段的概念，說這題經典，其實不為過。

但是等等，有人問（真的有學生這樣問！）：如果 B 一開始是選擇連到 B_1，那完全不是上述那回事了。或者如下圖：



圖(二)

又會發生什麼事？課堂上如果有學生做這樣發問真的是太棒了，這樣的好奇表示接下來繼續討論的動機是自然的。不過，如果沿著各邊做的是正三角形，B, C 點就不會有選擇連線上的困擾。再者，各邊做正三角形進行討論也應該比做正方形來得更”基礎”一些。所以，我們很自然的對圖(三)進行討論，如下：



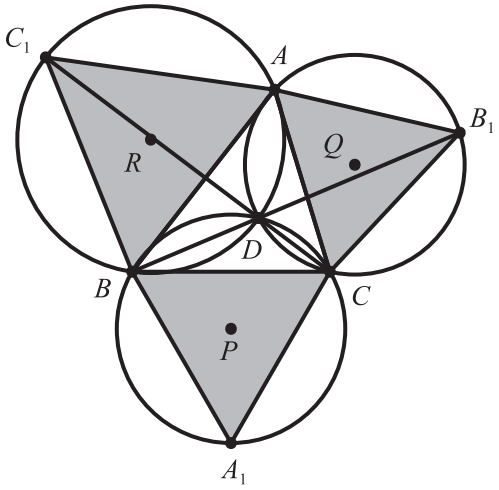
圖(三)

觀察發現，圖(三)與圖(一)類比的性質有：

(1)$\triangle AC_1C \cong \triangle ABB_1$。

(2) AC_1BD, $ADCB_1$ 四點共圓。從而$\angle C_1DA = \angle ADB_1 = 60°$, $\angle C_1DB_1 = 120°$。

另外$\angle ADB = 180° - \angle AC_1B = 120°$，同理$\angle ADC = 120°$，所以$\angle BDC = 120°$。因此，如果在$\overline{BC}$上也作正三角$BA_1C$，於是$BA_1CD$四點也共圓。如下圖(四)：



圖(四)

換句話說，我們對三角形各邊作正三角形，那麼三個正三角形的外接圓會交於一點D，這是第一個不平凡。甚至，$\angle CDA_1 + \angle CDA = 60° + 120° = 180°$。又意謂$\overline{AA_1}$也通過$D$（或者說$A, D, A_1$三點共線）。所以，$\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$會交於同一點D，這是第二個不平凡。

當△ABC的各角都不大於$120°$的時候，D點就是△ABC的費馬點。此時，對三角形內（含邊界）任一點X，$\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} \geq \overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}$。這裡可以再對上述不等式多做解釋，也可以就此打住。我們所要表達的是，在一連串的類比與觀察下，D點是很自然的被帶出來的。

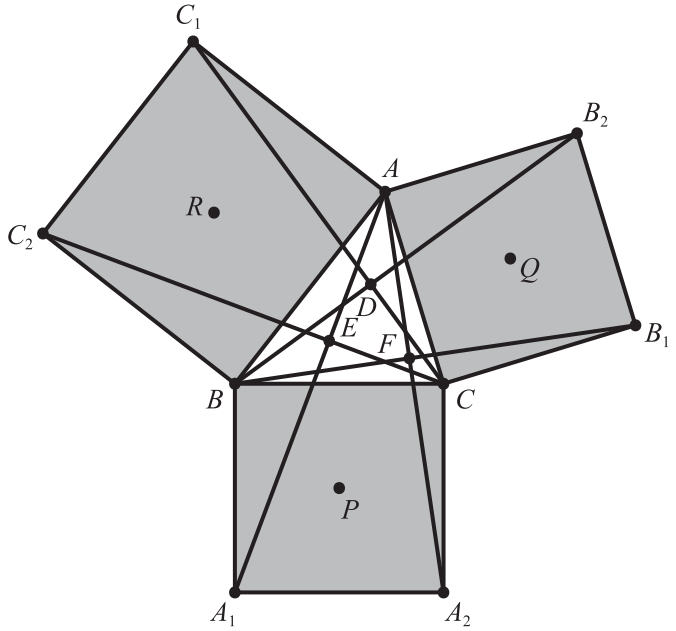
圖(四)中，三個正三角形的中心P, Q, R都是圓心，任兩個外接圓交兩點，D是其中一點。由連心線垂直平分公弦得知（僅以$\overline{RQ}$為例說明），$\overline{RQ}$垂直平分$\overline{AD}$。此外，還有特別的事發生嗎？又是一個好的提問！

因為剛剛才說到$\overline{RQ}$垂直平分$\overline{AD}$，所以$\angle RQP = \frac{1}{2}\angle AQC = \angle AB_1C = 60°$。所以△$PQR$是一個正三角形。這就是拿破崙定理了。

拿破崙定理：以**三角形**各邊為邊，分別向外側作**正三角形**，則它們的中心構成一個正三角形。

將以上一連串的提問、觀察、討論付諸於教案，是否就是一堂頗具特色的幾何探索課程呢？我們期待可以在九年級及十年級選修課程裡實驗看看。

再等等，圖(一)就這樣結束了嗎？ 我們接續圖(二)的想法，將△ABC 各頂點與對邊所引出的正方形的另兩端點都連線，如下圖(五)。



圖(五)

有哪些性質可以類比呢？

(1)△ $AC_1C \cong$ △ ABB_2 。

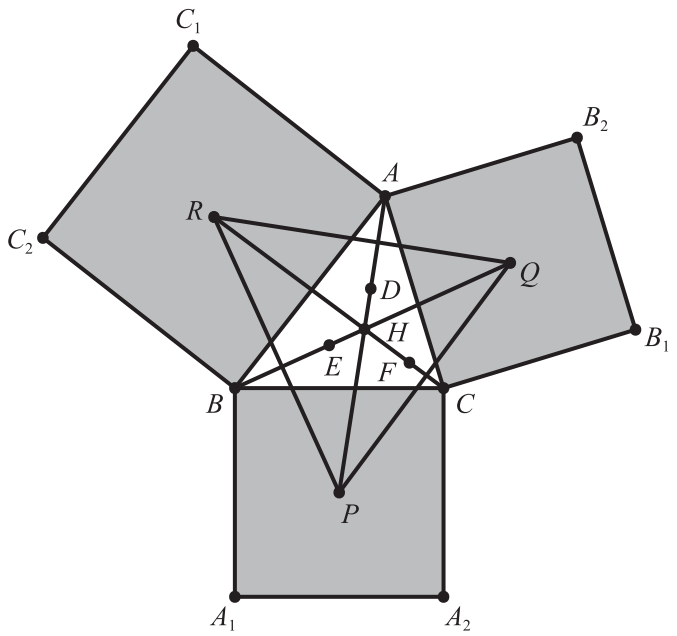
(2) AC_1C_2BED， $ADFCB_1B_2$， BA_1A_2CFE 六點共圓。

有沒有三線交於一點的情況發生呢？也是有的！

性質 1. 如圖(五)，$\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$ 交於一點 H。

很遺憾，各正方形中心 P, Q, R 不會形成一個正三角形，但還是有件事能與圖(四)類比。圖(四)中，$\overline{AD}$ 為兩個正三角形外接圓的公弦，所以 $\overline{AD} \perp \overline{QR}$ 。回到圖(五)，$\overline{AD} \perp \overline{QR}$ 也對！而特別的地方發生在這裡，事實上 P 點也在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上。所以，H 在△ PQR 的 QR 邊的高（延長線）上，因此：

性質 2. 如圖(六)，H 為△ PQR 的垂心。



圖(六)

性質 1, 2. 的詳細證明我們將列於文末。

行文至此做個總結，我們可以由一道例題作為動機引入，很自然的將概念連結到三角形的費馬點與拿破崙定理。類比所有的經驗與想法，再回頭反思原來例題而有了一些發現。

所以，課程執行層面上，我們建議應該把這整個過程（觀察、提問、類比）包裹起來交給學生而不要急著呈現結果。圖(五)、圖(六)所討論的問題適合放在學習單，讓學生試著獨立（或分組）進行並且表達。學生能進行到多深入並不重要，最重要的是要有經歷過自己創造數學來解決問題的經驗。這才是學習數學最重要的事，夥伴們您認為呢？

※註 1：

性質 1. 如圖(五)，$\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$ 交於一點 H。

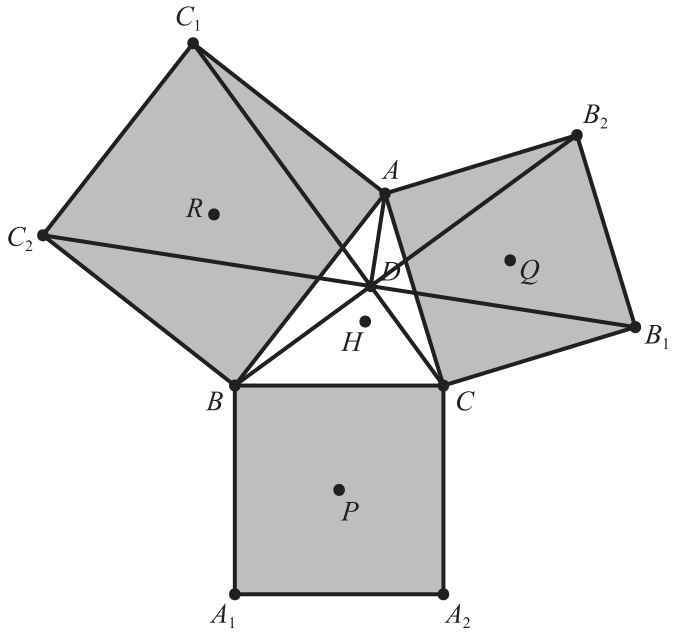
證明：假設 $\overleftrightarrow{AD}$，$\overleftrightarrow{BE}$ 交於 H。 因為 $\overline{AD}$ 是 AC_1C_2BED 外接圓 $C(R)$ 與 $ADFCB_1B_2$ 外接圓 $C(Q)$ 的公弦，所以 H 對 $C(R)$，$C(Q)$ 同冪。同理，$\overleftrightarrow{BE}$ 也是 $C(R)$，$C(P)$ 公弦直線，故 H 對 $C(R)$，$C(P)$ 同冪，因此 H 對 $C(Q)$，$C(P)$ 同冪，即 H 落在 $C(Q)$，$C(P)$ 公弦直線 $\overleftrightarrow{CF}$ 上。

※註 2：

關於性質 2. 很遺憾這裡是以比較代數的角度切入，幾何方向的證明就有勞各位先進了。我們要利用下面的一個預備定理：

預備定理：（複數）平面上兩點 Z_1，Z_2，若 $Z_1\overline{Z_2}+\overline{Z_1}Z_2=0$，則 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$。

性質 2. 如圖(七)，證明 P 點在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上。



圖(七)

證明：因為 $ADCB_1B_2$ 共圓，所以 $\angle ADB_1=90°$，

同理 $\angle ADC_2=90°$，從而 $\overline{AD}\perp\overleftrightarrow{C_2B_1}$。

設 A 為原點，則 $B_1=\sqrt{2}Ce^{\frac{\pi i}{4}}$，$C_2=\sqrt{2}Be^{-\frac{\pi i}{4}}$，$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(B-C\right)e^{\frac{\pi i}{4}}+C$，

設 $U=\overrightarrow{C_2B_1}=\sqrt{2}\left(Ce^{\frac{\pi i}{4}}-Be^{-\frac{\pi i}{4}}\right)$，$V=\overrightarrow{AP}=\frac{1}{\sqrt{2}}(B-C)e^{\frac{\pi i}{4}}+C$。

檢查 $U\overline{V}+\overline{U}V$

$$=\sqrt{2}\overline{\left(Ce^{\frac{\pi i}{4}}-Be^{-\frac{\pi i}{4}}\right)}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(B-C)e^{\frac{\pi i}{4}}+C\right]+\sqrt{2}\left(Ce^{\frac{\pi i}{4}}-Be^{-\frac{\pi i}{4}}\right)\overline{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(B-C)e^{\frac{\pi i}{4}}+C\right]}$$

$$=\overline{C}\left(B-C\right)+\sqrt{2}C\overline{C}e^{-\frac{\pi i}{4}}-\overline{B}\left(B-C\right)e^{\frac{\pi i}{2}}-\sqrt{2}\overline{B}Ce^{\frac{\pi i}{4}}+C\left(\overline{B}-\overline{C}\right)$$

$$+\sqrt{2}C\overline{C}e^{\frac{\pi i}{4}}-B\left(\overline{B}-\overline{C}\right)e^{-\frac{\pi i}{2}}-\sqrt{2}B\overline{C}e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

$$=\overline{C}(B-C)+2C\overline{C}-\overline{B}i\left(B-C\right)-\overline{B}C\left(1+i\right)+C\left(\overline{B}-\overline{C}\right)+Bi\left(\overline{B}-\overline{C}\right)-B\overline{C}\left(1-i\right)=0$$

由預備定理得 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{C_2B_1}$，即 P 點也在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上，證畢。

專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 121

☆☆☆

藍委員半夜患了急性盲腸炎，需馬上動手術，但是他同時感染了一種具有高度傳染力的皮膚病。為了慎重起見，三位住院醫師依序輪流進去幫他動手術。每位動手術的醫師雙手必須戴手套，而且藍委員的皮膚病一定會汙染使用過手套的外部。

除了藍委員外，三位住院醫師可能有一位也已經得了這種皮膚病，但我們並不清楚是哪一位醫師得這種皮膚病。正當手術要進行時，護士才發現只有兩副消過毒的手套可用，而且手術馬上要進行，已經沒時間消毒或再準備手套了。

為了不讓醫師間互相感染及被藍委員傳染皮膚病，該如何使用手套呢？護士說她知道。你知道嗎？

〔玩鎖・玩索〕

百密必有一疏是這道遊戲的寫照，很多學生想了一些情況之後就認定此遊戲無解。事實上，學生經常是漏掉或疏忽可能發生的不尋常情況。當你不得其解時，應該將所有可能的戴法思索一遍，答案一定可以找著。這道題目是在臺北市某國小教書的洪淑琳網友問我的，她說這道問題是臺北美國學校七年級的數學功課。本人將題目的情境稍作修改，取闌尾炎的諧音藍委員。

這道遊戲可以延伸一下：當醫生人數是 4 人時，想要安全完成手術，所需的最少手套數量是多少呢？依此可以推廣到 n 個醫生的一般情況。有興趣做專題研究或數學科展的同學，不妨想想看！

遊戲 122

☆☆☆☆

設 abc 是一個三位數的正整數。我們都知道

(1)abc 是否為偶數，只需判斷 c 是否為偶數即可。

(2)abc 是否為 3 的倍數，只需判斷 $a+b+c$ 是否為 3 的倍數即可。

(3)abc 是否為 9 的倍數，只需判斷 $a+b+c$ 是否為 9 的倍數即可。

(4)abc 是否為 11 的倍數，只需判斷 $a-b+c$ 是否為 11 的倍數即可。

除了這四個之外，相信很多人也記得 5 的倍數與 13 的倍數之判別方法。但是，你會 19 的倍數之判別方法嗎？請你檢驗底下的判別方法：

$$19 \mid abc \Leftrightarrow 19 \mid (10a+b+2c)，$$

也就是說，abc 是否為 19 的倍數，只需判斷 $10a+b+2c$ 是否為 19 的倍數即可。或者證明以下兩個問題：

(1)已知三位數 abc 是 19 的倍數，求證 $10a+b+2c$ 也是 19 的倍數。

(2)已知 $10a+b+2c$ 是 19 的倍數，求證三位數 abc 也是 19 的倍數。

〔玩鎖・玩索〕

判斷一個大的數是否為某數的倍數之判別方法是學習整數性質相當重要的一環。上述判別 2, 3, 9, 11, 13 的倍數判別法不僅對三位數正整數適用，還可以推廣到一般的情形。關於這些判別方法的推理或證明，都需要用到相當重要的整數除法性質：

$$d \mid a,\ d \mid b \Rightarrow d \mid (am+bn)\text{。}$$

例如有一道與 31 的倍數相關的問題，也可以利用這個除法性質驗證：

如果 $N = a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$ 是 n 位數正整數，那麼 N 是否為 31 的倍數可以用 $n-1$ 位數 $A = a_1a_2\cdots a_{n-1}$ 與個位數 $B = a_n$ 表現如下：

$$31 \mid N \Leftrightarrow 31 \mid (A-3B)\text{。}$$

例如，因為 $68-3\times 2=62$ 是 31 的倍數，所以 $31 \mid 682$。

有關 19 倍數的判別法可以推廣為：$n+1$ 位的正整數 $a_na_{n-1}\cdots a_1a_0$ 是 19 的倍數之判別方法為

$$10a_n + 2^0a_{n-1} + 2^1a_{n-2} + \cdots + 2^{n-2}a_1 + 2^{n-1}a_0$$

也是 19 的倍數。看了這個神奇的判別方法後，關於其他數的倍數判別方法，你有辦法挖掘嗎？

遊戲 123

☆☆☆

根號數的化簡是一門很特別的學問，例如：

$$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=\frac{13}{12}$$

是巧合，還是有特別的規律。如果有規律，那麼這規律又要如何去發現呢？就讓我們來試試看吧！

求根號數的和

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}$$

$$+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}\text{。}$$

〔玩鎖・玩索〕

數學問題的研究，有時將特例一般化會得到意想不到的結果。就以本遊戲為例，

$$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=\frac{13}{12}$$

是一個特例，它的一般化應該是去研究根號數

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

是否可以化成分數的情形？透過通分可以得到

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}}$$

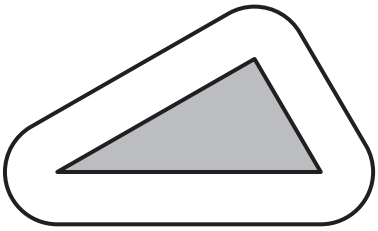
$$=\frac{\sqrt{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}}{n(n+1)}\text{。}$$

所以關鍵在於分子是否可以開出來？嘗試看看吧！

遊戲 124

☆☆

每一個國家為了防衛，都會宣稱距離領土多少範圍內的海域為其所有，未經許可不得進入。下圖就是一個三角形狀的國家，其領海的範圍示意圖，如白色區域所示：



(1)如果三角形狀的國家之海岸線長度為 l，規定離海岸 d 以內為其領海，那麼這國家的總領海面積是多少？

(2)如果國家的形狀為凸四邊形，海岸線長度為 l 的國家，規定離海岸 d 以內為其領海，那麼這凸四邊形國家的總領海面積又是多少？

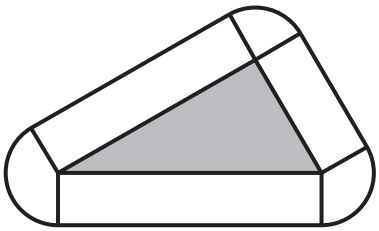
(3)對於凸 n 邊形，海岸線長度為 l 的國家，規定離海岸 d 以內為其領海，其領海面積是多少？

(4)如果國家的形狀是海岸線長度為 l 的圓形，規定離海岸 d 以內為其領海，那麼這國家的總領海面積是多少呢？

〔玩鎖・玩索〕

臺灣是一個島國，像臺灣這樣四面環海的國家有許多，如鄰近的日本，菲律賓，澳洲，紐西蘭等。這些島國的形狀長相很不一樣，有的像蕃薯狀，有的像圓形，有的又很細長，如何估計島國的領海面積，成為幾何學家的一道問題。究竟一個國家的領海面積與該國的海岸線長度，領土面積，環肥燕瘦的國土形狀相關嗎？

讓我們將三角形的領海區域劃分成圓弧與矩形兩類，如下圖所示：

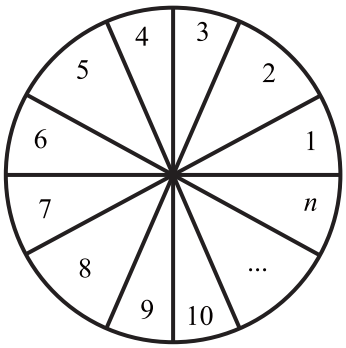


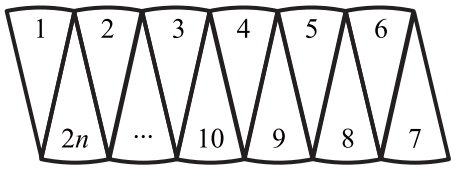
接下來就是將圓弧形領海湊起來，矩形領海一起算，再把它們相加，即是領海面積。

至於圓形國家的領海面積如何算呢？回想小學老師如何教你求圓面積公式。如果忘了，也可以上網查劉徽與祖沖之求圓周率 π 的近似值之名句：「割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。」

在解決領海面積問題中，會用到圓面積公式 $\pi\times(\text{半徑})^2$，這公式大家耳熟能詳，從小學背到高中，但是似乎沒有完整證明過。事實上，想完整證明圓面積公式需用到微積分，這已超出高中的數學範圍。在這裡，我們提一下大家最能接受的直觀方法，這方法是開普勒發現的。

開普勒發展了一種非常有趣的方法，通過它可以解析圓的面積公式：如下圖所示：





假定把半徑為 r 的圓分為 $2n$ 個扇形，它們都是全等的等腰三角形（其實是全等的扇形）。由於這些等腰三角形是來自同一個圓，因而它們的高都等於圓的半徑。當將它們如圖放在一起時，就構成了平行四邊形的樣子。一個平行四邊形的面積可由底乘以高求得。在這種情形下，底為圓周長的一半，即

$$\frac{1}{2}(2\pi r)=\pi r\ ;$$

而高剛好是圓的半徑 r，故圓面積為

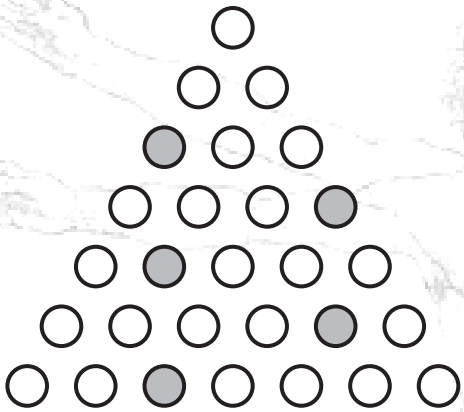
$$\pi r\cdot r=\pi r^2\ 。$$

動手玩數學~破解祕笈 第30期

遊戲 117

(1) 不會跟著變。

(2) 如下圖所示，最多可以擺放 5 個皇后，而且互不侵犯：



5 個皇后的互不侵犯情形

遊戲 118

將杯口朝下的杯子定義為 -1，杯口朝上的杯子定義為 $+1$。剛開始，因為五只茶杯的杯口都朝下，所以有五個 -1，其乘積 $(-1)^5=-1$。

每操作一次，會有兩個杯子的杯口改變，也就是，兩個數字變號。這意味著，其乘積不會改變，也就是說，無論操作幾次，五只茶杯的正負乘積仍然是 -1。所以不可能讓杯口都朝上（此種情況需乘積為 $+1$）。

遊戲 119

(1) 設奈米球是由 x 個正六角形和 y 個正五角形所圍成。

從奈米球發現：每個正六邊形的碳原子（頂點）都與另一個正六邊形的碳原子共用。因此

$$\frac{6x}{2}=60 \Rightarrow x=20.$$

從奈米球發現：每個正五邊形的碳原子（頂點）都是獨立，不與其它正五邊形的碳原子共用。因此

$$5y=60 \Rightarrow y=12.$$

(2) 由 $y=12$ 個正五邊形產生 $12\cdot 5=60$ 條邊，而 20 個正六邊形產生 $20\cdot 6=120$ 條邊中，一半與正五邊形共邊，另一半與正六邊形共邊。所以奈米球共有

$$60+\frac{120}{4}=90 \text{ 條邊。}$$

遊戲 120

(1) 計算得 $p_{10}=34$，$q_{10}=55$ 與 $f_{10}=89$。

(2) 如玩鎖．玩索的解釋：數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足 $f_1=f_2=1$ 及 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$，$n\geq 3$.