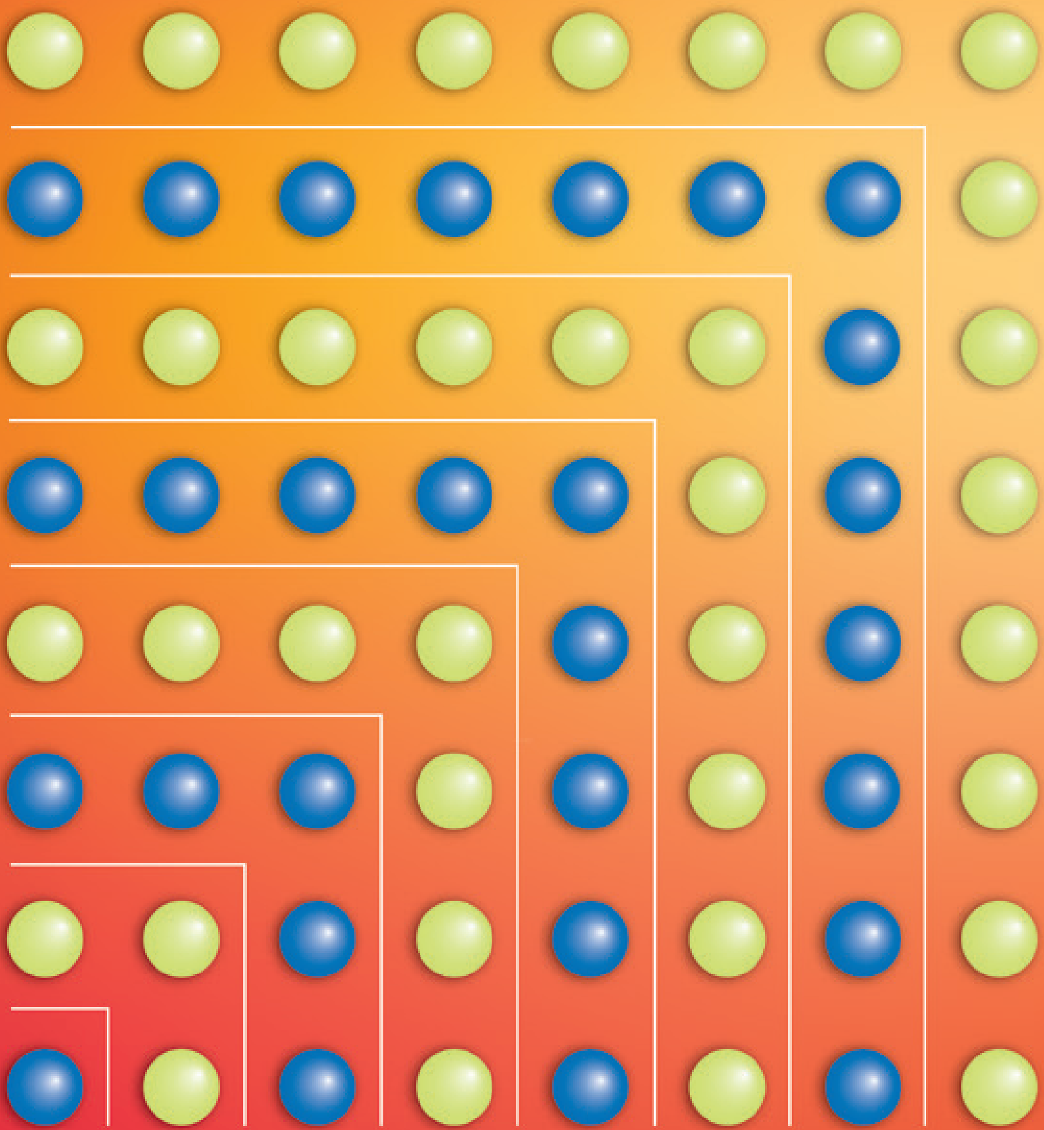
龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第30刊



$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

N5201
30 #1

龍騰文化

編輯室墨記

在〈圓錐曲線與直線的關係判別〉中，莊健祥老師利用「代數」的方法求得有關橢圓、雙曲線與直線的關係判別，簡化並且試著依據相同的思維方法，推導出拋物線與直線的關係判別法則。

解決許多數學問題時，通常會以絕對值來表示兩點的距離，根據問題的限制條件，可以形成兩個一元一次絕對值不等式，鍾國華老師在〈兩個一元一次絕對值方程式的探討〉中提出圖解法、常數判別法，提供不同解法方式。

丟番圖方程式又名不定方程式，是變數僅容許是整數的多項式方程式，江慶昱老師在〈丟番圖方程式〉運用簡單、有趣的說明，讓我們一起重新認識丟番圖方程式。

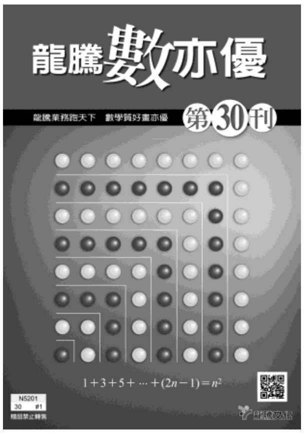
一道歷屆的數學競賽考題，引起了台南一中王敏齊同學激發出解數學題目的不同方法，編寫出〈一題多變、一題多解〉多種解題方法，讓我們一起欣賞不同解法之美！

熱騰騰的〈國立臺灣師範大學數學系105 學年度大學申請入學指定項目甄試試題〉出爐囉！快來看看這次甄試考了些什麼題目，也讓自己小試身手吧！

桌上有5只茶杯，杯口都朝下，每次運動只能將2只茶杯翻轉。有辦法讓所有的茶杯杯口都朝上嗎？翻開動手玩數學，跟著許教授一起來解密吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的內容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 kilro_pan@lungteng.com.tw。



發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
執行編輯：郭淑貞
美術編輯：林佳瑩
發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248新北市五股區五工六路30號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2298-9755
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2016/05/13
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2016.05 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

也談「圓錐曲線與直線的關係判別」

莊健祥／臺北市立內湖高中

一、前言》

之所以想寫這篇文章，主要是回應曾在貴刊第 24 刊的第 20 到 41 頁所刊登陳鑫達老師所寫的那篇「從一個極值問題判斷直線與圓錐曲線的相交情形」的文章。在那篇文章中，陳老師從一個極值問題出發，發展出了一套橢圓和雙曲線與直線關係判別的「幾何觀點」，然後將它轉換成「代數形式」，並應用於解題上。這種以「幾何為根本，代數為應用」的思路歷程，正是高中數學中「解析幾何」最好的體現。再加上陳老師從定義到定理，再從定理到解題的嚴謹的建構過程，使那篇文章既詳細又精闢，令人印象深刻。因此筆者不揣自陋，也想分享一點個人過去有關這個主題的一些教學心得，還望全國高中數學教學先進不吝指教。

陳老師的研究動機一如其文章上說的：在高中數學中，要判斷「圓與直線的關係」，只要比較圓心到直線的距離與圓半徑的大小（即所謂的幾何觀點），就能輕易得知。但非退化的圓錐曲線與直線的關係判別，卻缺乏類似的簡易方法，因此應用在代數方程式上，只能將直線方程式代入圓錐曲線方程式後，得到交點方程式，再利用此二次方程式的判別式來判別圓錐曲線與直線到底是相割、相切、還是相離，這樣的代數方法，因為計算頗為繁雜，學生很容易算錯，也因此是否能找到一個類似圓與直線關係判別的簡單方法，確實是一個有意思的主題。

在該篇文章中，陳老師利用了「反射原理」，經過詳盡且繁複的推導後（其文中的第 24～25 頁和第 30～32 頁，**定理 5** 及**定理 8**）找到了一個判別方法：即比較橢圓兩焦點到直線距離的乘積與其短軸長之半的平方的大小，即可得知橢圓與直線的關係（若是雙曲線則是比較其兩焦點到直線距離的乘積與其共軛軸長之半的平方的大小，即可得知雙曲線與直線的關係）。至於拋物線，他則利用了拋物線的「光學性質」來做為判別準則。而本文則是要利用「代數」的方法來得到上述兩個有關橢圓、雙曲線與直線的關係判別法則，同時簡化陳老師所提出的「幾何方法」，並且試著依據相同的思維方法，推導出拋物線與直線的關係判別法則。

二、本文》

(一) 橢圓與直線的關係判別

【定理一】 若直線 L 為橢圓的切線，則橢圓兩焦點至直線 L 距離的乘積恆為定數 b^2，其中 b^2 為橢圓短軸長之半的平方。

首先，因為長度是旋轉的不變量，所以，不失一般性，

將橢圓方程式設為標準式：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a>b>0$，

$b^2=a^2-c^2$，則其長軸長為 $2a$，短軸長為 $2b$，焦點的距離 $\overline{F_1F_2}$ 為 $2c$。

《證法一》代數方法一

設橢圓上的動點 P 為$(a\cos t，b\sin t)$，其中 $0\le t<2\pi$，

直線 L 為過 P 點的切線，並令 F_1、F_2 到切線 L 的距離分別

為 d_1 、 d_2 ，而 $\angle F_1PF_2=\theta$ ， θ_1 、 θ_2 為兩焦半徑與切線的夾角，如圖(一)。

則有切線 L ： $\dfrac{a\cos t\cdot x}{a^2}+\dfrac{b\sin t\cdot y}{b^2}=1$

$\Rightarrow \dfrac{\cos t\cdot x}{a}+\dfrac{\sin t\cdot y}{b}=1$

$\Rightarrow b\cos t\ x+a\sin t\ y=ab$

而 $d_1=\dfrac{\left|bc\cdot\cos t-ab\right|}{\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}}$

$d_2=\dfrac{\left|-bc\cdot\cos t-ab\right|}{\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow d_1\cdot d_2&=\frac{\left|\left(bc\cdot\cos t-ab\right)\left(bc\cdot\cos t+ab\right)\right|}{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\\&=\frac{b^2\left|\left(c\cdot\cos t-a\right)\left(c\cdot\cos t+a\right)\right|}{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\\&=\frac{b^2\left|c^2\cdot\cos^2 t-a^2\right|}{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\\&=\frac{b^2\left|\left(a^2-b^2\right)\cos^2 t-a^2\right|}{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\\&=\frac{b^2\left|a^2\left(\cos^2 t-1\right)-b^2\cos^2 t\right|}{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}=b^2\end{aligned}$$
，得證。

《證法二》代數方法二

$$\because\cos\angle F_1PF_2=\cos\theta=\frac{\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-\left(2c\right)^2}{2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}}$$

$$\Rightarrow \overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=\frac{\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-\left(2c\right)^2}{2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=\frac{\left(\overline{PF_1}+\overline{PF_2}\right)^2-2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}-\left(2c\right)^2}{2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}+\frac{2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}}{2\cos\theta}=\frac{4a^2-4c^2}{2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\left(1+\cos\theta\right)}{\cos\theta}=\frac{2a^2-2c^2}{\cos\theta}=\frac{2b^2}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=\frac{2b^2}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}$$

再由橢圓的<u>光學性質</u>知： $\theta_1=\theta_2$

$$\Rightarrow d_1\cdot d_2=\left(\overline{PF_1}\cdot\sin\theta_1\right)\left(\overline{PF_2}\cdot\sin\theta_2\right)$$

$$=\left(\frac{2b^2}{1+\cos\theta}\right)\cdot\sin^2\theta_1$$

$$=b^2\cdot\left(\frac{2}{1+\cos\theta}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\ (\because\ \theta_1+\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}\ )$$

$=b^2$，得證。

《證法三》幾何方法

如圖(一)：令橢圓焦點 F_1、F_2 在切線 L 的投影點分別為 Q_1、Q_2，
而 Q 為焦點 F_1 關於切線 L 的對稱點，R 為焦點 F_2 在 $\overline{F_1Q}$ 的投影點，
依橢圓的「**光學性質**」可知：焦點 F_2、切點 P 及 Q 三點共線，
且 $\overline{PQ}=\overline{PF_1}$，因此 $\overline{F_2Q}=\overline{F_2P}+\overline{PQ}=\overline{PF_2}+\overline{PF_1}=2a$，
則在直角 ΔQRF_2 及直角 ΔF_1RF_2 中，

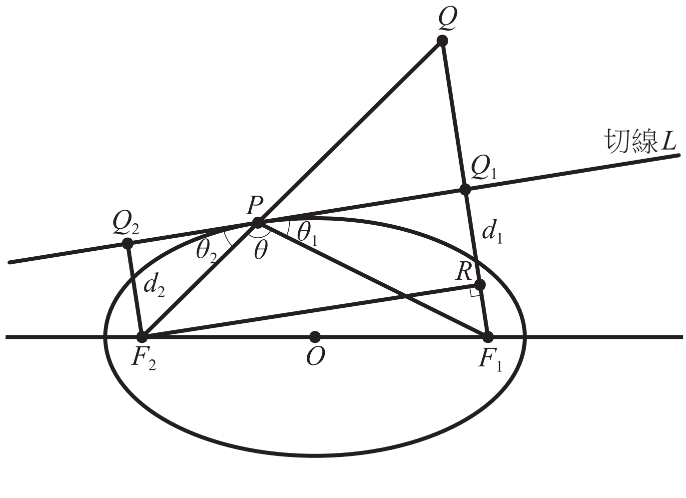
$$\overline{F_2R}^2=\overline{F_2Q}^2-\overline{RQ}^2=\overline{F_1F_2}^2-\overline{RF_1}^2$$

$$\Rightarrow 4a^2-(d_1+d_2)^2=4c^2-(d_1-d_2)^2$$

$$\Rightarrow (d_1+d_2)^2-(d_1-d_2)^2=4a^2-4c^2$$

$$\Rightarrow 4d_1d_2=4b^2$$

$\Rightarrow d_1d_2=b^2$，得證。



圖(一)

※註解：1. 上述《證法一》利用了橢圓方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的參數式為

($a\cos t$，$b\sin t$)，其中 $0\le t<2\pi$，這在現今 99 課綱中，
仍屬於數甲高三上的課程內容；另外《證法一》也同時使用到了
通過橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任一點 $P(x_0,y_0)$ 的切線方程式是：

$\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$，這個定理的證明在過去 95 暫綱的課程中，是將直線方程式

代入圓錐曲線方程式後得到交點方程式，再利用交點方程式的二次判別式為 0

得到的，因為其證明過程相當繁複，所以許多版本都將它列在課本後面的附錄中，但無論如何，它確實是判別式法的延伸，亦即是屬於**代數觀點**（當然此切線方程式亦可利用數甲下的微分法得到）。

2. 上述《證法二》則利用了餘弦定理及橢圓的光學性質，這部分在現今 99 課綱中已經刪除，但在 95 暫綱的課程中，卻是正式的課程內容，因此其證明亦可輕易找到。
3. 上述《證法三》也利用了橢圓的光學性質，巧妙的利用**反射原理**，只用一個式子，即可證明所要的定理。

接下來，我們來看看上述【定理一】的逆定理是否也正確？亦即：若橢圓兩焦點至直線 L 距離的乘積為定數 b^2 ，則直線 L 是否必為橢圓的切線？答案是<u>否定的</u>！現舉一個反例來說明：設橢圓方程式為：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ ，

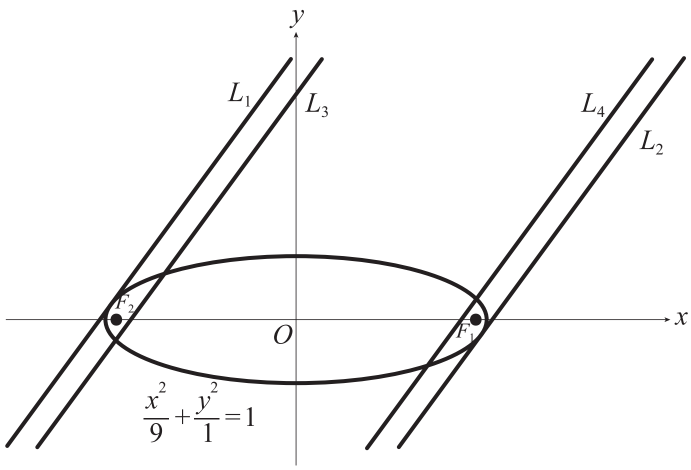
則其 $b^2=1$，兩焦點 F_1 、 F_2 的坐標分別為 $\left(2\sqrt{2},0\right)$ 及 $\left(-2\sqrt{2},0\right)$ ，

現有四條直線分別為：$L_1:x-y+\sqrt{10}=0$ ；$L_2:x-y-\sqrt{10}=0$ ；
$L_3:x-y+\sqrt{6}=0$ ；$L_4:x-y-\sqrt{6}=0$ ，

利用平面中點到直線的距離，可輕易得知：
$$\begin{aligned} & d\left(F_1,L_1\right)\cdot d\left(F_2,L_1\right) \\ &= d(F_1,L_2)\cdot d(F_2,L_2) \\ &= d(F_1,L_3)\cdot d(F_2,L_3) \\ &= d\left(F_1,L_4\right)\cdot d\left(F_2,L_4\right)=1=b^2 \end{aligned}$$ ，

然而，對此橢圓方程式：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ 而言，

其實只有 $L_1:x-y+\sqrt{10}=0$ 及 $L_2:x-y-\sqrt{10}=0$ 才是其切線；
而 $L_3:x-y+\sqrt{6}=0$ 及 $L_4:x-y-\sqrt{6}=0$ 並不是其切線。如圖(二)



圖(二)

那麼，我們該如何建立橢圓與直線的關係判別法則呢？其實很簡單，只要先確定橢圓的兩焦點與給定直線的相對位置即可。現敘述如下：

【定理二】(1) 若直線 L 與橢圓兩焦點連線段 $\overline{F_1F_2}$ 相交（亦即橢圓兩焦點 F_1 及 F_2 位於直線 L 的異側或其上），則直線 L 與橢圓交於兩點。

(2) 若橢圓兩焦點 F_1 及 F_2 位於直線 L 的同側，

且(i) $d\left(F_1,L\right)\cdot d\left(F_2,L\right)<b^2$，則直線 L 與橢圓交於兩點；

(ii) $d\left(F_1,L\right)\cdot d\left(F_2,L\right)=b^2$，則直線 L 與橢圓相切；

(iii) $d\left(F_1,L\right)\cdot d\left(F_2,L\right)>b^2$，則直線 L 與橢圓沒有交點。

※註解：此定理不僅適用於橢圓的方程式為標準式時，即使為非標準式亦適用，所以是個好用的定理。

(二) 雙曲線與直線的關係判別

【定理三】若直線 L 為雙曲線的切線，則雙曲線兩焦點至直線 L 距離的乘積恆為定數 b^2，其中 b^2 為雙曲線共軛軸長之半的平方。

首先，因為長度是旋轉的不變量，所以，不失一般性，將雙曲線方程式設為標準式：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 a,b 皆大於 0，$b^2=c^2-a^2$，則雙曲線的貫軸長為 $2a$，共軛軸長為 $2b$，兩焦點的距離 $\overline{F_1F_2}$ 為 $2c$。

《證法一》代數方法一

設雙曲線方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$F_1\left(c,0\right)$、$F_2\left(-c,0\right)$

為雙曲線兩焦點，$P\,(a\sec t$，$b\tan t\,)$為雙曲線上一動點，其中 $0\le t<2\pi$，

L 為過 P 點的切線，並令 F_1、F_2 到直線 L 的距離分別為 d_1、d_2，

而 $\angle F_1PF_2=\theta$，θ_1、θ_2 為兩焦半徑與切線的夾角。如圖(三)

則切線 L：$\dfrac{a\sec t\cdot x}{a^2}-\dfrac{b\tan t\cdot y}{b^2}=1$

$$\Rightarrow \frac{\sec t\cdot x}{a}-\frac{\tan t\cdot y}{b}=1$$

$$\Rightarrow b\,x\sec t-a\,y\tan t=ab$$

$$\overline{F_1Q_1}=d_1=\frac{\left|bc\cdot\sec t-ab\right|}{\sqrt{b^2\sec^2 t+a^2\tan^2 t}}=\frac{\left|-ab+bc\cdot\sec t\right|}{\sqrt{b^2\sec^2 t+a^2\tan^2 t}}$$

$$\overline{F_2Q_2}=d_2=\frac{\left|-bc\cdot\sec t-ab\right|}{\sqrt{b^2\sec^2 t+a^2\tan^2 t}}=\frac{\left|-ab-bc\cdot\sec t\right|}{\sqrt{b^2\sec^2 t+a^2\tan^2 t}}$$

$$\therefore d_1\cdot d_2=\frac{\left|\left(-ab-bc\cdot\sec t\right)\left(-ab+bc\cdot\sec t\right)\right|}{b^2\sec^2 t+a^2\tan^2 t}$$

$$=\frac{b^2\left|\left(-a-c\cdot\sec t\right)\left(-a+c\cdot\sec t\right)\right|}{b^2\sec^2 t+a^2\tan^2 t}$$

$$=\frac{b^2\left|a^2-c^2\cdot\sec^2 t\right|}{b^2\sec^2 t+a^2\tan^2 t}$$

$$=\frac{b^2\left|a^2-\left(a^2+b^2\right)\sec^2 t\right|}{b^2\sec^2 t+a^2\tan^2 t}$$

$$=\frac{b^2\left|b^2\sec^2 t+a^2\left(\sec^2 t-1\right)\right|}{b^2\sec^2 t+a^2\tan^2 t}$$

$=b^2$，得證。

《證法二》代數方法二

$$\because \cos\angle F_1PF_2=\cos\theta=\frac{\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-(2c)^2}{2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}}$$

$$\Rightarrow \overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=\frac{\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-(2c)^2}{2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=\frac{\left(\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right)^2+2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}-(2c)^2}{2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}-\frac{2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}}{2\cos\theta}=\frac{4a^2-4c^2}{2\cos\theta}=\frac{-4b^2}{2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\left(\cos\theta-1\right)}{\cos\theta}=\frac{-2b^2}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=\frac{-2b^2}{\cos\theta-1}=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$$

再由雙曲線的<u>光學性質</u>知：$\theta_1=\theta_2$，

$$\Rightarrow d_1\cdot d_2=\left(\overline{PF_1}\cdot\sin\theta_1\right)\left(\overline{PF_2}\cdot\sin\theta_2\right)$$

$$=\left(\frac{2b^2}{1-\cos\theta}\right)\cdot\sin^2\theta_1$$

$$=b^2\cdot\left(\frac{2}{1-\cos\theta}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\quad（\because \theta_1=\frac{\theta}{2}）$$

$=b^2$，得證。

《證法三》幾何方法

如圖(三)：令雙曲線焦點F_1、F_2在切線L的投影點分別為Q_1、Q_2，而Q為焦點F_2關於切線L的對稱點，R為焦點F_1在$\overline{F_2Q}$的投影點，依雙曲線的「**光學性質**」可知：焦點F_2、點R及Q三點共線，

且$\overline{PQ}=\overline{PF_2}$，因此$\overline{F_1Q}=\overline{PQ}-\overline{PF_1}=\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a$，

則在直角ΔF_1RQ及直角ΔF_1RF_2中，

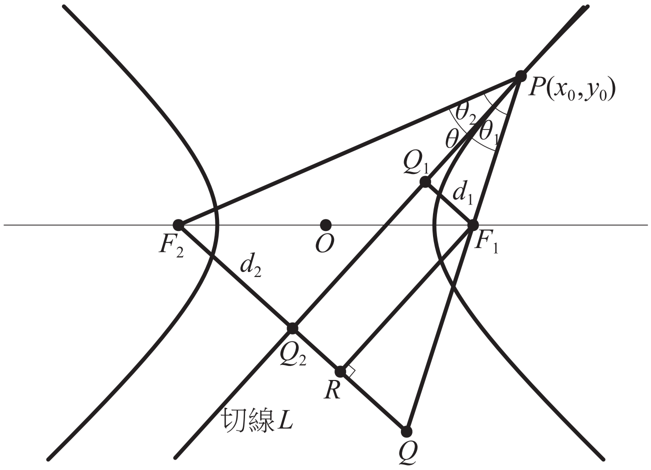
$$\overline{F_1R}^2=\overline{F_1Q}^2-\overline{RQ}^2=\overline{F_1F_2}^2-\overline{RF_2}^2$$

$$\Rightarrow 4a^2-\left(d_1-d_2\right)^2=4c^2-\left(d_1+d_2\right)^2$$

$\Rightarrow (d_1 + d_2)^2 - (d_1 - d_2)^2 = 4c^2 - 4a^2$

$\Rightarrow 4d_1d_2 = 4b^2$

$\Rightarrow d_1d_2 = b^2$ ，得證。



圖(三)

仿上述橢圓與直線的關係，我們來看看【定理三】的逆定理是否也正確？亦即：若雙曲線兩焦點至直線 L 距離的乘積為定數 b^2，則直線 L 是否必為雙曲線的切線？答案也是**否定的**！

現舉一個反例來說明：設雙曲線方程式為：$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$，

則其 $b^2 = 1$，兩焦點 F_1 、 F_2 的坐標分別為 $(\sqrt{5}, 0)$ 及 $(-\sqrt{5}, 0)$，

現有四條直線分別為：$M_1 : x - y + \sqrt{3} = 0$ ；$M_2 : x - y - \sqrt{3} = 0$ ；

$M_3 : x - y + \sqrt{7} = 0$ ；$M_4 : x - y - \sqrt{7} = 0$ ，

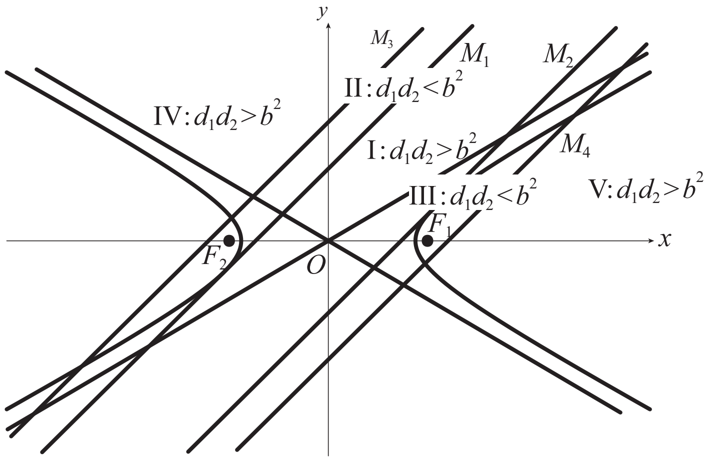
利用平面中點到直線的距離，可輕易得知：

$$\begin{aligned} & d(F_1, M_1) \cdot d(F_2, M_1) \\ &= d(F_1, M_2) \cdot d(F_2, M_2) \\ &= d(F_1, M_3) \cdot d(F_2, M_3) \\ &= d(F_1, M_4) \cdot d(F_2, M_4) = b^2 = 1 \end{aligned}$$ ，

然而，對此雙曲線方程式：$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ 而言，

其實只有 $M_1 : x - y + \sqrt{3} = 0$ 及 $M_2 : x - y - \sqrt{3} = 0$ 才是其切線；

而 $M_3 : x - y + \sqrt{7} = 0$ 及 $M_4 : x - y - \sqrt{7} = 0$ 並不是其切線。如圖(四)



圖(四)

【定理四】(1) 若直線 L 的斜率與雙曲線的兩條漸近線之一的斜率相同，

且(i) $d(F_1, L)\cdot d(F_2, L) = b^2$，則直線 L 為雙曲線的漸近線；

(ii) $d(F_1, L)\cdot d(F_2, L) \neq b^2$，則直線 L 與雙曲線交於一點。

(2) 設雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，直線 L 的斜率為 m、雙曲線的兩條漸近線的斜率分別為 m_1 及 m_2，其中 $m_1 > 0$ 而 $m_2 < 0$，

(i) 若 $m_2 < m < m_1$，則直線 L 與雙曲線交於兩點。

(ii) 若 $m > m_1$ 或 $m < m_2$，而兩焦點 F_1 及 F_2 位於直線 L 的**同側**，則直線 L 與雙曲線交於兩點。

(ⅲ) 若 $m > m_1$ 或 $m < m_2$，而兩焦點 F_1 及 F_2 位於直線 L 的**異側**，

且(a) $d(F_1, L)\cdot d(F_2, L) < b^2$，則直線 L 與雙曲線交於兩點；

(b) $d(F_1, L)\cdot d(F_2, L) = b^2$，則直線 L 與雙曲線相切；

(c) $d(F_1, L)\cdot d(F_2, L) > b^2$，則直線 L 與雙曲線沒有交點。

※註解：此定理不僅適用於雙曲線的方程式為標準式時，即使為非標準式亦能適用，所以也是個好用的定理。

上述定理說明了一個重要的解題觀念及技巧：若要判別雙曲線與直線的關係，雙曲線的兩條漸近線就扮演了很重要的角色。首先一定要先比較給定之直線與雙曲線的兩條漸近線的斜率大小，同時也要考慮雙曲線的兩焦點與給定直線的相對位置，而不是先比較其兩焦點到直線距離的乘積與其共軛軸長之半的平方的大小，否則很容易誤判。我們以上述的圖(四)來稍加說明：

一如圖(四)所示：對雙曲線方程式：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$ 而言，

其實只有 $M_1 : x-y+\sqrt{3}=0$ 及 $M_2 : x-y-\sqrt{3}=0$ 才是其切線，

而 $M_3 : x-y+\sqrt{7}=0$ 及 $M_4 : x-y-\sqrt{7}=0$ 並不是其切線。今我們將 M_1 及 M_2 之間設為Ⅰ區，M_1 及 M_3 之間設為Ⅱ區，M_2 及 M_4 之間設為Ⅲ區，M_3 的左側區域設為Ⅳ區，而 M_4 右側區域設為Ⅴ區，然後依「**平行線法**」，很容易得知：當直線 L：$x-y+k=0$ 在Ⅰ區平行移動時（例如：$x-y=0$），$d(M_1, L)\cdot d(M_2, L) > 1 = b^2$；當直線 L：$x-y+k=0$ 在Ⅱ及Ⅲ區平行移動時，（例如：$x-y\pm 2=0$），$d(M_1, L)\cdot d(M_2, L) < 1 = b^2$；而當直線 L：$x-y+k=0$ 在Ⅳ及

V區平行移動時（例如：$x-y\pm3=0$，此時雙曲線的兩焦點在直線 L 的同側），$d\left(M_1,L\right)\cdot d\left(M_2,L\right)>1=b^2$。

(三) 拋物線與直線的關係判別

我想高中數學老師都知道：當拋物線的方程式為標準式時，要判別拋物線與直線的關係，使用代數的方法，對學生而言其實並不難，亦即只要將直線方程式代入拋物線的標準式後，得到交點方程式，再利用此二次方程式的判別式，很容易就能判別拋物線與直線到底是相割、相切、還是相離。但除了代數的方法，拋物線與直線是否也存在類似於橢圓與直線或雙曲線與直線的關係判別法呢？亦即是否能利用拋物線的焦點到給定直線的距離和某一個幾何量比較大小後，就能判別拋物線與直線的關係？其實利用拋物線的光學性質即可建立所要的判別法則，現敘述如下：

首先，因為長度是旋轉的不變量，所以，不失一般性，將拋物線方程式設為標準式：$y^2=4cx$，其中 $c>0$ 為拋物線的焦距，而 $F(c,0)$ 為拋物線的焦點，$M:x=-c$ 為其準線。

【定理五】 如圖(五)，設直線 L 為拋物線的切線，而 P 為其與拋物線的切點，θ 為焦半徑 $\overline{PF}$ 與切線 L 的夾角，拋物線焦點 F 至直線 L 距離為 d，
則 $d\cdot\sin\theta=c\Leftrightarrow d=c\cdot\csc\theta$。

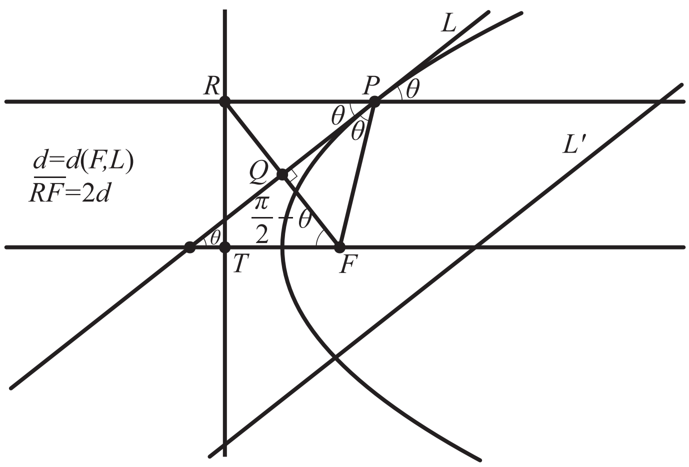
《證明》如圖(五)所示：設拋物線對稱軸與其準線交於 T，現過切點 P 作一條平行線交準線於 R，而 $\overline{RF}$ 交切線 L 於 Q，則依照拋物線的光學原理知：

$\Delta FPQ\cong\Delta RPQ$，$\angle FPQ=\angle RPQ=\theta$，

$\angle PRQ=\dfrac{\pi}{2}-\theta=\angle RFT$，又 $d=\overline{FQ}=\overline{RQ}\Rightarrow\overline{FR}=2d$，

在直角 ΔRFT 中，因為 $\overline{TF}=2c=\overline{RF}\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2d\cdot\sin\theta$，

故 $d\cdot\sin\theta=c\Leftrightarrow d=c\cdot\csc\theta$，得證。



圖(五)

進一步，若拋物線為左右開口型的，設其為 $\Gamma:y^2=4cx$，同時設切線 $L:ax+by+k=0$，則其斜率為 $\tan\theta=-\dfrac{a}{b}$，其中 θ 為切線 L 與 x 軸（拋物線的對稱軸）的夾角，同時也等於 $\angle RPQ$

及 $\angle FPQ$ ，則此時 $\csc\theta = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}$ 。

因此上述定理可改寫成：若直線 $L: ax+by+k=0$ 為拋物線的切線，且設拋物線焦點 F 至直線 L 距離為 d ，則 $d(F,L) = \dfrac{|c|\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}$ ，其中 c 為拋物線的焦距 。至於若拋物線為上下開口型：

$\Gamma: x^2 = 4cy$ ，只要將圖(五)旋轉 90 度即可：若此時設切線 $L: ax+by+k=0$ ，則其斜率為 $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta = -\dfrac{a}{b}$ ，其中 θ 等於 $\angle RPQ$ 及 $\angle FPQ$ ，則此時 $\csc\theta = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$ ，因此上述定理可改寫成：若直線 $L: ax+by+k=0$ 為拋物線的切線，且設拋物線焦點 F 至直線 L 距離為 d ，則 $d(F,L) = \dfrac{|c|\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$ ，其中 c 為拋物線的焦距 。

同樣地，我們緊接著來探討這個定理的逆定理是否正確，亦即當拋物線焦點 F 至直線 L 距離為 d ，且 $d\cdot\sin\theta = c$ （拋物線的焦距）時，則直線 L 是否必為拋物線的切線？這答案也是否定的！這個反例很容易即可得到，只要將原有的切線 L 往焦點 F 方向平行移動 $2d$ 後，即可得到另一條直線 L' 如圖(五)所示，則顯而易見的：焦點 F 至直線 L' 距離亦為 d ，且 $d\cdot\sin\theta = c$ ，但直線 L' 並非拋物線的切線。

那麼，我們該如何建立拋物線與直線的關係判別法則呢？其實很簡單，只要先確定拋物線的焦點與給定直線的相對位置即可。現敘述如下：

【定理六】(1) 若拋物線焦點 F 位於給定直線 L 與拋物線開口方向「相異」的一側，則直線 L 與拋物線交於兩點。

(2) 設拋物線 $\Gamma: (y-k)^2 = 4c(x-h)$ ，直線 $L: ax+by+k=0$ ，若其焦點 F 位於給定直線 L 與拋物線開口方向「相同」的一側，且

(i) $d(F,L) < \dfrac{|c|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}$ ，則直線 L 與拋物線交於兩點；

(ii) $d(F,L) = \dfrac{|c|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}$ ，則直線 L 與拋物線相切；

(iii) $d(F,L) > \dfrac{|c|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}$ ，則直線 L 與拋物線沒有交點。

(3) 設拋物線$\Gamma:(x-h)^2=4c(y-k)$，直線$L:ax+by+k=0$，若其焦點F位於給定直線L與拋物線開口方向「相同」的一側，且

(i) $d(F,L)<\dfrac{|c|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$，則直線$L$與拋物線交於兩點；

(ii) $d(F,L)=\dfrac{|c|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$，則直線$L$與拋物線相切；

(iii) $d(F,L)>\dfrac{|c|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$，則直線$L$與拋物線沒有交點。

※註：上述定理確實僅適用於拋物線的方程式為標準式時，因此當拋物線為非標準式時，除了需先計算焦半徑與切線的夾角θ外，還要利用旋轉的技巧計算出直線L的斜率和$\csc\theta$的關係式。

最後舉一個例子來說明上述定理：設拋物線方程式為$\Gamma: y^2=4x$，
試判斷下列直線與拋物線的相交情形：(1) $L_1: x-2y-6=0$，(2) $L_2: x-2y+3=0$，
(3) $L_3: x-2y+4=0$，(4) $L_4: x-2y+5=0$。

《解》此時拋物線的焦點$F(1,0)$，而焦距$c=1$，且開口向右，
上述直線其x及y的係數均分別為$a=1$，$b=-2$

因此$\dfrac{|c|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}=\dfrac{1\cdot\sqrt{1^2+2^2}}{1}=\sqrt{5}$，

(1) 將拋物線的焦點$F(1,0)$代入$L_1: x-2y-6=0$可得：$1-0-6<0$，焦點$F(1,0)$位於直線$L_1: x-2y-6=0$的左側，與拋物線開口相反，
故直線$L_1: x-2y-6=0$與拋物線$\Gamma: y^2=4x$交於兩點。
此題若未先確認焦點$F(1,0)$與給定直線$L_1: x-2y-6=0$的相對位置，僅單單計算$d(F,L_1)=\dfrac{|1-0-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}=\dfrac{|c|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}$，就會誤以為直線$L_1$是拋物線的一條切線呢！

(2) 仿上，將拋物線的焦點$F(1,0)$分別代入直線L_2、L_3及L_4的方程式，可得知：焦點F均位於直線L_2、L_3及L_4的右側，與拋物線開口相同，因此，接下來再分別計算：$d(F,L_2)=\dfrac{|1-0+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}<\dfrac{|c|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}$，

$$d(F,L_3)=\frac{|1-0+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}=\frac{|c|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}，$$

$$d(F,L_4)=\frac{|1-0+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}>\frac{|c|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}\ ,$$

故直線 $L_2: x-2y+3=0$ 與拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 交於兩點，

直線 $L_3: x-2y+4=0$ 與拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 相切，

直線 $L_4: x-2y+5=0$ 與拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 沒有交點。

三、結語》

這幾年有關圓錐曲線這個主題的重要性是逐年的遞減，過往圓錐曲線這個單元在高中數學之所以被重視，是將之視為高中數學中「**解析幾何**」集大成的單元。高中生在學習圓錐曲線時，須對圖形的解析及代數工具（尤其是三角函數與向量）都要有相當的熟悉度及連結技巧，才能學好。但在 99 課綱實施後，此單元的重要性僅列為一顆星，在大學指考中不再列為出題的單元（數甲及數乙皆然），而前年 103 學測沒有圓錐曲線的試題，去年（104 年）的學測則只有出了一題「雙曲線」的題目，這樣的改變，或許跟圓錐曲線與大學基礎數學（包含微積分與線性代數）的銜接沒有太大的關連有關吧。而圓錐曲線和直線的關係更是在第四冊中被全數刪除了，即使是數甲高三下的微分應用單元，處理的也只有圓錐曲線的切線問題。其實，有關圓錐曲線和直線的關係，雖是古典幾何中古老的主題，但對於解析幾何的學習確實是很好的思考及解題訓練，尤其是圓錐曲線的光學性質更是極佳的思考建構及生活應用的主題。所以，個人建議針對特色課程或資優班的學生，圓錐曲線和直線的關係及其光學性質，是應列入教授及研討的主題。也期待這篇文章能成為高中數學教師們的一點點參考或幫助。感恩！

參考資料：

1. 余文卿（民 98），1-5 圓錐曲線的光學性質，高中數學第四冊，第 71～84 頁，翰林出版社。
2. 李岳洲，廖晟峰，莊健祥（民國 100 年 3 月），橢圓及雙曲線焦點三角形的相關幾何量，數學傳播，第 37 卷第一期，第 75～82 頁。

兩個一元一次絕對值方程式的探討

鍾國華／臺北市協和祐德高中

一、前言》

高中數學第一冊第 1-2 節課本例題：「郊區有一筆直的路段設有水廠與電廠各一座，設其在數線上的坐標分別以 $A(-2)$ 、 $B(4)$ 表示。為了回饋沿路居民，水電的基本費計算方式為：「住戶到電廠距離的 2 倍加上住戶到水廠的距離為該用戶的水電基本費。」試求該路段基本費不超過 15 元的區域範圍？（註 1）

在解決許多實際問題時，通常我們會以絕對值來表示兩點的距離，根據問題的限制條件，可以形成兩個一元一次絕對值不等式：

設該路段上的住家坐標為 $P(x)$ ，則 $\overline{PA}+2\overline{PB}\le 15$ ，即 $|x+2|+2|x-4|\le 15$ 。

在處理絕對值不等式，可以先從絕對值方程式著手，再看不等式的範圍：

1. 一元一次絕對值方程式：若 $|x|=k$ ，則 $x=\pm k$ 。
2. 一元一次絕對值不等式：設 $k>0$ ，
   (1) 若 $|x|\le k$ ，則 $-k\le x\le k$ ；(2)若 $|x|\ge k$ ，則 $x\le -k$ 或 $x\ge k$ 。

同理：2 個一元一次絕對值方程式 $|x-a|+|x-b|=t$ ，先求出分界點後，再求不等式 $|x-a|+|x-b|\le t$ 的範圍，解法較為簡單易懂。而其解法有：分段討論法、圖解法及常數判別法。目前課本只教分段討論法，因學生在處理不等式常弄錯範圍，本文提出圖解法及常數判別法，可補救教學的不足。

二、【型 1】$m|x-a|+n|x-b|=t$（兩個外分點）的探討》

(一) 分段討論法

1. 分段討論法：$m|x-a|+n|x-b|=t$
   (1) 令 $x-a=0$ ， $x-b=0$ ；(2)討論 a 、 b 三段範圍的聯立解。
2. 例題 1：求方程式 $|x+2|+2|x-4|=15$ 的解？
   解：令 $x+2=0$ ， $x-4=0$ ，討論三段範圍：$-(-2)-(4)-$
   (1) 當 $x\ge 4$ 時，$(x+2)+2(x-4)=15$ ， $x=7$ 。
   (2) 當 $-2\le x<4$ 時，$(x+2)-2(x-4)=15$ ， $x=-5$（不合）。
   (3) 當 $x<-2$ 時，$-(x+2)-2(x-4)=15$ ， $x=-3$ 。
   (4) 由上述三式得解： $x=7$ 或 $x=-3$ 。
3. 例題 2：求方程式 $2|x+1|+|x-3|=8$ 的解？
   解：令 $x+1=0$ ， $x-3=0$ ，討論三段範圍：$-(-1)-(3)-$
   (1) 當 $x\ge 3$ 時， $2(x+1)+(x-3)=8$ ， $x=3$ 。
   (2) 當 $-1\le x<3$ 時， $2(x+1)-(x-3)=8$ ， $x=3$（不合）。

(3) 當 $x<-1$ 時，$-2(x+1)-(x-3)=8$，$x=-\frac{7}{3}$。

(4) 由上述三式得解：$x=3$ 或 $x=-\frac{7}{3}$。

4. 延伸不等式：

〔練習 1〕求不等式：$|x+2|+2|x-4|\le 15$ 的範圍？　ANS：$-3\le x\le 7$。

〔練習 2〕求不等式：$|x+2|+2|x-4|\ge 15$ 的範圍？　ANS：$x\le -3$ 或 $x\ge 7$。

〔練習 3〕求不等式：$2|x+1|+|x-3|\le 8$ 的範圍？　ANS：$-\frac{7}{3}\le x\le 3$。

〔練習 4〕求不等式：$2|x+1|+|x-3|\ge 8$ 的範圍？　ANS：$x\le -\frac{7}{3}$ 或 $x\ge 3$。

(二) 圖解法

1. 方程式：$m|x-a|+n|x-b|=t$，且 m、n 為正整數。令數線上點 $P(x)$、$A(a)$、$B(b)$，則 $m\overline{PA}+n\overline{PB}=t$，表示 P 點到 A 點占 m 段，P 點到 B 點占 n 段，$(m+n)$ 段總長度的和為 t。

2. 例題 1：求方程式 $|x+2|+2|x-4|=15$ 的解？

解：令數線上點 $P(x)$、$A(-2)$、$B(4)$，則 $\overline{PA}+2\overline{PB}=15$，表示 P 點到 A 點占 1 段，P 點到 B 點占 2 段，如圖(一)。

圖(a)：因 $\overline{AB}=4-(-2)=6$，三段總和為 15，$\overline{PB}=(15-6)\div 3$ 段 $=3$，

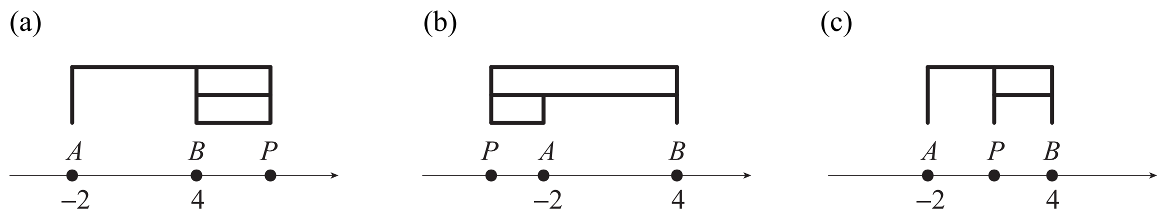
故 $x=4+3=7$。

圖(b)：因 $2\overline{AB}=2[4-(-2)]=12$，三段總和為 15，$\overline{PA}=(15-12)\div 3$ 段 $=1$，

故 $x=-2-1=-3$。

圖(c)：因 $\overline{AB}=4-(-2)=6$，三段總和為 15，P 點在 $\overline{AB}$ 之間不合理。

解答：$x=7$ 或 $x=-3$。



圖(一)　點 P 的位置圖（兩個外分點）

3. 例題 2：求方程式 $2|x+1|+|x-3|=8$ 的解？

解：令數線上點 $P(x)$、$A(-1)$、$B(3)$，則 $2\overline{PA}+\overline{PB}=8$，表示 P 點到 A 點占 2 段，P 點到 B 點占 1 段，如圖(二)。

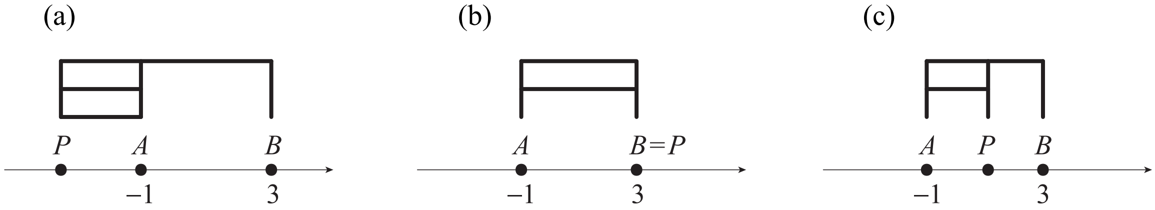
圖(a)：因 $\overline{AB}=3-(-1)=4$，三段總和為 8，$\overline{PA}=(8-4)\div 3$ 段 $=\dfrac{4}{3}$，

故 $x=-1-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{7}{3}$。

圖(b)：因 $2\overline{AB}=2\left[3-(-1)\right]=8$，三段總和為 8，$\overline{PB}=0$，即 P 點＝ B 點，$x=3$。

圖(c)：因 $\overline{AB}=3-(-1)=4$，三段總和為 8，P 點在 $\overline{AB}$ 之間不合理。

解答：$x=-\dfrac{7}{3}$ 或 $x=3$。



圖(二) 點 P 的位置圖（兩個外分點）

(三) 常數判別法及分點公式證明

1. 常數判別法：$m|x-a|+n|x-b|=t$，且 m、n 為正整數。令 $x-a=0$，$x-b=0$，比較 t 與 $|a-b|$ 大小。
   (1) 當 $t>|a-b|$ 時，則恰有兩解：

   ①若 $t\ge 2|a-b|$ 時，則有 2 個外分點，其解為 $x=\dfrac{ma+nb}{m+n}\pm\dfrac{t}{m+n}$。

   ②若 $|a-b|<t<2|a-b|$ 時，則有一為內分點 $x=\dfrac{ma-nb}{m-n}\pm\dfrac{t}{m-n}$（取 $Max(m,n)$ 決定），另一為外分點 $x=\dfrac{ma+nb}{m+n}\pm\dfrac{t}{m+n}$。（註：內、外分點加減號相反）

   (2) 當 $t=|a-b|$ 且 $m=n$ 時，設 $a<b$，則有無限多解，其解為 $a\le x\le b$。

   註：當 $t=|a-b|$ 且 $m\ne n$ 時，則恰有一解(內分點)，其解 $x=\dfrac{ma-nb}{m-n}\pm\dfrac{t}{m-n}$。

   (3) 當 $t<|a-b|$ 時，則無解。

   (4) 注意：當 $m=n$ 時，化為係數為 1。

2. 外分點公式證明：令數線上點 $P(x)$、$A(a)$、$B(b)$，
   (1) 當 $a<b<x$ 時，$m|x-a|+n|x-b|=t$，則 $m(x-a)+n(x-b)=t$，

   得 $x=\dfrac{ma+nb}{m+n}+\dfrac{t}{m+n}$。

   (2) 當 $x<a<b$ 時，$m|x-a|+n|x-b|=t$，則 $-m(x-a)-n(x-b)=t$，

   得 $x=\dfrac{ma+nb}{m+n}-\dfrac{t}{m+n}$。

故外分點公式，其解為 $x=\dfrac{ma+nb}{m+n}\pm\dfrac{t}{m+n}$ 。

3. 內分點公式證明：令數線上點 $P(x)$ 、 $A(a)$ 、 $B(b)$ ，

(1) 當 $a<x<b$ 時， $m|x-a|+n|x-b|=t$ ，則 $m(x-a)-n(x-b)=t$ ，

得 $x=\dfrac{ma-nb}{m-n}+\dfrac{t}{m-n}$ 。

(2) 當 $b<x<a$ 時， $m|x-a|+n|x-b|=t$ ，則 $-m(x-a)+n(x-b)=t$ ，

得 $x=\dfrac{ma-nb}{m-n}-\dfrac{t}{m-n}$ 。

故內分點公式，其解為 $x=\dfrac{ma-nb}{m-n}\pm\dfrac{t}{m-n}$ 。

4. 例題 1：求方程式 $|x+2|+2|x-4|=15$ 的解？

解：設 $P(x)$ 、 $A(-2)$ 、 $B(4)$ ， $t=15$ ，因 $15>2|-2-4|$ ，有 2 個外分點，

$x=\dfrac{-2+8}{1+2}\pm\dfrac{15}{1+2}$ ，即 $x=-3$ 或 $x=7$ 。

5. 例題 2：求方程式 $2|x+1|+|x-3|=8$ 的解？

解：設 $P(x)$ 、 $A(-1)$ 、 $B(3)$ ， $t=8$ ，因 $8=2|3-(-1)|$ ，有 2 個外分點，

$x=\dfrac{-2+3}{2+1}\pm\dfrac{8}{2+1}$ ，即 $x=3$ 或 $x=-\dfrac{7}{3}$ 。

6. 當 m 、 n 不為整數時，去分母，同乘分母最小公倍數。

例題 3：求方程式 $\dfrac{1}{2}|x-3|+\dfrac{1}{2}|x-5|=1$ 的解？

解：本題 m 、 n 有分數，去分母，同乘 2： $|x-3|+|x-5|=2$ ， $a=3$ ， $b=5$ ， $t=2$ ，
因 $t=|a-b|$ ，無限多解，其解為 $3\le x\le 5$ 。

7. 當 $m=n$ 時，化為係數為 1。

例題 4：求方程式 $100|x-3|+100|x-5|=9$ 的解？

解：本題 $m=n=100$ ，同除以 100： $|x-3|+|x-5|=0.09$ ， $a=3$ ， $b=5$ ， $t=0.09$ ，
因 $t<|a-b|$ ，無解。

8. 延伸題型：

〔練習 1〕求方程式 $|x+5|+|x-3|=8$ 的解？　ANS：因 $t=|a-b|$ ，解為 $-5\le x\le 3$ 。

〔練習 2〕求方程式 $|x-3|+2|x+1|=4$ 的解？　ANS： $t=|a-b|$ 且 $m\ne n$ ，解為 $x=-1$ 。

〔練習 3〕求方程式 $|x+5|+|x-3|=7$ 的解？　ANS：因 $t<|a-b|$ ，無解。

三、【型 2】$|mx-a|+|nx-b|=t$（有內分點及外分點）的探討

(一) 分段討論法

1. 例題 1：求方程式$|2x+1|+|x-3|=5$的解？

   解：令 $2x+1=0$ ， $x-3=0$ ，討論三段範圍：$-\left(-\frac{1}{2}\right)-(3)-$

   (1) 當$x\geq 3$時，$(2x+1)+(x-3)=5$ ， $x=\frac{7}{3}$(不合)。

   (2) 當$-\frac{1}{2}\leq x<3$時，$(2x+1)-(x-3)=5$ ， $x=1$ 。

   (3) 當$x<-\frac{1}{2}$時，$-(2x+1)-(x-3)=5$ ， $x=-1$ 。

   (4) 由上述三式得解： $x=1$或-1

2. 例題 2：求方程式$|x+3|+|2x-5|=10$的解？

   解：令 $x+3=0$ ， $2x-5=0$ ，討論三段範圍：$-(-3)-\left(\frac{5}{2}\right)-$

   (1) 當$x\geq\frac{5}{2}$時，$(x+3)+(2x-5)=10$ ， $x=4$ 。

   (2) 當$-3\leq x<\frac{5}{2}$時，$(x+3)-(2x-5)=10$ ， $x=-2$ 。

   (3) 當$x<-3$時，$-(x+3)-(2x-5)=10$ ， $x=-\frac{8}{3}$(不合)。

   (4) 由上述三式得解： $x=4$或$x=-2$ 。

3. 延伸不等式：

   〔練習 1〕求不等式：$|2x+1|+|x-3|\leq 5$的範圍？　ANS： $-1\leq x\leq 1$ 。

   〔練習 2〕求不等式：$|2x+1|+|x-3|\geq 5$的範圍？　ANS： $x\leq -1$或$x\geq 1$ 。

   〔練習 3〕求不等式：$|x+3|+|2x-5|\leq 10$的範圍？　ANS： $-2\leq x\leq 4$ 。

   〔練習 4〕求不等式：$|x+3|+|2x-5|\geq 10$的範圍？　ANS： $x\leq -2$或$x\geq 4$ 。

(二)圖解法

1. 例題 1：求方程式$|2x+1|+|x-3|=5$的解？

   解：因x係數為 1，原式化為$2\left|x+\frac{1}{2}\right|+|x-3|=5$ ，令數線上點$P(x)$ 、 $A\left(-\frac{1}{2}\right)$ 、 $B(3)$ ，則

   $2\overline{PA}+\overline{PB}=5$ ，表示P點到A點占 2 段，P點到B點占 1 段，如圖(三)。

   圖(a)：因$\overline{AB}=3-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$ ，三段總和為 5，$\overline{AP}=5-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$ ，

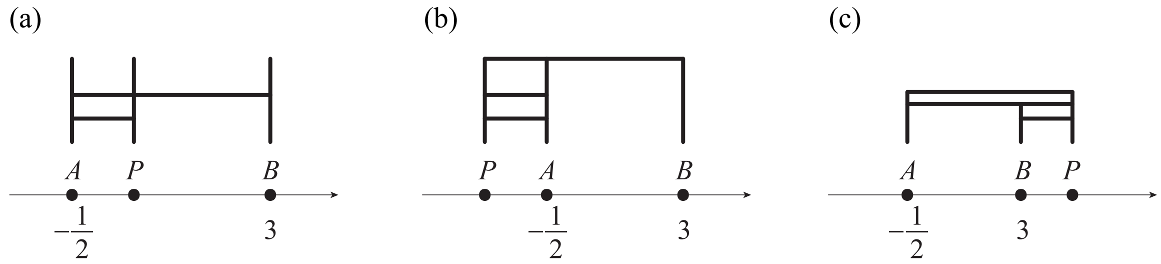
   故$x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$ 。

圖(b)：因 $\overline{AB}=3-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{2}$ ，三段總和為 5，$\overline{PA}=\left(5-\dfrac{7}{2}\right)\div 3$ 段$=\dfrac{1}{2}$ ，

故 $x=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-1$ 。

圖(c)：因 $\overline{AB}=3-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{2}$ ，三段總和為 $5<2\times\dfrac{7}{2}$ 不合理。

解答： $x=1$ 或 $x=-1$ 。



圖(三)　點 P 的位置圖（有內分點及外分點）

2. 例題 2：求方程式 $|x+3|+|2x-5|=10$ 的解？

解：因 x 係數為 1，原式化為 $|x+3|+2\left|x-\dfrac{5}{2}\right|=10$ ，令數線上點 $P(x)$ 、 $A(-3)$ 、 $B\left(\dfrac{5}{2}\right)$ ，則

$\overline{PA}+2\overline{PB}=10$ ，表示 P 點到 A 點占 1 段，P 點到 B 點占 2 段，如圖(四)。

圖(a)：因 $\overline{AB}=\dfrac{5}{2}-(-3)=\dfrac{11}{2}$ ，三段總和為 10，$\overline{PB}=10-\dfrac{11}{2}=\dfrac{9}{2}$ ，

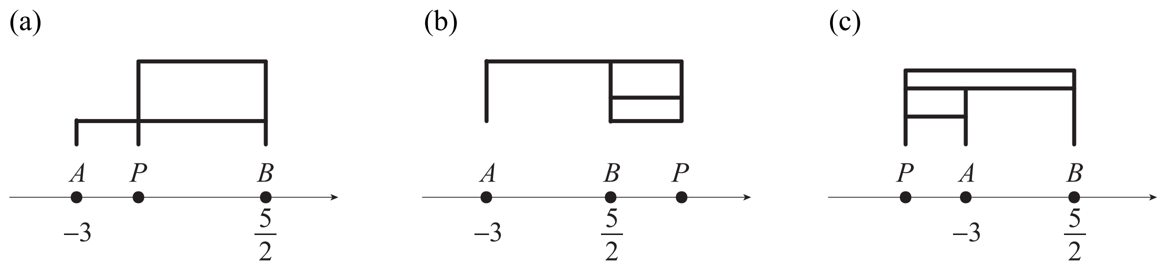
故 $x=\dfrac{5}{2}-\dfrac{9}{2}=-2$ 。

圖(b)：因 $\overline{AB}=\dfrac{5}{2}-(-3)=\dfrac{11}{2}$ ，三段總和為 10，$\overline{PB}=\left(10-\dfrac{11}{2}\right)\div 3$ 段$=\dfrac{3}{2}$ ，

故 $x=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}=4$ 。

圖(c)：因 $\overline{AB}=\dfrac{5}{2}-(-3)=\dfrac{11}{2}$ ，三段總和為 $10<2\times\dfrac{11}{2}$ 不合理。

解答： $x=-2$ 或 $x=4$ 。



圖(四)　點 P 的位置圖（有內分點及外分點）

(三)常數判別法及分點公式

1. 常數判別法：$|mx-a|+|nx-b|=t$ ，且 m 、 n 為正整數。原式要先化為

$m\left|x-\frac{a}{m}\right|+n\left|x-\frac{b}{n}\right|=t$，則與$m|x-a|+n|x-b|=t$的判別及解法相同。

2. 例題 1：求方程式$|2x+1|+|x-3|=5$的解？

解：原式化為$2\left|x+\frac{1}{2}\right|+|x-3|=5$，設$P(x)$、$A\left(-\frac{1}{2}\right)$、$B(3)$，$t=5$，

因$\left|3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<5<2\times\left|3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$，則有內分點及外分點：

(1)內分點（點$A\left(-\frac{1}{2}\right)$右移）：$x=\frac{-1-3}{2-1}+\frac{5}{2-1}=1$。

(2)外分點（點$A\left(-\frac{1}{2}\right)$左移）：$x=\frac{-1+3}{2+1}-\frac{5}{2+1}=-1$。

解答：$x=1$或$x=-1$。

3. 例題 2：求方程式$|x+3|+|2x-5|=10$的解？

解：原式化為$|x+3|+2\left|x-\frac{5}{2}\right|=10$，設$P(x)$、$A(-3)$、$B\left(\frac{5}{2}\right)$，$t=10$，

因$\left|\frac{5}{2}-(-3)\right|<10<2\times\left|\frac{5}{2}-(-3)\right|$，則有內分點及外分點：

(1)內分點（點$B\left(\frac{5}{2}\right)$左移）：$x=\frac{5+3}{2-1}-\frac{10}{2-1}=-2$。

(2)外分點（點$B\left(\frac{5}{2}\right)$右移）：$x=\frac{-3+5}{1+2}+\frac{10}{1+2}=4$。

解答：$x=-2$或$x=4$。

四、結論》

因為高中數學課本第一冊 1-2 節主要介紹分段討論法，求 2 個一元一次絕對值方程式，計算繁瑣；且學生在 2 個一元一次絕對值不等式的範圍限制上，常常弄錯範圍。建議採用常數判別法，即判定t與$|a-b|$的大小後，即可決定解的類型，計算簡單易懂。圖解法可幫助學生了解兩點之間的距離關係，若先用常數判別法判定解的類型後，再用圖解法決定要畫內分點或外分點，計算才簡單，非常值得學生參考運用。

一般講義在介紹兩個絕對值$|x-a|+|x-b|=t$時，先令$x-a=0$，$x-b=0$，再比較t與$|a-b|$大小：(1)當$t>|a-b|$時，恰有兩解；(2)當$t=|a-b|$，有無限多解；(3)當$t<|a-b|$時，無解。然而本文在探討常數判別法，擴大為$m|x-a|+n|x-b|=t$，且m、n為正整數。意外發現，規則有些不同，請參考〔型 1〕常數判別法及分點公式的規則與證明。

參考資料：

1. 許志農（104），高中數學第一冊第一章第二節，新北市：龍騰文化事業公司，P.29。
2. 林福來（104），高中數學第一冊第一章第二節，臺南市，南一書局企業股份有限公司，P.37。
3. 鍾國華，高中數學第一冊講義，臺北市協和祐德高中。

丟番圖方程式

江慶昱／衛道中學退休老師

一、問題的來源》

「邊長為 3、5、7 的三角形中，三內角中的最大角為$120°$」。

這是高二邊角關係這個單元中的一個簡單的例子，由餘弦定理可得到。

它的後面接了一個習作：

「三角形的三邊長為$a=2t+1$，$b=t^2-1$，$c=t^2+t+1$，則$\angle C=$？」

由餘弦定理可以求得$\angle C=120°$。取$t=2$即得前述的 3 個邊長 3、5、7。

最大角為$120°$的三角形，三邊長為x、y、z。若$120°$角所對的邊長為z，則

$z^2=x^2+y^2-2xy\cos 120°=x^2+y^2+xy$

我的疑問是：

「$z^2=x^2+y^2+xy$的一般解是否即為$x=2t+1$，$y=t^2-1$，$z=t^2+t+1$，其中$(x,y,z)=1$」？

二、遇見資優生》

2002 年左右，上午，衛道中學。

上課中偶然心血來潮，想到$3^2+4^2+12^2=13^2$，於是請學生多找幾個例子，使滿足$x^2+y^2+z^2=t^2$。

下課後，桌上擺了兩張紙，一張上面只有簡單一行，寫著：

$y=x+1$，$z=x(x+1)$，$t=x(x+1)+1$

另一張紙上寫著:

1，4，9，16，25，36，49，64，81，100，121，144，169，196，225，256，289，324，361，400，441，484，529，576，625……所以有

$2^2+10^2+11^2=15^2$

$8^2+9^2+12^2=17^2$

$1^2+4^2+8^2=9^2$

$4^2+5^2+20^2=21^2$

前者找出部分解，後者由演算直接找到一些解，雖然不是完整的解答，但是對國三學生而言，實屬難得。這是 10 多年前的舊事，這兩位學生後來都進入了一中資優班。

三、所謂丟番圖方程式》

一般而言，若$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$是一個多變數的整係數多項式，求$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0$的所有整數解就是丟番圖問題。

求 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 的一般解（正整數解）就是一個丟番圖問題。

直角三角形 ABC 中，$z^2=x^2+y^2$ 這稱為畢氏定理或商高定理，盧米斯（Elisha Scott Loomis1852~1940）在畢達哥拉斯命題（Pythagorean Proposition）一書中提到 370 種證法。

滿足 $x^2+y^2=z^2$ 的正整數稱為畢氏數，畢氏數的一般解（所有解）為何？

希臘數學家丟番圖（Diophantus 約 246~330）得到一般解：

$x=2mn$，$y=m^2-n^2$，$z=m^2+n^2$；其中 $(m,n)=1$，且 $m>n$；當然假設 $(x,y,z)=1$

四、求 $z^2=x^2+y^2$ 的一般解》

當然假設 $(x,y,z)=1$

第一種解法：

$(\frac{z}{x})^2-(\frac{y}{x})^2=1$，$(\frac{z}{x}+\frac{y}{x})(\frac{z}{x}-\frac{y}{x})=1$

此式表示 $\frac{z}{x}+\frac{y}{x}$ 與 $\frac{z}{x}-\frac{y}{x}$ 互為倒數

令 $\frac{z}{x}+\frac{y}{x}=\frac{m}{n}$，$\frac{z}{x}-\frac{y}{x}=\frac{n}{m}$，則 $\frac{z}{x}=\frac{1}{2}(\frac{m}{n}+\frac{n}{m})=\frac{m^2+n^2}{2mn}$，$\frac{y}{x}=\frac{1}{2}(\frac{m}{n}-\frac{n}{m})=\frac{m^2-n^2}{2mn}$

取 $x=2mn$，則 $y=m^2-n^2$，$z=m^2+n^2$，此即為畢氏數的一般解。

第二種解法：

設 $z=y+k$，則 $z^2-y^2=k(2y+k)$

設 $k=p^2r$ 其中 p 是 k 的最大平方因數，

則 $z^2-y^2=x^2=p^2r\left(2y+p^2r\right)$

$r\,|\,2y+p^2r$，所以 $r\,|\,2y$

若 $r\,|\,y$ 則 $r\,|\,(x,y,z)$，此時 $r=1$。所以 $r=1$ 或 $r=2$

(1) $r=1$ 時

$x^2=p^2\left(2y+p^2\right)$ 令 $2y+p^2=q^2$，則 $y=\frac{q^2-p^2}{2}$，$x=pq$，$z=\frac{q^2+p^2}{2}$

若 p，q 皆偶數，則 x，y，z 皆偶數不合；若 p，q 一奇一偶，則 y 不是整數，不合；所以 p，q 皆奇數，因為 x 是奇數所以 y 是偶數。

令 $q+p=2m$，$q-p=2n$，則 $q=m+n$，$p=m-n$，得到

$x=m^2-n^2$，$y=2mn$，$z=m^2+n^2$

(2) $r=2$ 時

$x^2=2p^2(2y+2p^2)=4p^2(y+p^2)$ 令 $y+p^2=q^2$

則 $y=q^2-p^2$，$x=2pq$，$z=q^2+p^2$，我們把符號換一下，令 $m=q\,,n=p$，則

$x=2mn$，$y=m^2-n^2$，$z=m^2+n^2$

由(1)(2)得解（或者參看參考資料(2)。）

五、求$z^2=x^2+y^2+xy$的一般解》

引理：

「若x，y，z滿足$z^2=x^2+xy+y^2$，則mx，my，mz滿足$z^2=x^2+xy+y^2$。反之亦成立。」

一、中提到$x=2t+1$，$y=t^2-1$，$z=t^2+t+1\cdots(1)$滿足$x^2+xy+y^2=z^2$

取$t=\frac{m}{n}$，則$x=2t+1=\frac{2mn+n^2}{n^2}$，$y=t^2-1=\frac{m^2-n^2}{n^2}$，$z=\frac{m^2+mn+n^2}{n^2}$

由引理，$x=2mn+n^2$，$y=m^2-n^2$，$z=m^2+mn+n^2$也是$x^2+xy+y^2=z^2$的解$\cdots(2)$

解(1)(2)，看起來形式上有很強的關聯性。確實關係為何？

我再次請教康明昌教授：

「教授在參考資料(2)中提到三次分圓體（Cyclotomic Field $Q(\omega)$裡面的「整數」。則$z^2=x^2+y^2+xy=(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$，其中$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$。是否可由$Z[\omega]$求得$z^2=x^2+y^2+xy$的一般解？」

以下是康教授的回函：

「Define u=x/z, v=y/z. Then u^2+uv+v^2= 1. This is the same as the norm of x:=u- \omega v =1. By Hilbert Theorem 90. There is an element y:=s-\omega t \in Q(\omega) such that x=y/y' where y'= s-\omega^2 t.」

我把它改寫成如下：

設$Q(r):=Q$的擴張體，其中r滿足$x^2-x+1=0$

則$x^2-x+1=(x-r)(x-\bar{r})$，$r+\bar{r}=1$，$r\bar{r}=1$

$$N(\frac{x+ry}{z})=(\frac{x+ry}{z})(\frac{x+\bar{r}}{z})=1$$

由 Hilbert 定理 90：存在某個$a\in(Q(r))^*$使得$\frac{x+ry}{z}=\frac{a}{\bar{a}}$

因此存在$s\in$Z，使得$\frac{x+ry}{z}=\frac{a}{\bar{a}}=\frac{as}{\overline{as}}$，$as\in$Z$[r]$，令$as=m+nr$，其中$m$、$n$是整數

因此$\frac{x+ry}{z}=\frac{a}{\bar{a}}=\frac{as}{\overline{as}}=\frac{m+rn}{m+\bar{r}n}=\frac{m+rn}{m+(1-r)n}=\frac{(m+rn)^2}{m^2+mn+n^2}=\frac{(m^2-n^2)+r(2mn+n^2)}{m^2+mn+n^2}$

因為$(x,y,z)=1$，所以$x=m^2-n^2$，$y=2mn+n^2$，$z=m^2+mn+n^2$是原丟番圖方程式的一般解。

所以由$x=2t+1$，$y=t^2-1$，$z=t^2+t+1$到$x=2mn+n^2$，$y=m^2-n^2$，$z=m^2+mn+n^2$是正確的，只是中間需有一個代數數論的鋪陳。

六、習作》

1. 設直角△ABC 的三邊長分別為 a ，b ，c ，且 $a<b<c$ 。若 $\dfrac{b}{c+a}-\dfrac{a}{c+b}=\dfrac{1}{6}$ ，則 a ：b ：$c=$

   （建中通訊解題 84 期）
2. 滿足 $z^2=x^2+y^2$ ，$(x,y,z)=1$ ，的正整數解中，(1) x 、 y 一個是奇數，另一個是偶數。

   (2) x 、 y 至少有一個是 3 的倍數。試證之。
3. 求一組非零的有理數 x ， y 滿足 $x^2-26y^2=1$
4. 試證對任意正整數 a ，存在異於 a 的正整數 b 、 c 使得 a^2 、 b^2 、 c^2 成等差數列（104 年關西高中教師甄試）

◇解答◇

1. 令 $a=m^2-n^2$ ， $b=2mn$ ， $c=m^2+n^2$ 代入原式 可以化簡得 $7m^2-11mn-6n^2=0$

   $(m-2n)(7m+3n)=0$ ， $m=2n$ ，則 $a=3n^2$ ， $b=4n^2$ ， $c=5n^2$

   所以 $a:b:c=3:4:5$
2. 略
3. 略
4. $2b^2=a^2+c^2$ ，$(2b)^2=(c+a)^2+(c-a)^2$ ；$2b=\left(m^2+n^2\right)k$ ，$c+a=\left(m^2-n^2\right)k$ ，

   $c-a=2mnk$ ；$a=(\dfrac{m^2-2mn-n^2}{2})k$ ，$b=(\dfrac{m^2+n^2}{2})k$ ，$c=(\dfrac{m^2+2mn-n^2}{2})k$

   取 $k=a$ ， $m=3$ ， $n=1$ ，可得 $b=5a$ ，$c=7a$

七、後記》

密碼學與數論有密切的關係，所以現在不會再有人質疑數論的實用性。

從畢氏數到 1996 年費馬最後定理的證明是一頁耀眼的數論發展史，想必也不會有人懷疑數論的深刻性。

高中數學 95 課程綱要中，高一有關初等數論（因數倍數）的部分在 99 課程綱要中被刪除了。因此第二章中方程式論裡，牛頓定理（整係數一次因是檢驗法）的證明也只能擺在附錄中，個人覺得有點遺憾。

不定方程式 $ax+by=c$ ，佩爾（Pell）方程式 $x^2-ny^2=1$ 的解已有定論。解決一道丟番圖方程式 $x^2+xy+y^2=z^2$ 對我而言就像下了一盤圍棋，是一個不錯的心靈遊戲。 $x^2+Axy+By^2=z^2$ 的一般解請看參考資料(3)。

至於二、中， $x^2+y^2+z^2=t^2$ 的一般解為何，謹就教於各位賢達了。

參考資料：

1. 代數學之父 http://episte.math.ntu.edu.tw/people/p_diophantus/index.html
2. 費馬問題 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_07_4_01/ 康明昌
3. 畢氏數與 Hilbert Theorem 90 http://www.math.harvard.edu/~elkies/Misc/hilbert.pdf by Noam D.Elkies
4. 基礎數論講義 http://math.ntnu.edu.tw/~li/ent-html/李華介教授

   要證明一個丟番圖方程式無解，有兩個基本方法：(1)同餘理論 (2)無窮遞減法。
5. Catalan 問題：若 x ， y ， $m>1$ ， $n>1$ 都是正整數，則 $x^m-y^n=1$ 的解只有 $x=3$ ， $y=2$ ， $m=2$ ， $n=3$ 。
6. 我把問題丟到 Math Pro 網站(http://math.pro/db/index.php)，馬上得到「thepiano 老師」的回應。以下是「thepiano」老師提供的解答，再度感謝他。http://math.pro/db/thread-2041-1-1.html
7. 習作(4)的詳解 http://math.pro/db/viewthread.php?tid=2316&extra=&page=2

一題多變、一題多解

台南一中三年級／王敏齊

緣起》

大前年（民國 102 年）九月，筆者參加了台南一中數學學科能力競賽培訓，在此接觸了歷屆能力競賽考古題，其中許多題目十分具有水準，也激發出解數學題目的不同方法。

其中有一題印象十分深刻：

教育部 101 學年度高級中學數學競賽台中區複賽試題(二)第二題[1]：

設 $x\geq 0$，當 $f(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+x^2}$ 達到最小值時，x 的值為何？

本題特點在於 x 與 $\sqrt{4+x^2}$ 的平方差為一定值 4，在高中課程中未曾提到關於這類題目的解法，但倒有提及平方和為定值的題目，例如下面類題一：

【類題一】當 $g(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4-x^2}$，達到最大值時，$x$ 的值為何？

三角函數的課程中提到了它的第一個解法

解 a：

令 $x=2\sin\theta$，$\sqrt{4-x^2}=2\cos\theta$，則 $g(x)=-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$，就變成了正餘弦函數疊合的一個常見命題。

在柯西不等式的課程中又提供了它的第二個解法

解 b：

$$\left(\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2+x^2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right)\geq\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{4}x\right)^2$$

兩種解法，筆者在此想修改這兩種方法以適用於原題目。

解一：

此為試題公布的解法，先令 $t=\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}$，則 $t-\frac{1}{t}=x$，且 $t\geq 0$，

於是有

$$f(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+x^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}=-\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$=2\cdot\frac{\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)t+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\frac{1}{t}}{2}$$

$$\geq 2\sqrt{\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$$

由算幾不等式知，當 $f(x)$ 有最小值時，$\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)t=\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\frac{1}{t}$

故 $t=\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$，$x=t-\frac{1}{t}=\sqrt{2}$

這個試題公布的解法雖然十分巧妙，但筆者希望能藉由修改【解 a】，得到計算過程如同【解 a】一般精簡的解法，注意到【解 a】中的 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 滿足 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，才能令 $x=2\sin\theta$，$\sqrt{4-x^2}=2\cos\theta$，因此使用 $\sec\theta$ 、 $\tan\theta$ 即可滿足 $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$。

解二：

令 $x=2\tan\theta$，則 $\sqrt{4+x^2}=\sqrt{4+4\tan^2\theta}=2\sec\theta$ (1)

令 $k=f(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+x^2}=-\frac{1}{2}\tan\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sec\theta$

故 $k\cos\theta=-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2k\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{3}$

再令 $\sin\alpha=\frac{2k}{\sqrt{4k^2+1}}$，則 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{4k^2+1}}$ (2)

（注意！現在 θ 是關於 x 的變數；α 是關於 k 的變數）

$\sqrt{3}=2k\cos\theta+\sin\theta$

$=\sqrt{4k^2+1}\sin\alpha\cos\theta+\sqrt{4k^2+1}\cos\alpha\sin\theta$

$=\sqrt{4k^2+1}\sin(\alpha+\theta)\leq\sqrt{4k^2+1}$

故 $3\leq 4k^2+1$，$k\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

於是，當 $f(x)=k$ 有最小值 $k_{min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 時，$\sqrt{4k^2+1}$ 有最小值 $\sqrt{3}$

此時 $\sin(\alpha+\theta)=1$，$\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ (3)

由(1)，(2)，(3)知此時

$$x=2\tan\theta=2\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\cot\alpha=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{4{k_{min}}^2+1}}}{\frac{2k_{min}}{\sqrt{4{k_{min}}^2+1}}}=\frac{1}{k_{min}}=\sqrt{2}$$

【解二】成功的提出了一個計算較為簡單的解法，並且更容易被想到，但它的邏輯較為複雜：先解k的最小值，再解出α，推得θ，才能得到x。

因此，若欲要改良【解二】，就要找到兩個函數滿足他們的平方差等於 1 而且可以直接使用和角公式。正好在微積分裡提到的雙曲函數（Hyperbolic Function）[2]符合上述要求，它們分別是$\cosh x$和$\sinh x$，滿足$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$。

註：

定義：$\cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；$\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$e$是自然對數 $=2.718281828459045\cdots$

由定義容易推得：

1. $\cosh x$的值域為$[1,\infty)$，且最小值 1 發生於$x=0$時
2. $\sinh x$的值域為$(-\infty,\infty)$
3. $\cosh(-x)=\cosh x$
4. $\sinh(-x)=-\sinh x$
5. $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$
6. $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$
7. $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$
8. $\cosh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$
9. $\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

解三：

令$x=2\sinh t$，則$\sqrt{4+x^2}=\sqrt{4+4\sinh^2 t}=2\cosh t$ (4)

$$\text{再令}\begin{cases}-\dfrac{1}{4}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}\sinh k=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sinh k\\[2ex] \dfrac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}\cosh k=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cosh k\end{cases}\quad(5)$$

則$f(x)=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+x^2}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\sinh k\cdot 2\sinh t+\frac{\sqrt{2}}{4}\cosh k\cdot 2\cosh t=\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh(k+t)\quad\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$$

故，當$f(x)$有最小值時，$\cosh(k+t)=1$，$t=-k$ (6)

由(4)，(5)，(6)知此時

$$x=2\sinh t=2\sinh(-k)=-2\sinh k=-2\cdot\left(-\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)=\sqrt{2}$$

接著筆者要修改【解 b】，使它能夠被用來處理$f(x)$的最小值的問題，於是想起了多年前無意中發現的一個結果—【引理一】

引理一：

若a，b，c，$d\in\mathbb{R}$，則有

$\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-d^2\right)\le\left(ac-bd\right)^2$，且等號成立若且唯若$ad=bc$

證明：

$$\begin{aligned}&\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-d^2\right)\\&=\left(a+b\right)\left(c-d\right)\left(a-b\right)\left(c+d\right)\\&=\left(ac-bd-ad+bc\right)\left(ac-bd+ad-bc\right)\\&=\left(ac-bd\right)^2-\left(ad-bc\right)^2\le\left(ac-bd\right)^2\end{aligned}$$

而且等號成立若且唯若$ad=bc$

解四：

由【引理一】知

$$\left(\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2-x^2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\le\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+x^2}-\frac{1}{4}x\right)^2=\left(f\left(x\right)\right)^2$$

而對任何$x\in\mathbb{R}$，$f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+x^2}-\dfrac{1}{4}x>0$

故$f\left(x\right)\ge\sqrt{\left(\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2-x^2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

且等號成立於$\dfrac{1}{4}\sqrt{4+x^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x$

因此$f\left(x\right)$有最小值時，$\dfrac{1}{4}\sqrt{4+x^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x$，$x=\sqrt{2}$

筆者個人認為【解四】十分簡潔、美妙，通過【引理一】能將計算過程降至 5 行，真是一個值得被研究的引理。

最後，還是不得不提一下處理極值問題最好用的老方法，微分法。

解五：

$$f\left(x\right)=-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+x^2}$$

$$f'\left(x\right)=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}x}{4\sqrt{4+x^2}}$$

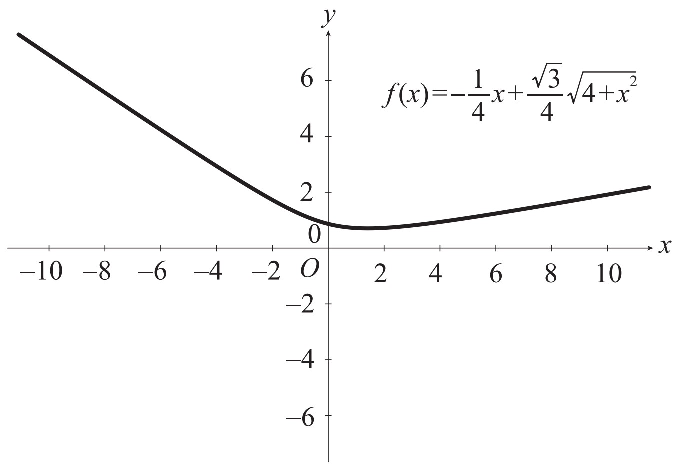
解得$f'\left(x\right)=0$發生在$x=\sqrt{2}$處

並且因為$f''\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}>0$，所以$f'(x)$嚴格遞增

$$\therefore\begin{cases}\text{if }x<\sqrt{2},\ f'\left(x\right)<f'\left(\sqrt{2}\right)=0\\\text{if }x=\sqrt{2},\ f'\left(x\right)=f'\left(\sqrt{2}\right)=0\\\text{if }x>\sqrt{2},\ f'\left(x\right)>f'\left(\sqrt{2}\right)=0\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}\text{if }x<\sqrt{2},\ f\left(x\right)>f\left(\sqrt{2}\right)\\\text{if }x=\sqrt{2},\ f\left(x\right)=f\left(\sqrt{2}\right)\\\text{if }x>\sqrt{2},\ f\left(x\right)>f\left(\sqrt{2}\right)\end{cases}$$

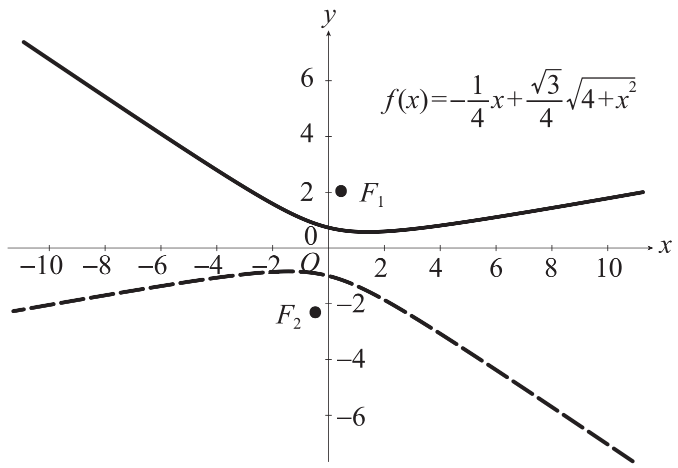
故當 $x=\sqrt{2}$ 時，$f\left(x\right)$ 有最小值

既然都使用了微分，筆者就好奇的用 Geogebra 畫出 $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+x^2}$ 的函數圖形，如圖(一)。



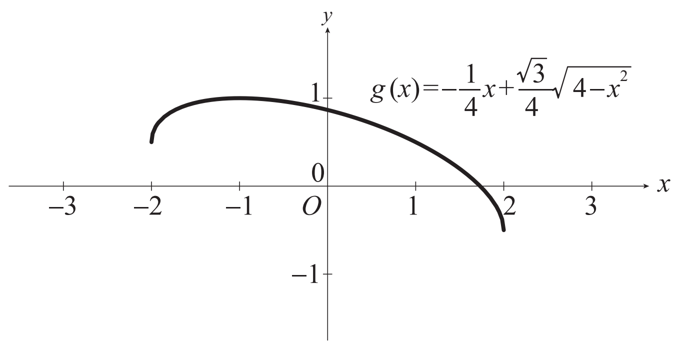
圖(一)

它長得有點像雙曲線的一支，因此筆者就把他的另一支、兩焦點 F_1，F_2 和中心點 O 顯示出來，如圖(二)。



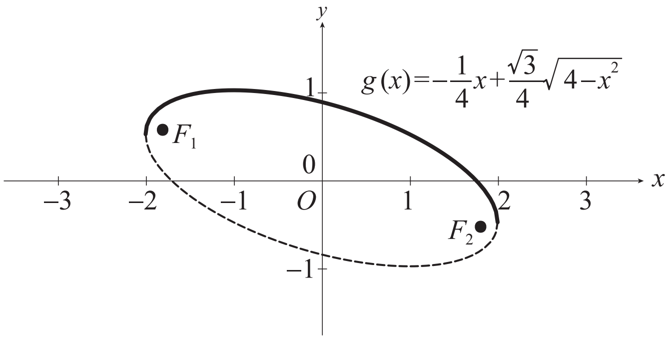
圖(二)

若是【類題一】中的 $g\left(x\right)=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4-x^2}$，則圖形為何？請看圖(三)。



圖(三)

它正是半個橢圓，整個圖形、兩焦點F_1，F_2和中心點O顯示如圖(四)。



圖(四)

其實，要證明上述現象十分容易，注意到：

從$y=f\left(x\right)=-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+x^2}$可推得$x^2-4xy-8y^2+6=0$，$y\ge 0$，因為判別式$\begin{vmatrix} 2\cdot 1 & -4 \\ -4 & 2\cdot(-8) \end{vmatrix}<0$，故$y=f\left(x\right)$的圖形是雙曲線的一支。

從$y=g\left(x\right)=-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4-x^2}$可推得$x^2+2xy+4y^2-3=0$，因為判別式$\begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2 \\ 2 & 2\cdot 4 \end{vmatrix}>0$，故$y=g\left(x\right)$的圖形是橢圓的一半。

解法延伸：

在【解二】與【解三】中，我們發現了$\tan$、$\sec$與$\sinh$、$\cosh$之間的類比，事實上，在處理某些三角函數的積分中，將$\tan\theta$、$\sec\theta$代換成$\sinh x$、$\cosh x$是一個好用的方法，例如：求解$\int \sec^3\theta\, d\theta$。

令$x=\sinh^{-1}\tan\theta$，則$\sinh x=\tan\theta$，$\cosh x=\sec\theta$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta=\int \sec\theta\, d\tan\theta=\int \cosh x\, d\sinh x=\int \cosh^2 x\, dx$$

$$=\int \frac{\cosh 2x+1}{2}dx=\frac{1}{4}\int \cosh 2x\, d2x+\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{4}\sinh 2x+\frac{1}{2}x+c$$

$$=\frac{1}{2}\sinh x\cosh x+\frac{1}{2}x+c=\frac{1}{2}\tan\theta\sec\theta+\frac{1}{2}\sinh^{-1}\tan\theta+c$$

$$=\frac{1}{2}\tan\theta\sec\theta+\frac{1}{2}\ln\left(\tan\theta+\sqrt{\tan^2\theta+1}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\tan\theta\sec\theta+\frac{1}{2}\ln\left(\tan\theta+\sec\theta\right)+c$$

計算的過程中用到了反雙曲三角函數的性質$\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

此外，在【解四】與【解 b】中我們看到了柯西不等式與【引理一】的類比，已知柯西不等式可被推廣成赫爾德不等式（Hölder Inequality）[3]，【引理一】應當也有如赫爾德不等式

的推廣，即【定理二】。

赫爾德不等式

設a_i，$b_i \ge 0$，$i=1$，2，⋯，n，並且p，$q>0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^q\right)^{\frac{1}{q}} \ge \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

當$p=q=2$時，赫爾德不等式為柯西不等式的特例。

證明：

令$A=\sum_{i=1}^{n} {a_i}^p$、$B=\sum_{i=1}^{n} b_i^q$，$a_i'=\dfrac{a_i^p}{A}$、$b_i'=\dfrac{b_i^q}{B}$

因為$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，由楊氏不等式（Young Inequality）（算幾不等式的加權型態）[3]知

$$\frac{1}{p}a_i'+\frac{1}{q}b_i' \ge a_i'^{\frac{1}{p}} b_i'^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i'^{\frac{1}{p}} b_i'^{\frac{1}{q}} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p}a_i'+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q}b_i'=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^p}{A}+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^q}{B}=\frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}{A}+\frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^q}{B}$$

$$=\frac{1}{p}\frac{A}{A}+\frac{1}{q}\frac{B}{B}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}=A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}} \ge A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\sum_{i=1}^{n} a_i'^{\frac{1}{p}} b_i'^{\frac{1}{q}}=A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^p}{A}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{b_i^q}{B}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}}=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

【定理二】

設$a \ge b \ge 0$，$c \ge d \ge 0$，p，$q \ge 0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

$$\left(a^p-b^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(c^q-d^q\right)^{\frac{1}{q}} \le ac-bd$$

證明仿造赫爾德不等式：

令$U=a^p-b^p$、$V=c^q-d^q$，$a'=\dfrac{a^p}{U}$、$b'=\dfrac{b^p}{U}$、$c'=\dfrac{c^q}{V}$、$d'=\dfrac{d^q}{V}$，故U，$V \ge 0$

因為$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，由楊氏不等式知

$$\frac{1}{p}\frac{1}{a'}+\frac{1}{q}\frac{1}{c'} \ge \left(\frac{1}{a'}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{c'}\right)^{\frac{1}{q}} \text{及} \frac{1}{p}\frac{b'}{a'}+\frac{1}{q}\frac{d'}{c'} \ge \left(\frac{b'}{a'}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{d'}{c'}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\frac{1}{a'}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{c'}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{b'}{a'}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{d'}{c'}\right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p}\frac{1}{a'}+\frac{1}{q}\frac{1}{c'}+\frac{1}{p}\frac{b'}{a'}+\frac{1}{q}\frac{d'}{c'}=\frac{1}{p}\frac{1+b'}{a'}+\frac{1}{q}\frac{1+d'}{c'}$$

$$=\frac{1}{p}\frac{1+\frac{b^p}{U}}{\frac{a^p}{U}}+\frac{1}{q}\frac{1+\frac{d^q}{V}}{\frac{c^q}{V}}=\frac{1}{p}\frac{U+b^p}{a^p}+\frac{1}{q}\frac{V+d^q}{c^q}$$

$$=\frac{1}{p}\frac{a^p-b^p+b^p}{a^p}+\frac{1}{q}\frac{c^q-d^q+d^q}{c^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

故$\left(\frac{1}{a'}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{c'}\right)^{\frac{1}{q}}\le 1-\left(\frac{b'}{a'}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{d'}{c'}\right)^{\frac{1}{q}}$

兩邊同乘$a'^{\frac{1}{p}}c'^{\frac{1}{q}}$得到

$$1\le a'^{\frac{1}{p}}c'^{\frac{1}{q}}-b'^{\frac{1}{p}}d'^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(a^p-b^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(c^q-d^q\right)^{\frac{1}{q}}=U^{\frac{1}{p}}V^{\frac{1}{q}}\le U^{\frac{1}{p}}V^{\frac{1}{q}}\left(a'^{\frac{1}{p}}c'^{\frac{1}{q}}-b'^{\frac{1}{p}}d'^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$=U^{\frac{1}{p}}V^{\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{a^p}{U}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{c^q}{V}\right)^{\frac{1}{q}}-\left(\frac{b^p}{U}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{d^q}{V}\right)^{\frac{1}{q}}\right)=U^{\frac{1}{p}}V^{\frac{1}{q}}\left(\frac{a}{U^{\frac{1}{p}}}\frac{c}{V^{\frac{1}{q}}}-\frac{b}{U^{\frac{1}{p}}}\frac{d}{V^{\frac{1}{q}}}\right)$$

$$=ac-bd$$

結語：

原來一道競賽考題，背後的涵義竟如此的深遠，主試者以本題告訴考生為何宋朝詩人王安石寫下：「看似尋常最奇崛，成如容易卻艱辛。」

參考資料：

1. 「101 學年度學科能力競賽數學科總報告」
2. Richard Courant and Fritz John, Introduction to Calculus and Analysis,Vol.1,p228

   中譯本：微積分數學分析引論，第一卷

   本書是一本十分優良的微積分課本，有別於其他教科書，本書以較為敘事的觀點出發，內容包羅許多分析學各種有趣的結果，使數學公式變得生動活潑，但又紮紮實實的解釋其背後的原理，能幫助讀者建構起整套微積分學觀念，其第二卷內容始涉及部分高等微積分內容，也是一本初微銜接高微的優良讀物。
3. http://www.math.ncku.edu.tw/~fjmliou/pdf/concavity.pdf

國立臺灣師範大學數學系
105學年度大學申請入學指定項目甄試試題
數學科試題

筆試一：計算證明題（考試時間：2 小時）

1. (1)滿足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=7$ 且 $x_6\le 3$ 的非負整數解 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ 共有幾組解？（5 分）

   (2) 試問：有多少個多項式函數 $f(x)$ 同時滿足以下四個條件：

   ① 多項式 $f(x)$ 的係數都是非負的整數，

   ② 多項式 $f(x)$ 的次數 $\deg(f(x))$ 滿足 $5\le\deg(f(x))\le 10$ ，

   ③ 函數 $y=f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸，

   ④ $f(1)=7$ 且 $f(0)\le 3$ 。（15 分）

2. 設 c ， d 是不同時為 0 的實數，且函數 $f(x)=\dfrac{x}{cx+d}$ 。

   (1) 當 $c=2016$ ， $d=-1$ 且 $a\ne\dfrac{1}{2016}$ 時，求函數值 $f\Big(f\big(f(f(a))\big)\Big)$ 。（5 分）

   (2) 找出所有滿足下列條件的實數 c ， d ：

   「對任何實數 x ，當 $x\ne-\dfrac{d}{c}$ 及函數值 $f(x)\ne-\dfrac{d}{c}$ 時，等式 $f(f(x))=x$ 恆成立。」

   （15 分）

3. 設實數 a 與 b 滿足：對任何實數 θ ，不等式

$$\left|\sin^2\theta+a\cos\theta+b\right|\le 3$$

   恆成立。

   (1) 寫出滿足題意的所有點 (a,b) 的條件。（15 分）

   (2) 在坐標平面上畫出滿足題意的所有點 (a,b) 之區域。（5 分）

4. 設 $\langle a_n\rangle$ 為正整數數列，且滿足

   (1) 對所有的正整數 m 與 n ，等式 $a_{m\times n}=a_m\times a_n$ 恆成立；

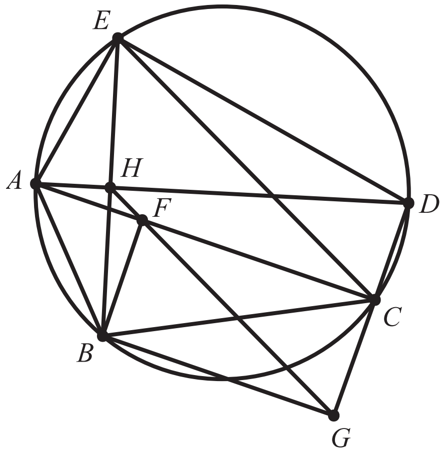
   (2) 存在正數 B 使得：對所有 $m<n$ 的正整數 m 與 n ，不等式 $a_m<Ba_n$ 恆成立。

   ① 求 a_1 的所有可能的值。（4 分）

   ② 證明：對任意正整數 n ，不等式 $a_n\le a_{n+1}$ 恆成立。（8 分）

   ③ 已知 $a_2=2$ ，求 a_3 的所有可能值。（8 分）

5. 圓內接五邊形 $ABCDE$ 中，$\overline{AD}$ 是外接圓的直徑，$\overline{BE}$ 垂直 $\overline{AD}$ 於 H，過點 H 作平行於 $\overline{CE}$ 的直線，與直線 $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DC}$ 分別交於點 F、G，如下圖所示：



(1) 證明 A、B、F、H 四點共圓。（10 分）

(2) 證明四邊形 $BFCG$ 是一個矩形。（10 分）

筆試二：填充題（考試時間：1.5 小時）

1. 若正實數 x，y 滿足 $x+y=6$，則 $2\log_{10}x+\log_{10}y$ 的最大值為__________。

2. 設實數 a、b 滿足 $a-b>0$ 且 $ab=3$。若空間中三向量 $\overrightarrow{A}=(5,b,a)$、$\overrightarrow{B}=(b,1,0)$ 和 $\overrightarrow{C}=(a,0,1)$ 所張成的平行六面體體積為 18，則 $a-b=$__________。

3. 在坐標平面上圓 $x^2+y^2-10x+6y=-9$ 與兩直線相切於 A、B 兩點，且此兩直線相交於點 $P(-2,-4)$。若 A 點的坐標為 $(1,0)$，則 B 點的坐標為__________。

4. 有三數其平均值為 5，標準差為 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$。已知此三數加入 x 後平均值仍為 5，標準差為 σ。若再加入 y，這五個數的標準差仍為 σ，則 $(x-y)^2=$__________。

5. 一袋中有 2 個黑球，1 個白球。每次自袋中隨機取出 1 個球後，就補進一個黑球。這樣操作 3 次後所取出的黑球個數之期望值為__________。（化成最簡分數）

6. 設 Q_1，Q_2 為以原點 $O(0,0)$ 為圓心的單位圓和 x 軸的兩交點。若上半圓上兩點 P_1 和 P_2 滿足 $\angle P_1OP_2=45°$，則 $\triangle P_1OQ_1$ 和 $\triangle P_2OQ_2$ 面積和的最大值為__________。

7. 數列〈 a_n 〉滿足 $a_1=0$ 且

$$a_n=\frac{1}{2+a_{n-1}}\left(n\ge 2\right)。$$

已知將 a_n 寫成最簡分數 $a_n=\frac{r_n}{s_n}$ 後，數列 $\langle r_n\rangle$ 會滿足一個遞迴關係式

$$r_n=ar_{n-1}+br_{n-2}\left(n\ge 2\right)。$$

試求數對 $\left(a,b\right)=$__________。

8. 設多項式 $f\left(x\right)=x^2+x-3$ 且 c 為實數。若 $f\left(f\left(x\right)\right)$ 及 $f\left(x\right)\times f\left(x\right)$ 除以 $x-c$ 有相同的餘式，則此餘式為__________。

9. 同一平面上有 L_1 ，⋯， L_{100} 共 100 條相異直線。若直線 $L_{4k}\left(k=1,\cdots,25\right)$ 都互相平行；直線 $L_{4k-1}\left(k=1,\cdots,25\right)$ 都通過某個定點，則這 100 條直線的交點最多有__________個。

10. 若橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 和開口向上的拋物線 $y=cx^2+d$ 交於相異三點，則 c 的範圍為__________。

答案與解析

筆試一：計算證明題

1. (1) 滿足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=7$ 且 $x_6\le 3$ 的非負整數解 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$，相當於求 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7$，6，5 或 4 的非負整數解 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)，也相當於從 5 種相異物可重複取出 7，6，5 或 4 個的取法，而其取法數有 $\mathrm{H}_7^5+\mathrm{H}_6^5+\mathrm{H}_5^5+\mathrm{H}_4^5=\mathrm{C}_7^{11}+\mathrm{C}_6^{10}+\mathrm{C}_5^{9}+\mathrm{C}_4^{8}=330+210+126+70=736$ 種。
故解法數共有 736 組。

(2) 由條件 3.函數 $y=f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸知 $f(-x)=f(x)$ 恆成立，
即 $f(x)$ 是一偶函數；由條件 1.與條件 2.可設

$$f(x)=a_1x^{10}+a_2x^8+a_3x^6+a_4x^4+a_5x^2+a_6,$$

其中係數都是非負的整數，且 a_1，a_2，a_3 不全為 0；而條件 4.知 $a_6=f(0)\le 3$，且 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=f(1)=7$。
由(1)得知：非負的整數解 $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ 有 736 組，再扣除掉 a_1，a_2，a_3 全為 0 的解有 $8+7+6+5=26$ 組（依照 $a_6=0$，1，2，3 分別計算即可）。
因此，共有 $736-26=710$ 組不同的解 $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$。故所求的多項式函數 $f(x)$ 有 710 個。

2. (1) 因為 $f(x)=\dfrac{x}{2016x-1}$，所以

$$f(f(a))=\frac{\dfrac{a}{2016a-1}}{2016\times\dfrac{a}{2016a-1}-1}=a。$$

故

$$f(f(f(f(a))))=f(f(a))=a。$$

(2) 因為 $f(x)=\dfrac{x}{cx+d}$，所以

$$f(f(x))=\frac{\dfrac{x}{cx+d}}{c\times\dfrac{x}{cx+d}+d}=\frac{x}{c(1+d)x+d^2}。$$

又由 $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ 得

$$\frac{x}{c(1+d)x+d^2}=x\Rightarrow c(1+d)x^2+\left(d^2-1\right)x=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c\left(1+d\right)=0\\ d^2-1=0\end{cases}$$

當 $d=1$ 時，$c=0$；而當 $d=-1$ 時，c 可以為任意實數，因此

$\left(c,d\right)=\left(0,1\right)$ 或 $\left(k,-1\right)$（k 為任意實數）。

3. (1) 設 $x=\cos\theta$，則 $\sin^2\theta+a\cos\theta+b=\left(1-x^2\right)+ax+b=-x^2+ax+b+1$，並令

$$f\left(x\right)=-x^2+ax+b+1=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+b+1。$$

原題意等價於：對任何滿足 $-1\le x\le 1$ 的實數 x，不等式

$$\left|f\left(x\right)\right|\le 3$$

恆成立。

① 當 $\frac{a}{2}\le -1$ 時，因為二次函數 $y=f\left(x\right)$ 是開口向下的拋物線，且最高點的 x 坐標為

$x=\frac{a}{2}\le -1$，所以當 $-1\le x\le 1$ 時，有 $f\left(-1\right)\ge f\left(x\right)\ge f\left(1\right)$，即讓

題意成立的條件為

$$\begin{cases}-3\le f\left(1\right)\\ f(-1)\le 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\le a+b\\ -a+b\le 3\end{cases}$$

解得的範圍為

$$\text{I}：\begin{cases}a\le -2\\ a+b\ge -3\\ a-b\ge -3\end{cases}$$

② 當 $-1\le\frac{a}{2}\le 1$ 時，因為二次函數 $y=f\left(x\right)$ 是開口向下的拋物線，且最高點的 x 坐標為

$x=\frac{a}{2}$ 在區間 $\left[-1,1\right]$ 內，所以當 $-1\le x\le 1$ 時，$f\left(x\right)$ 的最大值發生在 $f\left(\frac{a}{2}\right)$，而最小

值發生於 $f\left(1\right)$ 或 $f\left(-1\right)$。因此，讓題意成立的條件為

$$\begin{cases}f\left(\frac{a}{2}\right)\le 3\\ -3\le f\left(1\right)\\ -3\le f\left(-1\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a^2}{4}+b\le 2\\ -3\le a+b\\ -3\le -a+b\end{cases}$$

解得的範圍為

$$\text{Ⅱ}：\begin{cases} -2 \le a \le 2 \\ \dfrac{a^2}{4} + b \le 2 \\ a + b \ge -3 \\ a - b \le 3 \end{cases}$$

③ 當 $1 \le \dfrac{a}{2}$ 時，因為二次函數 $y = f(x)$ 是開口向下的拋物線，且最高點的 x 坐標為

$x = \dfrac{a}{2} \ge 1$，所以當 $-1 \le x \le 1$ 時，有 $f(-1) \le f(x) \le f(1)$，即讓題意成立的條件為

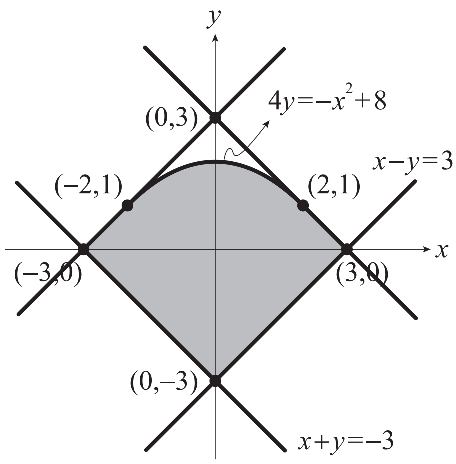
$$\begin{cases} f(1) \le 3 \\ -3 \le f(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b \le 3 \\ -3 \le -a + b \end{cases}$$

解得的範圍為

$$\text{Ⅲ}：\begin{cases} a \ge 2 \\ a + b \le 3 \\ a - b \le 3 \end{cases}$$

綜合得到：所有點 (a, b) 的條件為Ⅰ或Ⅱ或Ⅲ。

(2) 根據(1)所得的三條件（Ⅰ或Ⅱ或Ⅲ），所畫的區域如下圖所示：



4. (1) 由條件①可得 $a_n = a_{1\cdot n} = a_1 a_n$，又因為 $a_n > 0$，所以 $a_1 = 1$。

(2) 由條件①可知對所有的正整數 n 與 k，$a_{n^k} = (a_n)^k$，再由條件②知

$(a_n)^k = a_{n^k} < B a_{(n+1)^k} = B(a_{n+1})^k$，即 $\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)^k < B$。因為 k 可以是任意大的正整數，而 B

是一固定的正數，所以 $0 < \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \le 1$，即 $0 < a_n \le a_{n+1}$，因此數列 $\langle a_n \rangle$ 為遞增數列。

(3) 因為 $2 \le 3 \le 2^2$ ，所以 $2 = a_2 \le a_3 \le a_{2^2} = (a_2)^2 = 2^2 = 4$ ，又因為 a_3 是正整數，所以 $a_3 = 2$ ，3 或 4。

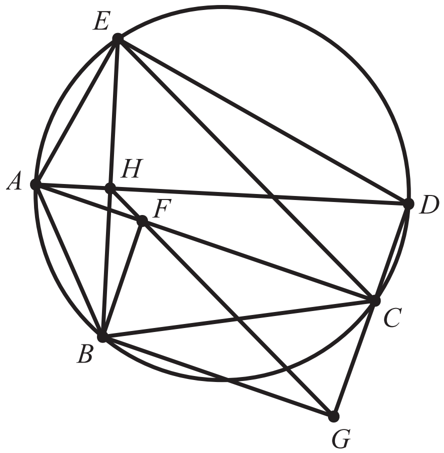
① 當 $a_3 = 2$ 時，因為 $2^3 \le 3^2$ ，所以 $8 = 2^3 = (a_2)^3 = a_{2^3} \le a_{3^2} = (a_3)^2 = 2^2 = 4$ ，不合。

② 當 $a_3 = 4$ 時，因為 $729 = 3^6 \le 4^5 = 1024$ ，所以 $(a_3)^6 = a_{3^6} \le a_{4^5} = (a_2)^{10}$ ，即 $4^6 \le 2^{10}$ ，不合。

③ 當 $a_3 = 3$ 時，可令數列 $\langle a_n \rangle$ 為 $a_n = n$ ，顯然滿足題意。

綜合得到 $a_3 = 3$ 。

5. (1) 由 $\overline{HG}$ 平行 $\overline{CE}$ 知 $\angle BHF = \angle BEC$ ，又同弧的圓周角 $\angle BAF = \angle BEC$ ，得到 $\angle BAF = \angle BHF$ ，故 A 、B 、F 、H 共圓。



(2) 由(1)的結論知 $\angle BHA = \angle BFA$ 。因為 $\overline{BE}$ 垂直 $\overline{AD}$ ，所以 $\overline{BF}$ 垂直 $\overline{AC}$ ，又因為 $\overline{AD}$ 是圓的直徑，所以 $\overline{CG}$ 垂直 $\overline{AC}$ 。由 A 、B 、C 、D 共圓及 A 、B 、F 、H 共圓知 $\angle BFG = \angle DAB = \angle BCG$ ，因此 B 、G 、C 、F 共圓，即 $\angle BGC = \angle AFB = 90^\circ$ ，故 $\overline{BG}$ 垂直 $\overline{GC}$ ，四邊形 $BFCG$ 為矩形，得證。

筆試二：填充題

1. 由算幾不等式知

$$\left(\frac{x}{2} \times \frac{x}{2} \times y\right)^{\frac{1}{3}} \le \frac{x+y}{3} = 2 \text{ 。}$$

故得 $x^2 y \le 2^5$ ，即 $2\log_{10} x + \log_{10} y$ 有最大值 $5\log_{10} 2$ 。

2. 因為平行六面體的體積為 18，我們可得

$$\left|\det\begin{pmatrix}5 & b & a\\ b & 1 & 0\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}\right| = 18，$$

即$\left|\,5-a^2-b^2\,\right|=18$，因此可知$a^2+b^2=23$。由於$a-b>0$且

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=23-2\times 3=17，$$

我們可知$a-b=\sqrt{17}$。

3. 由給定的圓方程式可得$(x-5)^2+(y+3)^2=25$，因此圓心坐標為$C(5,-3)$且半徑為 5。另外，因為$\overrightarrow{AC}=(4,-3)$和$\overrightarrow{AP}=(-3,-4)$，可知$\triangle APC$為一等腰直角三角形，故知四邊形$APBC$為一正方形。

   假設B點的坐標是(a,b)，則向量$\overrightarrow{PB}=(a+2,b+4)=\pm(4,-3)$。故$(a,b)=(2,-7)$或$(-6,-1)$。此時$\overrightarrow{BC}=(3,4)$或$(11,-2)$。僅$(3,4)$與$(4,-3)$垂直，故$B$點的坐標是$(2,-7)$。

4. 設a，b，c的平均為 5，標準差為$\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$，由a，b，c，x的平均值為 5 可得$x=5$，標準差$\sigma=\sqrt{2}$。再由a，b，c，x，y的標準差為$\sqrt{2}$得y須滿足$2y^2-20y+45=0$，得$(x-y)^2=\dfrac{5}{2}$。

5. 因為取出白球後，就全為黑球，所以不可能有抽出多於一個白球的情形。若共抽出兩個黑球，則在第一次、第二次以及第三次抽出白球的機率分別為$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}$，得機率為$\dfrac{19}{27}$。故期望值為$0\times 0+1\times 0+2\times\left(\dfrac{19}{27}\right)+3\times\left(\dfrac{8}{27}\right)=\dfrac{62}{27}$。

6. 假設$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$與x軸夾角較小者為θ，則兩三角形的高分別為

$$\sin\theta，\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)，$$

   得兩三角形面積和為

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\sin(\theta+\delta)。$$

   得最大值$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$。

7. 經試驗後得前幾項為

$$\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{12},\frac{12}{29},\frac{29}{70},\cdots$$

故可猜測分子數列〈 r_n 〉$=0$，1，2，5，12，29，70，…滿足 $r_0=0$ ， $r_1=1$ ，

$$r_n=2r_{n-1}+r_{n-2}\left(n\geq 2\right)\text{。}$$

8. 假設 $f\left(x\right)$ 除以 $x-c$ 的餘式為 r，由餘式定理知 $r=f\left(c\right)$。依題設，我們有

$f\left(f\left(c\right)\right)=f\left(c\right)\times f\left(c\right)$ ，即 $f\left(r\right)=r^2$ 。得 $r^2+r-3=r^2$ ，即 $r=3$。得餘式為 $r^2=9$ 。

9. 交點最多 4351 個。簡單的排容原理：

$$\binom{100}{2}-\binom{25}{2}-\binom{25}{2}+1=4351\text{。}$$

10. 因 C 與 Γ 皆對稱於 y 軸，故由交於三點知其中一點必在 y 軸上，又因 C 為凹向上，故知 C 的頂點為 $\left(0,-2\right)$ ，得 $d=-2$ 。將 $x^2=\dfrac{\left(y+2\right)}{c}$ 代入橢圓方程式得 $4\left(y+2\right)+9cy^2=36c$ 。此方程式判別式為 $16-36c\left(8-36c\right)=\left(4-36c\right)^2$ 。知當 $c=\dfrac{1}{9}$ 時，僅交一點。但當 $0<c<\dfrac{1}{9}$ 時所得的另一解 $y<-2$ ，使得 $x^2=\dfrac{\left(y+2\right)}{c}$ 無實數解，故 c 大於 $\dfrac{1}{9}$ 才會使得 C 與 Γ 交於相異三點。

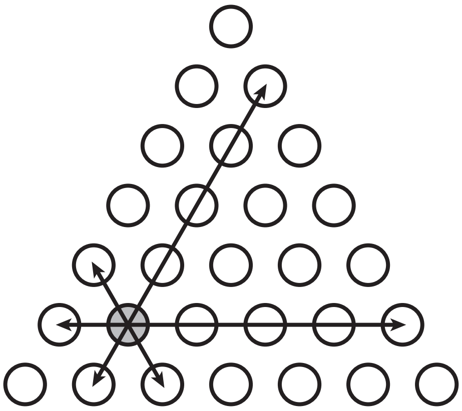
專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 117

☆☆☆☆☆

如下圖所示，在邊上有 7 個圓圈的正三角形棋盤上，將某些圓圈塗成黑色，當成 1 個皇后的地盤。箭號所指的三個與邊平行的方向是該皇后可以管轄的範圍，總共有 13 個圓圈（含皇后根據地）。



我們有兩個問題：

(1) 當皇后的根據地改變時，她所能管轄的圓圈數是否會跟著改變？如何解釋你的發現呢？

(2) 盡可能的在棋盤上擺放皇后，且不同的皇后不能管到彼此的根據地（不是根據地的圓圈可以多個皇后共管）。最多能擺幾個呢？

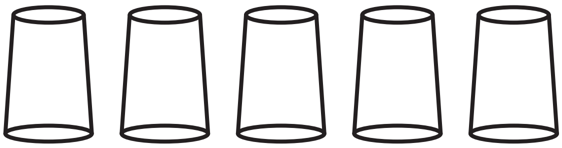
〔玩鎖・玩索〕

這是有名點燈問題的推廣，考驗觀察能力。

遊戲 118

☆☆

桌上有 5 只茶杯，杯口都朝下，每次運動只能將 2 只茶杯翻轉。請問有辦法在若干次運動之後，讓所有的茶杯杯口都朝上嗎？



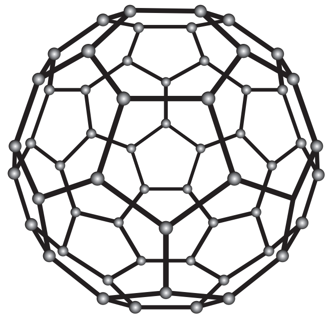
〔玩鎖・玩索〕

當你操作幾次之後，相信會猜到答案。但是，猜到答案跟能夠完整的用數學知識或語言將這答案得出是有分別的。這也是物理與數學最大的分野，物理著重實驗與觀察，當實驗夠多次或觀察夠精細時，所得到的結果可以當真，也因為這樣，有些物理法則經不起時間的考驗。但是，數學講究的是完美無缺的推論，他的結論永遠正確。這是一道用學過的數學語言描述心中答案的遊戲。

遊戲 119

☆☆☆

碳六十巴克球 C_{60}（俗稱奈米球）是由 60 個碳原子所組成，其結構如下圖所示：



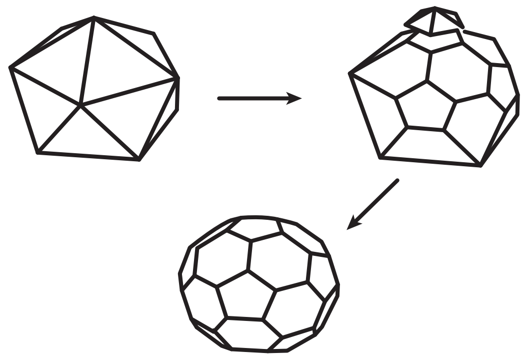
奈米球的外形像 1 顆英式足球，是目前已知對稱性最高的球狀分子。

(1) 奈米球是由幾個正六角形和幾個正五角形所圍成？

(2) 奈米球共有幾條邊？

〔玩鎖・玩索〕

從幾何結構來看，奈米球是 1 個截角正二十面體，亦即將正二十面體的每個凸角切掉大小適當的一塊，如下圖所示：



奈米球這種碳分子具有美麗和細緻的對稱性以及其他的特性，令人有鮮活的細膩感覺。它的結構是截角的正二十面體，可歸屬到偉大的阿基米得所作的幾何形狀之一。這個結構正是建築師巴克敏斯特·富勒所發明的圓拱屋頂的基本圖樣，這是至今為止所設計出的具有最強、最輕和最大跨距的建築物。屬於這個形狀的圖像最早出現在佛朗西士加和達文西的畫作裡。

奈米球是理查・史莫利，羅布・柯爾及哈洛・柯洛托 3 人共同發現的，也因這個發現，3 人共同獲得 1996 年諾貝爾化學獎。除奈米球相關的研究之外，史莫利的研究群也作了非常多關於奈米碳管方面的研究，有不少人稱史莫利教授是奈米科技界的祖父。

遊戲 120

☆☆

開始時有 3 個數為

$$-1，0，1$$

每次操作把最小的數換成較大兩數的和，並且將 3 數由小到大排列。例如，前幾次的操作為 $\{-1,0,1\} \to \{0,1,1\} \to \{1,1,2\} \to \{1,2,3\} \cdots$

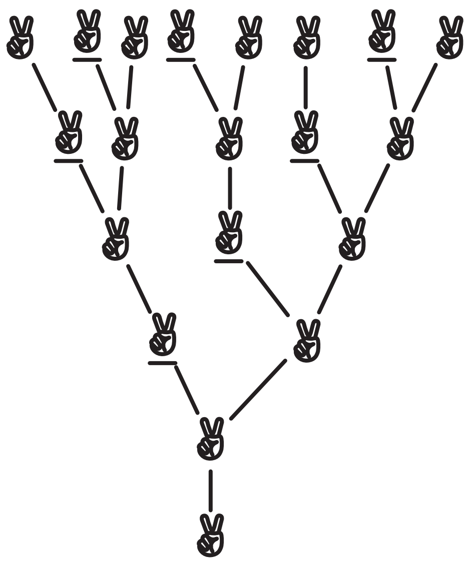
關於這樣的操作，令 $\{p_n, q_n, f_n\}$ 是第 n 次操作後所得到的 3 個數，而且 $p_n \le q_n \le f_n$ ：

(1) 第 10 次操作之後，所得到的 3 數 p_{10}，q_{10} 與 f_{10} 分別是多少？

(2) 描述一下數列 $\langle f_n \rangle$ 的特徵。

〔玩鎖・玩索〕

費波那契（Fibonacci, 約 1175～1250），1202 年發表著名的《算盤書》，書中以「兔子問題」最有名。



▲兔子繁殖樹狀圖

費波那契在 1202 年出版的一本書中，設計了一道「兔子問題」，這道問題的答案就是今日所謂的費氏數列的來源。費波那契在他的兔子問題中，假設了底下的繁殖規律：

(1) 每對剛出生的幼兔，1 個月後都長大變為成兔。

(2) 每對成兔從隔月開始繁殖，每月都生 1 對幼兔，1 公 1 母。

(3) 兔子不會死亡。

如果第 1 個月有 1 對幼兔（1 公 1 母），那麼讓我們慢慢算一下，前幾個月的兔子對數及第 n 個月的兔子對數 f_n 。

(1) 第 1 個月，當然只有幼兔 $f_1 = 1$ 對。

(2) 第 2 個月，幼兔長為成兔，也只有 $f_2 = 1$ 對成兔。

(3) 第 3 個月，成兔生出 1 對幼兔，有 $f_3 = 2$ 對兔子，1 對成兔與 1 對幼兔。

(4) 第 4 個月，成兔再生 1 對幼兔，原幼兔長為成兔，共有 $f_4 = 3$ 對兔子，2 對成兔與 1 對幼兔。

(5) 第 5 個月，2 對成兔各生 1 對幼兔，原來的 1 對幼兔又長為成兔，共有 $f_5 = 5$ 對兔子，3 對成兔與 2 對幼兔。

同理，第 6 個月會有 $f_6 = 8$ 對兔子，5 對成兔與 3 對幼兔。依此類推，每個月的兔子對數應該等於前一個月的兔子對數加上前兩個月的兔子對數。

在兔子繁殖樹狀圖中，符號 $\underline{✌}$ 代表一對幼兔，✌ 代表一對成兔，我們可以發現費氏數列 $\langle f_n \rangle$ 的前幾項為

$$1，1，2，3，5，8，13，\cdots，f_n，\cdots。$$

它的特徵就是第一項 f_1 與第二項 f_2 都是 1，而且滿足“前兩項的和恆等於第三項”的遞迴關係式，也就是說

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}，n \ge 3。$$

事實上，費氏數列的一般項 f_n 可以表示為

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

上述公式可以用數學歸納法加以證明。

講了這樣長的費氏數列的故事，你可以用它來解遊戲裡的問題嗎？

動手玩數學~破解祕笈 第29期

遊戲 113

(1) 將 $x=1$ 代入，得

$1^2+a_0=(1-1)(1-a_0)=0 \Rightarrow a_0=-1$

(2) 將 $x=1$ 代入，得

$1+a_3+a_2+a_0=0 \cdots ①$

比較等式兩邊的 x^3 項係數，得

$-1-a_3-a_2-a_0=a_3 \cdots ②$

將①+②得 $a_3=0$ ，又 $f(0)=a_0=0$ 。

因此 $f(x)=x^4+a_2x^2=x^2(x-1)(x-a_2)$

$\Rightarrow x^2+a_2=(x-1)(x-a_2)$.

由(1)得 $a_2=-1$。故 $f(x)=x^4-x^2$.

遊戲 114

設申克功算出來的答案為 n，也就是說

$$n=\sqrt[13]{13○○○○○○○○○○}.$$

推得

$$13\times10^9 \le n^{13} < 14\times10^9.$$

取對數並利用

$\log13 \approx 1.1139$,

$\log14=\log2+\log7 \approx 0.3010+0.8451=1.1461$，得

$$1.1139+9 \le 13\log n < 1.1461+9.$$

整理得

$$0.778 \le \log n < 0.780.$$

因為

$\log5=\log10-\log2 \approx 1-0.3010=0.6990$

$\log6=\log2+\log3 \approx 0.3010+0.4771=0.7781$

$\log7 \approx 0.8451$,

所以 $n=6$ 。

遊戲 115

令 $a_1=2\cos20°=\alpha$ ，利用三倍角公式

$\cos60°=\cos3\cdot20°=4\cos^3 20°-3\cos20°$ ，得

$$\frac{1}{2}=4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3-3\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

即 $\alpha^3=3\alpha+1$.

因為 $a_1=\alpha$ 且 $a_{n+1}=2-a_n^2 (n\ge1)$ ，

所以 $a_2=2-a_1^2=2-\alpha^2$ 。

又利用 $\alpha^3=3\alpha+1$ ，

得 $a_3=2-a_2^2=2-(2-\alpha^2)^2=-\alpha^4+4\alpha^2-2$

$=-\alpha(3\alpha+1)+4\alpha^2-2=\alpha^2-\alpha-2$ 。

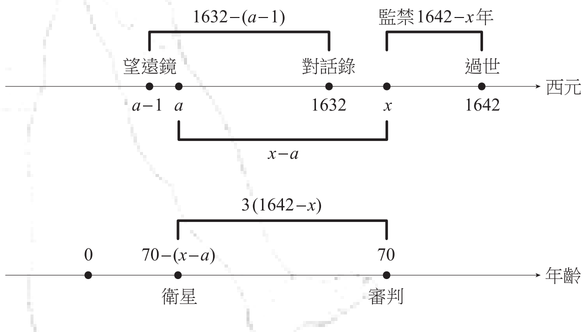
再利用 $\alpha^3=3\alpha+1$ ，

$$\begin{aligned} \text{得 } a_4 &= 2-a_3^2 \\ &= 2-(\alpha^2-\alpha-2)^2 \\ &= -\alpha^4+2\alpha^3+3\alpha^2-4\alpha-2 \\ &= -\alpha(3\alpha+1)+2(3\alpha+1)+3\alpha^2-4\alpha-2 \\ &= \alpha \\ &= a_1. \end{aligned}$$

故初始值 $a_1=2\cos20°$ 的數列 $\langle a_n \rangle$ 每 3 項一循環，即週期為 3 的數列。

遊戲 116

設伽利略於公元 x 年接受審判，而在公元 a 年發現衛星。將伽利略的年齡與公元的時間這兩條數線繪圖比較如下：



由上述時間對照表得到方程組

$$\begin{cases} 3(1642-x)=x-a \\ 1632-(a-1)=\dfrac{70-(x-a)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=a+4926 \\ x=3a-3196 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1634 \\ a=1610 \end{cases}$$

因此伽利略在公元 1610 年發現歐羅巴衛星。