龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第29刊

N5201
29 #1

贈品禁止轉售

龍騰文化

編輯室墨記

Excel 具有計算功能和圖表工具，〈Excel 在矩陣四則運算的應用〉中，Excel 軟體提供矩陣的計算，促使矩陣解決聯立方程式等問題，讓我們活用 Excel 吧！

〈一個相關係數的弔詭〉中，預估答對率和實際答對率之間的相關係數，可以檢視學生程度、分析試題等。應避免人為因素、社會因素影響臺灣統計學的發展。

在沒有電子器材的狀況下，該如何計算對數值呢？〈對數值估算法則〉一文，我們來一探究竟吧！

在〈數學競試問題的直觀組合解法與其推廣的組合恆等式〉裡，藉由組合的概念以直觀的方法來解釋競試題目，並推廣一些組合恆等式。

本期收錄〈104 學年度臺北市普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽數學科試題〉，快來動手試試自己的實力！

大陸心算神童申克功，只花十三秒算出複雜的根式，答案究竟是多少呢？翻開動手玩數學，跟著許教授一起來解密吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的內容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 bey.yan@lungteng.com.tw。

發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
執行編輯：呂玟慧
美術編輯：林佳瑩

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248新北市五股區五工六路30號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2298-9755
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2016/3/16
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2016.03 目次

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

Excel在矩陣四則運算的應用

鍾國華／臺北市協和祐德高中（高中部）

一、前言》

在數學中，矩陣（Matrix）是指縱橫排列的二維數據表格，最早來自於方程組的係數及常數所構成的方陣。這一概念由 19 世紀英國數學家凱利首先提出（註 1）。

目前有很多軟體可進行矩陣運算，特別是 Matlab，其矩陣運算功能尤為強大。但這些專業軟體所占空間很大，價格昂貴。其實 Excel 就有矩陣運算功能（註 2），雖然比不上專業軟體，但不比一些數學小軟體差多少。因為一般 Excel 的書籍在矩陣介紹較不完整，且網站上利用 Excel 進行矩陣計算的資料亦不完整，無法配合高中數學課本第四冊第三章矩陣四則運算例題的教學（註 3），整理如下。

二、矩陣的四則運算》

1. 陣列和矩陣的意義

把一方程組之係數及常數項列出來，成一個矩形陣列，並用一對括號把這些數圍起來，就成為一矩陣。矩陣不是一個數，而是一個陣列。在 Excel 裡，陣列占用一片單元區域，單元區域用大括號表示，例如{A1：C3}，以便和普通單元區域 A1：C3 相區別。設置時先選定單元區域，按住 Shift+Ctrl 鍵不放，再按 Enter 鍵，大括弧即自動產生，陣列區域得以確認。

(1) Excel 運算符號：加（＋）、減（－）、乘（＊）、除（／）、乘方（︿）。

(2) 在儲存格中輸入公式時，要先輸入等號（=），然後才輸入運算式。

(3) 語法：

①數值 m 的 n 次方：$=m$^n 或=POWER(number, power)

②數值 m 的 n 次方根：$=m$^$(1/n)$

③數值 m 開平方根：$=m$^(1/2)或=SQRT(number)

參數：number 是一個數值，power 是數值的次方。

(4) 實例：已知矩陣 $A=[a_{ij}]_{3\times3}$，且每一個元（element）$a_{ij}=2i+j^2$，求 A。

解：在儲存格第一列先設定數值，D1=1，E1=2，F1=3。儲存格 A2 輸入公式：=2*(D1)+(D1)^2，複製 A2 儲存格公式到 A2：C4，再修改運算式，矩陣 A 設定如表 1-1，執行結果如表 1-2。

表 1-1　矩陣 A 的設定

A2　f_x　'=2*(D1)+(D1)^2

	A	B	C	D	E	F
1	1.定義矩陣A=[a_{ij}]：	a_{ij}=2i+j^2	i,j=	1	2	3
2	=2*(D1)+(D1)^2	=2*(D1)+(E1)^2	=2*(D1)+(F1)^2			
3	=2*(E1)+(D1)^2	=2*(E1)+(E1)^2	=2*(E1)+(F1)^2			
4	=2*(F1)+(D1)^2	=2*(F1)+(E1)^2	=2*(F1)+(F1)^2			

表 1-2　矩陣 A 的結果

A2	f_x =2*(D1)+(D1)^2					
	A	B	C	D	E	F
1	1.定義矩陣A=[aij]：	aij=2i+j^2	i, j=	1	2	3
2	3	6	11			
3	5	8	13			
4	7	10	15			

2.　矩陣 A 的轉置矩陣

設矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 之行與列對調，而成矩陣 $B=[b_{ji}]_{n\times m}$，且對其中每一對 i, j（$i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n$）恆有 $a_{ij}=b_{ji}$ 之關係。即矩陣 B 之第一行，第二行，⋯，第 m 行，恰為矩陣 A 之第一列，第二列，⋯，第 m 列，則稱矩陣 B 為矩陣 A 之轉置，而記為 $B=A^T$，$(A^T)^T=A$（註 4）。

(1) 語法：=TRANSPOSE(array)

參數：array 是一個行列數相等的數值單元區域或陣列區域。

(2) 實例：矩陣 $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$，且每一個元 $a_{ij}=2i+j^2$，求 A^T。

解：在儲存格 A6 輸入公式：=TRANSPOSE (A2:C4)，複製 A6 儲存格公式到 A6：C8，如表 2-1。完成後按 F2 鍵，同時按住 Shift+Ctrl 鍵，再按 Enter 鍵，執行結果如表 2-2。

表 2-1　矩陣 A^T 的設定

A6	f_x '=TRANSPOSE(A2:C4)		
	A	B	C
5	2.矩陣A的轉置矩陣：		
6	=TRANSPOSE(A2:C4)	=TRANSPOSE(A2:C4)	=TRANSPOSE(A2:C4)
7	=TRANSPOSE(A2:C4)	=TRANSPOSE(A2:C4)	=TRANSPOSE(A2:C4)
8	=TRANSPOSE(A2:C4)	=TRANSPOSE(A2:C4)	=TRANSPOSE(A2:C4)

表 2-2　矩陣 A^T 的結果

A6	f_x {=TRANSPOSE(A2:C4)}		
	A	B	C
5	2.矩陣A的轉置矩陣：		
6	3	5	7
7	6	8	10
8	11	13	15

3. 矩陣的加減法

若 A 與 B 都是 $m \times n$ 階矩陣，則它們的和 $A+B$ 也是一個 $m \times n$ 階矩陣，而且 $A+B$ 的每個（i, j）元都等於 A 的（i, j）元與 B 的（i, j）元之和。在矩陣的加法運算中，每個矩陣都有加法反元素；事實上，若 A 是一個 $m \times n$ 階矩陣，則 A 的加法反元素 $-A$ 也是一個 $m \times n$ 階矩陣，而且 $-A$ 的每個（i, j）元都是 A 的（i, j）元的加法反元素。若 A 與 B 都是 $m \times n$ 階矩陣，則 $A-B$ 也是 $m \times n$ 階矩陣，而且 $A-B$ 的每個（i, j）元都等於 A 的（i, j）元減去 B 的（i, j）元的差。

(1) 語法：{＝矩陣 A＋矩陣 B}，{＝矩陣 A–矩陣 B}

(2) 實例：設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 5 & 8 & 13 \\ 7 & 10 & 15 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$，求 $A+B$。

解：

① 矩陣 A、B 的命名：

先反白原始資料 A 區域 B2：D4，並在左上角（名稱方塊）輸入名稱：矩陣 A，再按 Enter 鍵，即完成矩陣 A 之命名。矩陣 B 之命名同矩陣 A 命名方式，如表 3-1。

② 矩陣 $A \pm B$ 的設定：在儲存格 B6 輸入公式：＝矩陣 A＋矩陣 B，複製 B6 儲存格公式到 B6：D8，如表 3-2。完成後按 F2 鍵，同時按住 Shift+Ctrl 鍵，再按 Enter 鍵，執行結果如表 3-3。同理，將 ＋ 號改成 － 號，即完成矩陣 $A-B$ 的計算，請讀者自行練習。

表 3-1　矩陣 A、B 的命名

名稱方塊

矩陣B　fx　8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	一、輸入兩個矩陣[3×3]的基本資料：								
2		3	6	11			8	7	9
3	A=	5	8	13		B=	1	2	3
4		7	10	15			6	4	5

表 3-2　矩陣 $A+B$ 的設定

B6　fx　'=矩陣A+矩陣B

	A	B	C	D	E	F
5	3.矩陣A+B：					
6		=矩陣A+矩陣B		=矩陣A+矩陣B		
7		=矩陣A+矩陣B		=矩陣A+矩陣B		
8		=矩陣A+矩陣B		=矩陣A+矩陣B		

表 3-3　矩陣 $A+B$ 的結果

B6　{=矩陣A+矩陣B}

	A	B	C	D
5	3.矩陣A+B：			
6		11	13	20
7		6	10	16
8		13	14	20

4. 矩陣 A 的係數積

若 A 是一個 $m\times n$ 階矩陣，而 r 為任意實數，則 rA 也是一個 $m\times n$ 矩陣，而且 rA 的每個 (i,j) 元都等於 A 的 (i,j) 元乘以 r，則 rA 稱為 r 與 A 的係數積。

(1) 語法：{=2*(矩陣 A)}

(2) 實例 1：設矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 6 & 11\\ 5 & 8 & 13\\ 7 & 10 & 15\end{bmatrix}$，求 $2A$。

解：

① 矩陣 A 的命名：請參考表 3-1。

② 矩陣 $2A$ 的設定：設定 E13=2，在儲存格 B14 輸入公式：=(E13)*(矩陣 A)，複製 B14 儲存格公式到 B14：D16，如表 4-1。完成後按 F2 鍵，同時按住 Shift+Ctrl 鍵，再按 Enter 鍵，執行結果如表 4-2。

表 4-1　矩陣 $2A$ 的設定

B14　'=(E13)*(矩陣A)

	A	B	C	D	E	F
13	4.矩陣的係數積rA：			設r=	2	
14		=(E13)*(矩陣A)		=(E13)*(矩陣A)		
15		=(E13)*(矩陣A)		=(E13)*(矩陣A)		
16		=(E13)*(矩陣A)		=(E13)*(矩陣A)		

表 4-2　矩陣 $2A$ 的結果

B14　{=(E13)*(矩陣A)}

	A	B	C	D	E
13	4.矩陣的係數積A：			設r=	2
14		6	12	22	
15		10	16	26	
16		14	20	30	

(3) 實例 2：設矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 6 & 11\\ 5 & 8 & 13\\ 7 & 10 & 15\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}8 & 7 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 6 & 4 & 5\end{bmatrix}$，求 $2A+3B$。

解：

① 矩陣 A、B 的命名：請參考表 3-1。

② 矩陣 $2A+3B$ 的設定：設定 D17=2，F17=3。在儲存格 B18 輸入公式：=(D17)*(矩陣A)+(F17)*(矩陣B)，複製 B18 儲存格公式到 B18：D20，如表 4-3。完成後按 F2 鍵，同時按住 Shift+Ctrl 鍵，再按 Enter 鍵，執行結果如表 4-4。同理，將＋號改成 − 號，即完成矩陣 $2A-3B$ 的計算，請讀者自行練習。

表 4-3　矩陣 $2A+3B$ 的設定

B18　'=(D17)*(矩陣A)+(F17)*(矩陣B)

	A	B	C	D	E	F	G	H
17	4.矩陣 rA+sB：		設 r=2		設 s=3			
18		=(D17)*(矩陣A)+(F17)*(矩陣B)						
19		=(D17)*(矩陣A)+(F17)*(矩陣B)						
20		=(D17)*(矩陣A)+(F17)*(矩陣B)						

表 4-4　矩陣 $2A+3B$ 的結果

B18　{=(D17)*(矩陣A)+(F17)*(矩陣B)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
17	4.矩陣 rA+sB：		設 r=2		設 s=3			
18		30	33	49				
19		13	22	35				
20		32	32	45				

5. 矩陣的乘法

設 $A=[a_{ij}]_{m\times p}$、$B=[b_{ij}]_{p\times n}$ 分別表示 $m\times p$ 階及 $p\times n$ 階之兩個矩陣，則規定 A 乘 B 之積 AB 為一個 $m\times n$ 階矩陣，而其第 i 列第 j 行之元是 A 中第 i 列元素與 B 中第 j 行之對應元相乘之總和，即 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$。

(1) 語法：=MMULT(array1, array2)

參數：array1 和 array2 是要進行矩陣乘法運算的兩個陣列。array1 的行數（*column*）必須與 array2 的列數（*row*）相同，而且兩個陣列中都只能包含數值。array1 和 array2 可以是儲存格區域或陣列常數。

(2) 實例：設矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 6 & 11\\ 5 & 8 & 13\\ 7 & 10 & 15\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}8 & 7 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 6 & 4 & 5\end{bmatrix}$，求 AB。

解：

① 矩陣 A、B 的命名：請參考表 3-1。

② 矩陣 AB 的設定：在儲存格 B26 輸入公式：=MMULT(矩陣 A, 矩陣 B)，複製 B26 儲存格公式到 B26：D28，如表 5-1。完成後按 F2 鍵，同時按住 Shift+Ctrl 鍵，再按 Enter 鍵，執行結果如表 5-2。

表 5-1　矩陣 AB 的設定

B26　　'=MMULT(矩陣A,矩陣B)

	A	B	C	D	E	F	G
25	5.矩陣 A×B：						
26		=MMULT(矩陣A,矩陣B)					
27		=MMULT(矩陣A,矩陣B)					
28		=MMULT(矩陣A,矩陣B)					

表 5-2　矩陣 AB 的結果

B26　　{=MMULT(矩陣A,矩陣B)}

	A	B	C	D	E	F	G
25	5.矩陣 A×B：						
26		96	77	100			
27		126	103	134			
28		156	129	168			

6. 矩陣 A、B 的對應元乘積總和

若有甲、乙、丙三種不同的產品，在不同的時段中有不同銷售數量組成一個矩陣 A，且在不同的時段中，有相對應的銷售單價組成一個矩陣 B，求總銷售金額。設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{m\times n}$ 分別表示 $m\times n$ 階及 $m\times n$ 階之兩個矩陣，則 A、B 對應元乘積總和為 A 中第 i 列第 j 行之元與 B 中第 i 列第 j 行之對應元相乘之總和，即總和=$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$。

(1) 語法：=SUMPRODUCT (array1, [array2], [array3], ...)

參數：array1、array2、array3、...，最多可到 255 個陣列引數，惟所有陣列的大小必須相同。

(2) 實例：下表是某公司一月份銷貨的數量與單價表，求其總銷售金額？

產品	早上數量	下午數量	晚上數量		早上單價	下午單價	晚上單價
甲	3	6	11		8	7	9
乙	5	8	13		1	2	3
丙	7	10	15		6	4	5

解：

① 矩陣 A、B 的命名：請參考表 3-1。

② 矩陣 A、B 對應元乘積總和的設定：在儲存格 B30 輸入公式：=SUMPRODUCT(矩陣 A, 矩陣 B)，如表 6-1。輸入公式後，同時按住 Shift+Ctrl 鍵，再按 Enter 鍵，執行結果如表 6-2。

表 6-1　矩陣 A、B 對應元乘積總和的設定

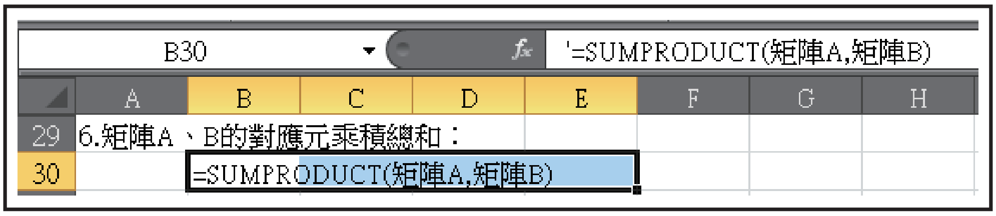
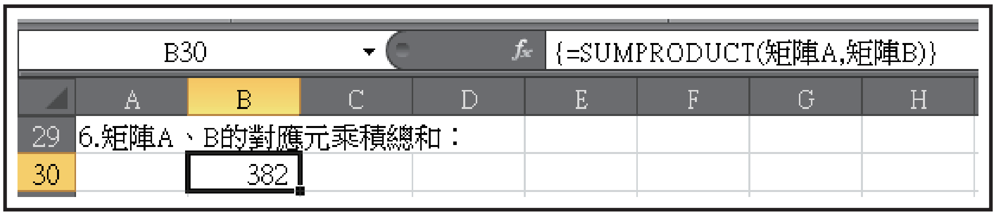


表 6-2　矩陣 A、B 對應元乘積總和的結果



7. 矩陣 A 的 n 次方

矩陣 A 的 n 次方視同指數律運算：例如 $A^4 = A \times A \times A \times A = AA^3 = A^2A^2$。

(1) 語法：A^2 ：=MMULT(array, array)

　　　　A^3 ：=MMULT(MMULT(array, array), array)，其餘依此類推。

參數：array 是具有相等行列數的數值陣列或儲存格區域。

(2) 實例：設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 5 & 8 & 13 \\ 7 & 10 & 15 \end{bmatrix}$，求 A^4。

解：

① 矩陣 A 的命名：請參考表 3-1。

② 矩陣 A^4 的設定：在儲存格 B32 輸入公式：=MMULT(MMULT(MMULT(矩陣 A, 矩陣 A), 矩陣 A), 矩陣 A)，複製 B32 儲存格公式到 B32：D34，如表 7-1。完成後按 F2 鍵，同時按住 Shift+Ctrl 鍵，再按 Enter 鍵，執行結果如表 7-2。

表 7-1　矩陣 A^4 的設定

B32　'=MMULT(MMULT(MMULT(矩陣A,矩陣A),矩陣A),矩陣A)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
31	7.矩陣A的n次方：			設n=	4						
32		=MMULT(MMULT(MMULT(矩陣A,矩陣A),矩陣A),矩陣A)									
33		=MMULT(MMULT(MMULT(矩陣A,矩陣A),矩陣A),矩陣A)									
34		=MMULT(MMULT(MMULT(矩陣A,矩陣A),矩陣A),矩陣A)									

表 7-2　矩陣 A^4 的結果

B32　{=MMULT(MMULT(MMULT(矩陣A,矩陣A),矩陣A),矩陣A)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
31	7.矩陣A的n次方：			設n=	4						
32		87728	134912	213552							
33		111944	172160	272520							
34		136160	209408	331488							

8.　矩陣的除法

矩陣運算中並無所謂的除法，實則是在計算一矩陣與另一矩陣的反矩陣之相乘，如 $A\times B^{-1}$，正如同想要計算 $m\div n$，我們也可以轉換為計算 $m\times n^{-1}$，其結果相同。

設 B 為 n 階方陣，若有一 n 階方陣 B^{-1}，使得 $BB^{-1}=B^{-1}B=I_n$（I_n 是單位矩陣），則稱 B^{-1} 為 B 的反矩陣。所以，若想知道矩陣 A 除以矩陣 B 的結果，則只要計算 $A\times B^{-1}$ 即可得，惟前提是方陣 B 的行列式值不可為 0。

(1) 語法：行列式值：=MDETERM(array)

反矩陣：=MINVERSE(array)

參數：array 是具有相等行列數的數值陣列或儲存格區域。

(2) 實例：設矩陣 $A=\begin{bmatrix}3&6&11\\5&8&13\\7&10&15\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}8&7&9\\1&2&3\\6&4&5\end{bmatrix}$，求 $det(B)$，AB^{-1}。

解：

① 矩陣 A、B 的命名：請參考表 3-1。

② 行列式值 $det(B)$的設定：在儲存格 D35 輸入公式：=MDETERM(矩陣 B)，如表 8-1。輸入公式後，同時按住 Shift+Ctrl 鍵，再按 Enter 鍵，執行結果如表 8-2。

③ 矩陣 AB^{-1} 的設定：在儲存格 B37 輸入公式：=MMULT(矩陣 A, MINVERSE(矩陣 B))，複製 B37 儲存格公式到 B37：D39，如表 8-3。完成後按 F2 鍵，同時按住 Shift+Ctrl 鍵，再按 Enter 鍵，執行結果如表 8-4。

表 8-1　行列式值 *det*(*B*)的設定

D35 | f_x '=MDETERM(矩陣B)

	A	B	C	D	E	F	G
35	8.行列式值 det(B)：			=MDETERM(矩陣B)			

表 8-2　行列式值 *det*(*B*)的結果

D35 | f_x {=MDETERM(矩陣B)}

	A	B	C	D	E	F	G
35	8.行列式值 det(B)：			3			

表 8-3　矩陣 AB^{-1} 的設定

B37 | f_x '=MMULT(矩陣A,MINVERSE(矩陣B))

	A	B	C	D	E	F	G	H
36	8.矩陣A/B：							
37		=MMULT(矩陣A,MINVERSE(矩陣B))						
38		=MMULT(矩陣A,MINVERSE(矩陣B))						
39		=MMULT(矩陣A,MINVERSE(矩陣B))						

表 8-4　矩陣 AB^{-1} 的結果

B37 | f_x {=MMULT(矩陣A,MINVERSE(矩陣B))}

	A	B	C	D	E	F	G	H
36	8.矩陣AB^{-1}：							
37		-5.33333	9.66667	6				
38		-3.33333	7.66667	4				
39		-1.33333	5.66667	2				

三、結論》

生活中的事務，經過量化後，有些問題可以藉著矩陣加以處理。Excel 軟體提供了矩陣的計算，促使矩陣在解決聯立方程式、轉移矩陣、馬可夫的政策分析等等，是一個很好利用的工具。在數學教學領域中，更是值得推廣。

參考資料：

註 1.　百度百科網頁：矩陣，取自 http://baike.baidu.com/subview/10337/6436981.htm。

註 2.　利用 Excel 進行矩陣計算（2013）。2016 年 1 月 15 日，取自 http://gkm0913.blogspot.tw/2013/09/excel.html。

註 3.　許志農（2011）。高中數學第四冊。新北市：龍騰文化事業公司。P.139。

註 4.　鍾國華。高中數學第四冊講義。臺北市祐德高中。

一個相關係數的弔詭

江慶昱／衛道中學退休教師

一、前言》

筆者在中學教書 30 多年，常常考完試，有些老師為了某些原因，要加分。

最離奇的是原始分數開根號，乘以 10，再加幾分。

所以每次教學研討會幾乎都會有一個題目：如何讓命題合理化？

這個故事已有 10 多年了。這一天，教學研究會，一位老師說：江老師，你出題也很難啊。

二、突發奇想》

剛好那次期末考，國三數學由我命題。我有以下想法：

命一份試卷，25 小題，每題 4 分。

考前對每個小題給一個「預估答對率」，考完試後，作「實際答對率」，然後做兩者之間的相關係數（註 1）。

此作法有以下好處：

(1) 如果要求老師命題合理化，那麼，應該設定「預估答對率」中，對試題的難易度有所取捨。

例如：命題老師「讓」考題中有 30%的題目「預估答對率」為 80%，50%的題目「預估答對率」為 60%，剩下 20%的題目「預估答對率」為 30%，則預估的平均分數為 60 分。

(2) 如果老師的整體預估答對率相當低，表示這位老師想開殺戒。

(3) 如果老師的整體預估答對率非常高，表示這位老師想放水。

(4) 最重要的是最後的試題分析。

例如：某個題目，預估 75%會做對，但實際上只有 30%的人做對；或者預估 30%會做對，但實際上有 70%的人做對。這都表示老師對學生學習程度的認知值得商榷。

實務上的做法，可以設計一個電腦程式來直接算相關係數與試題分析。

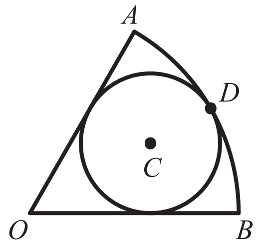
三、值得一提》

事隔 10 多年，筆者只記得該份試卷的預估答對率與實際答對率兩者間的相關係數為 0.67，而且有 3 道題目，預估答對率與實際答對率有較大的偏差。

其中有一個題目如下：

如圖，一圓心角 60°扇形 OAB，半徑為 R，其內切圓 C 的半徑為 r，

則 $\dfrac{r}{R}=$______。



筆者覺得這個題目相當簡單，因此預估 75%的答對率，但是實際答對率只有 30%，後來每次教到圓的單元，會測試一下，發現學生都不太會，因此可以肯定這是一道不容易的題目。身為老師的我應該有如此認知。

四、意外的結局》

上述相關係數的論述與做法是非常科學的，不管是個人或學校的立場，老師都應該適時做一下。因此，在教學研究會提出。

結果，沒有老師贊同。

會後，詢問一位較體己的老師，為什麼不支持。他說：考完就考完了嘛！不太懂其中含意。

偶而聽到教務處會在考完試成績發布後，跟老師說：貴班平均差全校平均一個標準差喔，請加油。

為什麼老師不支持這樣做？這件事其實一直困擾我，因此借此一角，希望有機會聽聽其他老師的意見。

五、後記》

最近生活規律亂了，看新聞的名嘴談論針貶天下大事，心情雖不至於隨各家民調起伏，但總有一個疑問：這些民調科學嗎？值得相信嗎？臺灣的選民或政客會玩弄民調嗎？

把上述情況告訴在臺大數學系任教的陳宏教授，他說：這對出題老師基本上是出力不討好的事，搞不好是一種懲罰，所以沒有老師會「搬磚砸腳」。

統計學的重要性是無庸置疑的，但人為因素、社會因素想必影響了臺灣統計學的發展。陳教授在臺大數學系推動統計研究所的建立，歷經 20 多年終於在 2013 年成立，謹此恭賀。

註 1：相關係數

X 表示「每小題的預估答對率」，為 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，

Y 表示「每小題的實際答對率」，為 $y_1, y_2, \ldots, y_n$，則 X, Y 的相關係數為

$$r(X,Y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2}}$$ 。

對數值估算法則

葉善雲／臺北市東山高中

一、前言》

對數 $\log_a b$ 是指數方程式 $a^x = b$（其中 $a>0,\ b>0$ 且 $a\neq 1$）的唯一實根，為了配合十進位記數法，以 10 為底之正數 x 的對數 $\log_{10} x$ 稱為正數 x 的**常用對數**，常用對數的底數經常省略而簡記為 $\log x$（有了常用對數值，再由換底公式：$\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$，可得出以 a 為底的所有正數 x 之對數值），例如 $x=2$ 時，按計算器可得 $\log 2 \approx 0.301029995$，但要如何計算或估算 $\log 2$ 及一般常用對數值呢？本文第一節，利用勘根定理估算 $\log 2$ 的近似值；第二節，利用 $\log 2 \approx 0.30103$ 及修正 69.34 法則，估算其它常用對數值；第三節，利用對數值估算方根的近似值。

第一節　估算 $\log 2$ 的近似值

在參考資料 1 中，介紹兩種求 $\log 2$ 的方法（附錄介紹國編版教科書的方法），第一個是布里格斯（Henry Briggs, 1561～1630）利用 2^n 的位數來求 $\log 2$ 的近似值[1]；另一個方法是歐拉（Leonhard Euler, 1707～1783）用不斷地開根號求近似值來逼近 $\log 5 = 1-\log 2$。此處，我們反覆利用「勘根定理」估算 $\log 2$（方程式 $10^x - 2 = 0$ 的唯一正實根）的近似值[2]。

令 $f(x) = 10^x - 2$，由 $f(0)f(1) = -8 < 0$，知 $0 < \log 2 < 1$；

因為 $1 < 2^2 < 10$，即 $10^0 < 2 < 10^{\frac{1}{2}}$，得 $f(0)f(\frac{1}{2}) < 0$，知 $0 < \log 2 < \frac{1}{2}$；

因為 $10 < 2^{2^2} < 10^2$，即 $10^{\frac{1}{2^2}} < 2 < 10^{\frac{2}{2^2}}$，得 $f(\frac{1}{2^2})f(\frac{2}{2^2}) < 0$，知 $\frac{1}{2^2} < \log 2 < \frac{2}{2^2}$；

因為 $10^2 < 2^{2^3} < 10^3$，即 $10^{\frac{2}{2^3}} < 2 < 10^{\frac{3}{2^3}}$，得 $f(\frac{2}{2^3})f(\frac{3}{2^3}) < 0$，知 $\frac{2}{2^3} < \log 2 < \frac{3}{2^3}$；

一般情形，我們引用底下明顯的引理：

《引理 1》若 2^{2^n} 為 k 位數，則 $10^{k-1} < 2^{2^n} < 10^k$，即 $10^{\frac{k-1}{2^n}} < 2 < 10^{\frac{k}{2^n}}$，

此時 $\dfrac{k-1}{2^n} < \log 2 < \dfrac{k}{2^n}$。

---

[1] 例如，若已知 2^{100} 為 31 位數，則由 $2^{100} = N\times 10^{30}$，其中 $1\le N<10$，可得 $\log 2 = \dfrac{30+\log N}{100} = 0.30 + \dfrac{\log N}{100} \approx 0.30$（其中 $0 \le \log N < 1$）。

[2] 勘根定理：設 $f(x)$ 為連續函數（圖形沒有斷點），若 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 在 a,b 之間有實根。

《引理 2》若 A,B 分別為 h,k 位數，則 AB 為 $h+k$ 位數或 $(h+k-1)$ 位數。

(1) 考慮 2^{2^n} 的位數（其中 $n=2,3,4,\cdots,9$）[3]，列表如下：

n	2	3	4	5	6	7	8	9
位數	2	3	5	10	20	39	78	155

例如：由 2^{2^9} 為 155 位數，即 $10^{154}<2^{2^9}<10^{155}$，知 $\dfrac{154}{2^9}<\log 2<\dfrac{155}{2^9}$，

此時 $0.30078125\approx\dfrac{154}{512}<\log 2<\dfrac{155}{512}\approx 0.302734375$。

(2) 考慮 2^{2^n} 的位數（其中 $n=10,11,12,\cdots,17$）[4]，列表如下：

n	10	11	12	13	14	15	16	17
位數	309	617	1234	2467	4933	9865	19729	39457

例如：由 $2^{2^{17}}$ 為 39457 位數，知 $\dfrac{39456}{2^{17}}<\log 2<\dfrac{39457}{2^{17}}$，

此時 $0.30102539\approx\dfrac{39456}{131072}<\log 2<\dfrac{39457}{131072}\approx 0.30103302$。

(3) 考慮 2^{2^n} 的位數（其中 $n=18,19,20,\cdots,24$）[5]，列表如下：

n	18	19	20	21	22	23	24
位數	78914	157827	315653	631306	1262612	2525223	5050446

例如：由 $2^{2^{24}}$ 為 5050446 位數，知 $\dfrac{5050445}{2^{24}}<\log 2<\dfrac{5050446}{2^{24}}$，

此時 $0.30102998\approx\dfrac{5050445}{16777216}<\log 2<\dfrac{5050446}{16777216}\approx 0.301030039$。

---

[3] ① 事實：當 $n=5$ 時，$2^{32}=4294967296$ 為 10 位數；
當 $n=6$ 時，$2^{64}=18446744073709551616$ 為 20 位數。
② 計算位數：由 $\log(2^{64})\approx 64\times 0.301\approx 19.2$，知 2^{64} 為 $19+1=20$ 位數；
由 $\log(2^{2^9})\approx 512\times 0.301\approx 154.1$，知 2^{2^9} 為 $154+1=155$ 位數。

[4] 利用 $\log 2\approx 0.30103$，計算 $\log(2^{2^{17}})\approx 131072\times 0.30103\approx 39456.6$，知 $2^{2^{17}}$ 為 39457 位數。

[5] 計算位數：由 $\log(2^{2^{24}})\approx 16777216\times 0.30103\approx 5050445.3$，知 $2^{2^{24}}$ 為 5050446 位數。

(4) 考慮 2^{2^n} 的位數（其中 $n=25,26,\cdots,29$ ）[6]，列表如下：

n	25	26	27	28	29
位數	10100891	20201782	40403563		161614249

例如：由 $2^{2^{29}}$ 為 161614249 位數，知 $\dfrac{161614248}{2^{29}}<\log 2<\dfrac{161614249}{2^{29}}$ ，

此時 $0.30102999508\approx\dfrac{161614248}{536870912}<\log 2<\dfrac{161614249}{536870912}\approx 0.301029996946$ 。

(5) 考慮 2^{2^n} 的位數（其中 $n=30,31,\cdots,34$ ）[7]，列表如下：

n	30	31	32	33	34
位數	323228497	646456994	1292913987	2585827973	5171655946

例如：由 $2^{2^{34}}$ 為 5171655946 位數，知 $\dfrac{5171655945}{2^{34}}<\log 2<\dfrac{5171655946}{2^{34}}$ ，

此時 $0.3010299956077\approx\dfrac{5171655945}{17179869184}<\log 2<\dfrac{5171655946}{17179869184}\approx 0.3010299956659$ 。

至此，只要我們能正確的計算出 2^{2^n} 的位數，就能估算 $\log 2$ 的範圍[8]。

例如：由 $2^{2^{52}}$ 為 1355718576299648 位數，知

$0.3010299956639810\cdots<\log 2<\dfrac{1355718576299648}{4503599627370496}\approx 0.3010299956639812\cdots$ ，

此時 $\log 2\approx 0.301029995663981\cdots$ 。

第二節　估算常用對數的近似值

由 69.34 法則 $\log(1+x\%)\approx\dfrac{\log 2}{\dfrac{69.34}{x}+0.34}$ ，當 $x\neq 0$ 且 $-10\le x\le 20$ 時，估算誤差範圍約在 1.1×10^{-4} 以內；但隨著 $|x|$ 值增大，估算誤差也大增。

---

[6] 實際上，$\log 2$ 的值接近 0.30103 但小於 0.30103，當 $n\ge 28$ 時，計算 2^{2^n} 的位數開始出現差異。

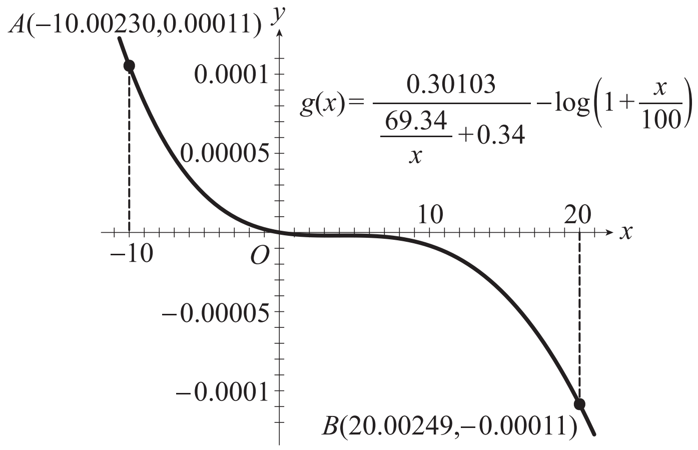
若取 $\log 2\approx 0.30103$ ，則 $\log(2^{2^{28}})\approx 268435456\times 0.30103\approx 80807125.3$ 。

事實上，$2^{2^{28}}$ 為 80807125 位數（而不是 80807126 位數）。

至此，$0.30102999508\approx\dfrac{80807124}{268435456}<\log 2<\dfrac{80807125}{268435456}\approx 0.3010299988$ 。

[7] 計算位數：由 $\log(2^{2^{34}})\approx 17179869184\times 0.301029995664\approx 5171655945.97$ ，知 $2^{2^{34}}$ 為 5171655946 位數。

[8] 驚人的事實是，布里格斯在 1624 年算出 2 的 100 兆次方（ 10^{14} ）是 30,1029,9956,6399 位數，這真是個天文數字！此時，$\log 2\approx 0.30102999566398\cdots$ 。



69.34 法則估算誤差

為了減少誤差，定值 69.34 應隨 x 值變動，如下表所示：

修正法則之 69.34 為 69.xxxx

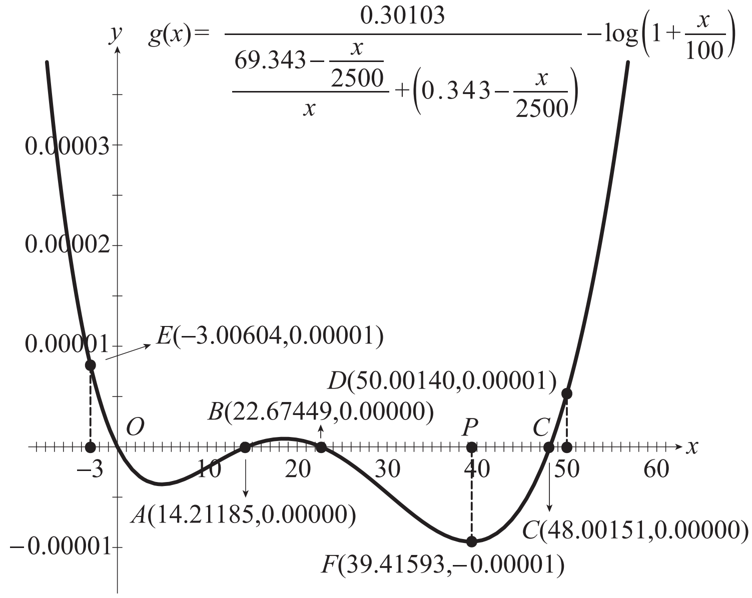
x	$\log(1+x\%)$ 實際值	69.k 法則估算值	誤差	k 值
10.0	0.041393	0.041393	−0.00000017	3387
10.5	0.043362	0.043363	0.00000026	3385
11.0	0.045323	0.045323	−0.00000004	3384
11.5	0.047275	0.047275	0.00000034	3382
12.0	0.049218	0.049218	−0.00000016	3381
12.5	0.051153	0.051152	−0.00000079	3380
13.0	0.053078	0.053078	−0.00000056	3378
13.5	0.054996	0.054996	−0.00000034	3376
14.0	0.056905	0.056905	−0.00000014	3374
14.5	0.058805	0.058806	0.00000005	3372
15.0	0.060698	0.060698	0.00000022	3370
15.5	0.062582	0.062582	0.00000037	3368
16.0	0.064458	0.064458	0.00000050	3366
16.5	0.066326	0.066327	0.00000061	3364
17.0	0.068186	0.068187	0.00000069	3362
17.5	0.070038	0.070039	0.00000075	3360
18.0	0.071882	0.071883	0.00000079	3358
18.5	0.073718	0.073719	0.00000081	3356
19.0	0.075547	0.075548	0.00000080	3354
19.5	0.077368	0.077369	0.00000077	3352
20.0	0.079181	0.079182	0.00000071	3350

經一些測試與調整[9]，「遂」將 69.34 修正為 $69.343-\dfrac{x}{2500}$，整理出底下的估算方法，稱為**對數值估算法則**。

《對數值估算法則》

設 $\log 2 \approx 0.30103$ 為已知，若 $x \neq 0$ 且 $-3 \leq x \leq 50$，

則 $\log\left(1+x\%\right) \approx \dfrac{\log 2}{\dfrac{69.343-\dfrac{x}{2500}}{x}+0.343-\dfrac{x}{2500}}$。



對數值估算法則估算誤差

例如：$\log 1.2345 \approx \dfrac{0.30103}{\dfrac{69.343-\dfrac{23.45}{2500}}{23.45}+0.343-\dfrac{23.45}{2500}} \approx \dfrac{0.30103}{\dfrac{69.33362}{23.45}+0.33362}$

≈ 0.09149076（正確值約為 0.09149109）。

例如：$\log\dfrac{3}{2}=\log\left(1+50\%\right) \approx \dfrac{0.30103}{\dfrac{69.323}{50}+0.323} \approx 0.17609654$。

（正確值約為 0.17609126，誤差小於 1×10^{-5}）

例如：$\log 0.975=\log\left(1+\left(-2.5\right)\%\right) \approx \dfrac{0.30103}{\dfrac{69.344}{-2.5}+0.344} \approx -0.01098906$。

（正確值約為 -0.01099538，誤差小於 1×10^{-5}）。

---

[9] 由 $x=12.5+2.5m$ 與 $k=0.338-0.001m$，取 $k=0.338-\dfrac{x-12.5}{2.5\times1000}=0.343-\dfrac{x}{2500}$。

應用：估算 $\log k$ 的對數值，其中 $1 \le k < 10$

(1) 若 $\frac{3}{2} < k < 2$ ，則 $\log k = \log\left(\frac{3}{2}\times\left(\frac{2}{3}k\right)\right) = \log(1+50\%) + \log\left(1+\frac{100\times(2k-3)}{3}\%\right)$ 。

(2) 若 $2 \le k \le 3$ ，則 $\log k = \log\left(2\times\frac{k}{2}\right) = \log 2 + \log\left(1+\frac{100\times(k-2)}{2}\%\right)$ 。

(3) 若 $3 < k < 4$ ，則 $\log k = \log\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{k}{3}\right) = \log 2 + \log\frac{3}{2} + \log\left(1+\frac{100(k-3)}{3}\%\right)$ 。

(4) 若 $4 \le k \le 6$ ，則 $\log k = \log\left(4\times\frac{k}{4}\right) = 2\log 2 + \log\left(1+\frac{100(k-4)}{4}\%\right)$ 。

(5) 若 $6 < k < 8$ ，則 $\log k = \log\left(4\times\frac{3}{2}\times\frac{k}{6}\right) = 2\log 2 + \log\frac{3}{2} + \log\left(1+\frac{100(k-6)}{6}\%\right)$ 。

(6) 若 $8 \le k < 10$ ，則 $\log k = \log\left(8\times\frac{k}{8}\right) = 3\log 2 + \log\left(1+\frac{100(k-8)}{8}\%\right)$ 。

例如： $\log 2.96 = \log 2 + \log(1+48\%)$

$$\approx 0.30103 + \frac{0.30103}{\frac{69.343-\frac{48}{2500}}{48} + 0.343 - \frac{48}{2500}}$$

$$\approx 0.30103 + \frac{0.30103}{\frac{69.3238}{48} + 0.3238}$$

≈ 0.47129142（正確值約為 0.47129171）

例如： $\log 4.907 = 2\log 2 + \log(1+22.675\%)$

$$\approx 0.60206 + \frac{0.30103}{\frac{69.343-\frac{22.675}{2500}}{22.675} + 0.343 - \frac{22.675}{2500}}$$

$$\approx 0.60206 + \frac{0.30103}{\frac{69.33393}{22.675} + 0.33393}$$

≈ 0.690816061（正確值約為 0.690816058）

例如：$\log 9.137 = 3\log 2 + \log\left(1 + 14.2125\%\right)$

$$\approx 0.90309 + \cfrac{0.30103}{\cfrac{69.343 - \cfrac{14.2125}{2500}}{14.2125} + 0.343 - \cfrac{14.2125}{2500}}$$

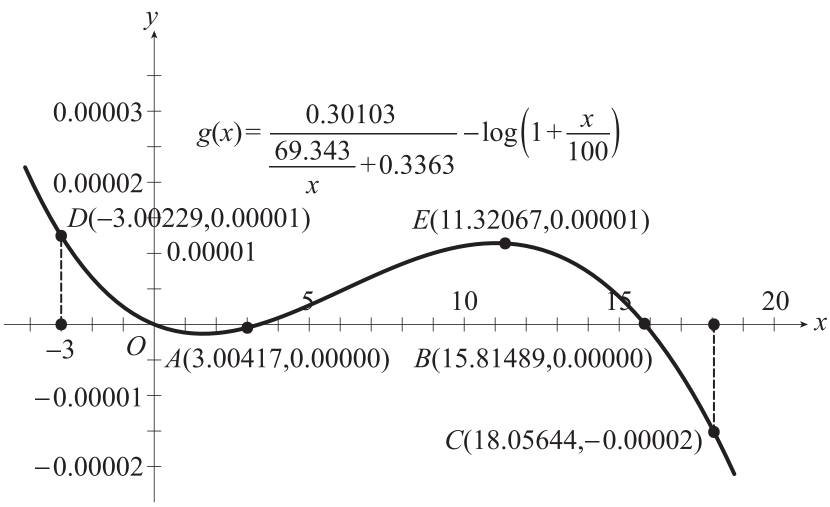
$$\approx 0.90309 + \cfrac{0.30103}{\cfrac{69.337315}{14.2125} + 0.337315}$$

≈ 0.96080358（正確值約為 0.96080362）

第三節　開 n 次方根估算

由對數值估算法則可得對數值較好的近似值；反之，由對數值回推真數值，並不容易求解。因此，我們回溯 69.34 法則[10]，並將之修正為

$\log\left(1+x\%\right) \approx \cfrac{0.30103}{\cfrac{69.343}{x} + 0.3363}$，使估算誤差範圍再縮小。



修正之 69.34 法則估算誤差

如此一來，利用常用對數值 $\log k$ 可以估算 k 的 n 次方根的值：

[10] 參考資料 3 中，利用迴歸線方法得 $\dfrac{\log 2}{\log(1+x\%)} \approx \dfrac{69.3427}{x} + 0.336291$。

《n 次方根估算》設 $0 < x \le 20n$ ，則 $\sqrt[n]{(1+x\%)} \approx 1+\dfrac{69.343}{n\cdot\dfrac{\log 2}{\log(1+x\%)}-0.3363}\%$ 。

〔說明〕令 $\sqrt[n]{(1+x\%)}=1+m\%$ ，則 $\dfrac{1}{n}\log(1+x\%)=\log(1+m\%)$ ，

由 69.34 法則修正，得 $\dfrac{1}{n}\cdot\log(1+x\%)=\dfrac{\log 2}{\dfrac{69.343}{m}+0.3363}$ ，

於是 $m=\dfrac{69.343}{n\cdot\dfrac{\log 2}{\log(1+x\%)}-0.3363}$ 。

例如：$\sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{5}}\approx 1+\dfrac{69.343}{5\times\dfrac{0.30103}{0.30103}-0.3363}\%\approx 1.148687$（正確值約為 1.148698）。

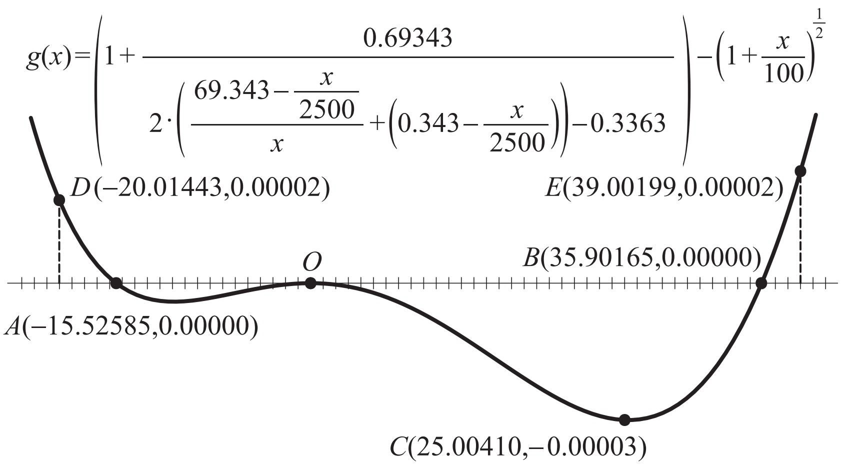
為求更準確的估算，底下針對平方根及立方根，給予最佳適用範圍建議。

《應用一》估算平方根：

若 $x\neq 0$ 且 $-20\le x\le 39$ ，則

$$\sqrt{1+x\%}\approx 1+\frac{69.343}{2\cdot\left(\dfrac{69.343-\dfrac{x}{2500}}{x}+0.343-\dfrac{x}{2500}\right)-0.3363}\%。$$

最佳範圍建議：$x\neq 0$ 且 $-15\le x\le 10$ 。



平方根估算誤差

例如：直接套用估算公式

$$\text{由}\log 1.2345 \approx \frac{0.30103}{\dfrac{69.343-\dfrac{23.45}{2500}}{23.45}+0.343-\dfrac{23.45}{2500}} \approx 0.09149076\text{，}$$

$$\text{估算}\sqrt{1.2345} \approx 1+\frac{69.343}{\dfrac{2\times 0.30103}{0.09149076}-0.3363}\% \approx 1.111050874\text{。}$$

（正確值約為 1.11108056，誤差約3×10^{-5}）。

〔另解[11]〕$\sqrt{1.2345}=\dfrac{10}{9}\times\sqrt{1.2345\times\dfrac{81}{100}}=\dfrac{10}{9}\times\sqrt{(1-0.0055\%)}$

$$\approx \frac{10}{9}\times\left(1+\frac{69.343}{2\cdot\left(\dfrac{69.3430022}{-0.0055}+0.3430022\right)-0.3363}\%\right)$$

$$\approx \frac{10}{9}\times(1-0.002750038\%)$$

≈ 1.11108055（正確值約為 1.11108056）。

例如：$\sqrt{5}=2\times\sqrt{\dfrac{5}{4}}=2\times(1+25\%)^{\frac{1}{2}}$ 或 $\sqrt{5}=2\times\dfrac{10}{9}\times\sqrt{\dfrac{5}{4}\times\dfrac{81}{100}}=\dfrac{20}{9}\times(1+1.25\%)^{\frac{1}{2}}$

此處[12] $\sqrt{5}=2\times\dfrac{10}{9}\times\sqrt{\dfrac{5}{4}\times\dfrac{81}{100}}=\dfrac{20}{9}\times(1+1.25\%)^{\frac{1}{2}}$

$$\approx \frac{20}{9}\times\left(1+\frac{69.343}{2\cdot\left(\dfrac{69.343-\dfrac{1.25}{2500}}{1.25}+0.343-\dfrac{1.25}{2500}\right)-0.3363}\%\right)$$

$$\approx \frac{20}{9}\times\left(1+\frac{69.343}{2\cdot\left(\dfrac{69.3425}{1.25}+0.3425\right)-0.3363}\%\right)$$

≈ 2.236067696（正確值約為 2.236067977，誤差約3×10^{-7}）。

---

[11] 將套用值略作調整，原為 $x=23.45$ 調整成更接近 $-16\le x\le 10$ 的 $x=0.0055$ 。

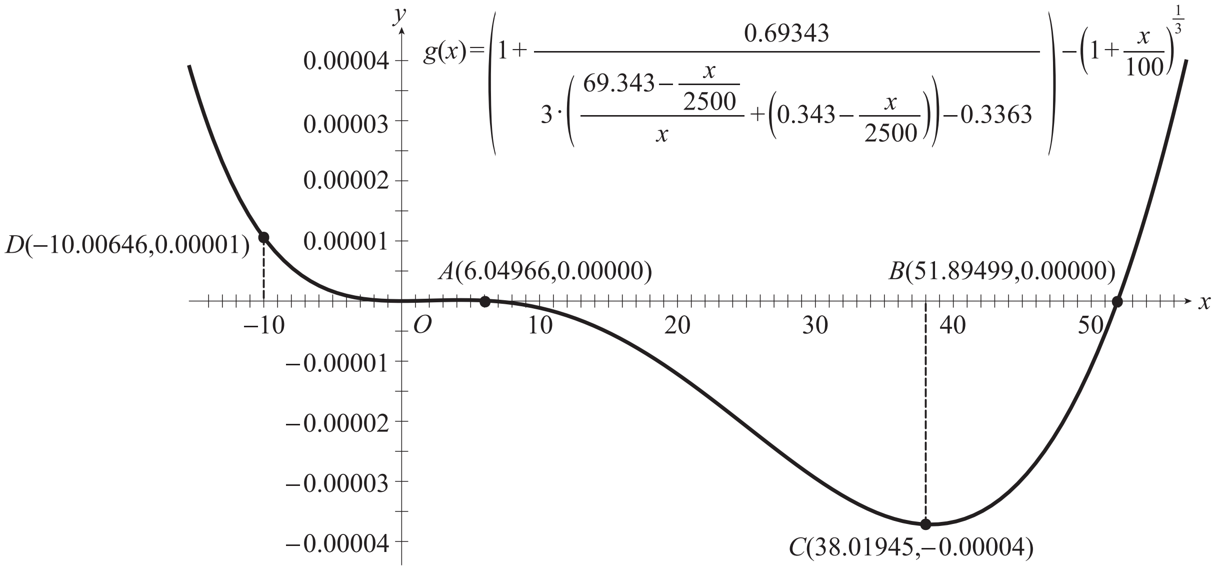
[12] $5=1+400\%$ 明顯不適合直接套用公式，應予調整，又調整有很多方式，例如：$\sqrt{5}=2\times\sqrt{\dfrac{5}{4}}=2\times(1+25\%)^{\frac{1}{2}}$ 或 $\sqrt{5}=2\times\dfrac{10}{9}\times\sqrt{\dfrac{5}{4}\times\dfrac{81}{100}}=\dfrac{20}{9}\times(1+1.25\%)^{\frac{1}{2}}$ ，前者 $x=25$ ，而後者 $x=1.25$ ，顯然後者更接近準確值。

《應用二》估算 **3** 次方根：

若 $x \neq 0$ 且 $-10 \le x \le 52$ ，則

$$\sqrt[3]{(1+x\%)} \approx 1+\frac{69.343}{3\cdot\left(\dfrac{69.343-\dfrac{x}{2500}}{x}+0.343-\dfrac{x}{2500}\right)-0.3363}\% \text{ 。}$$

最佳範圍建議： $x \neq 0$ 且 $-10 \le x \le 20$ 。



立方根估算誤差

例如： $\sqrt[3]{2}=\dfrac{5}{4}\times\sqrt[3]{2\times\dfrac{64}{125}}=\dfrac{5}{4}\times\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{300}{125}\%\right)}=\dfrac{5}{4}\times(1+2.4\%)^{\frac{1}{3}}$

$$\approx\frac{5}{4}\times\left(1+\frac{69.343}{3\cdot\left(\dfrac{69.343-\dfrac{2.4}{2500}}{2.4}+69.343-\dfrac{2.4}{2500}\right)-0.3363}\%\right)$$

$$\approx\frac{5}{4}\times\left(1+\frac{69.343}{3\cdot\left(\dfrac{69.34204}{2.4}+0.34204\right)-0.3363}\%\right)$$

≈ 1.25992118（正確值約為 1.25992105，誤差小於 1×10^{-6} ）。

例如：$\sqrt[3]{10}=2\times\frac{15}{14}\times\sqrt[3]{10\times\frac{343}{3375}}=\frac{15}{7}\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{55}{3375}\%\right)}=\frac{15}{7}\times(1+1.62963\%)^{\frac{1}{3}}$

$$\approx\frac{15}{7}\times\left(1+\frac{69.343}{3\cdot\left(\frac{69.342348}{1.62963}+0.342348\right)-0.3363}\%\right)\approx\frac{15}{7}\times(1+0.54029153\%)$$

≈ 2.15443482（正確值約為 2.15443469）。

二、附錄》

參考國編版教科書計算方法，計算 $\log 2$ 與 $\log 3$

先將 10 一再開方，得到 10 的次方的近似值如下：

n	1/2	1/4	1/8	1/6	1/32
10^n	3.16227766	1.77827941	1.33352143	1.15478198	1.07460783

n	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
10^n	1.03663293	1.01815172	1.00903505	1.00450736	1.00225115

n	1/2048	1/4096	1/8192	1/16384	1/32768
10^n	1.00112494	1.00056231	1.00028112	1.00014055	1.00007027

n	1/65536	1/131072	1/262144	1/524288	1/1048576
10^n	1.00003514	1.00001757	1.00000878	1.00000439	1.00000220

上表（n 為 $\frac{1}{2}$ 的次方）作為基礎，要計算 $\log k$，方式是先在表中找尋不比 k 大的數，例如：表中第一個比 2 小的是 $10^{\frac{1}{4}}=1.77827941$，然後去除以它得到 $\frac{2}{1.77827941}\approx 1.12468265$，接下去比這商小的第一個數值是 $10^{\frac{1}{32}}=1.07460783$，如同前述相除得 $\frac{1.12468265}{1.07460783}\approx 1.04659823$，繼續在表中挑出比較小的值，如此不斷的計算下去……。

(1) 用此方法計算 $\log 2$ 如下：

$$2=1.77827941\times\frac{2}{1.77827941}$$

$$\approx 10^{\frac{1}{4}}\times 1.12468265=10^{\frac{1}{4}}\times\left(1.07460783\times\frac{1.12468265}{1.07460783}\right)$$

$$\approx 10^{\frac{1}{4}}\times 10^{\frac{1}{32}}\times 1.04659823=10^{\frac{1}{4}}\times 10^{\frac{1}{32}}\times\left(1.03663293\times\frac{1.04659823}{1.03663293}\right)$$

$$\approx 10^{\frac{1}{4}}\times 10^{\frac{1}{32}}\times 10^{\frac{1}{64}}\times 1.00961314=10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}}\times\left(1.00903505\times\frac{1.00961314}{1.00903505}\right)$$

$$\approx 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}}\times 1.00057291=10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}}\times\left(1.00056231\times\frac{1.00057291}{1.00056231}\right)$$

$$\approx 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{4096}}\times 1.00001059=10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{4096}+\frac{1}{262144}}\times\frac{1.00001059}{1.00000878}$$

$$\approx 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{4096}+\frac{1}{262144}}\times 1.00000181\text{，}$$

於是 $\log 2\approx\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{4096}+\frac{1}{262144}=\frac{78913}{262144}\approx 0.301029205$ 。

（比較：由 $2^{2^{18}}$ 為 78914 位數，知 $\frac{78913}{2^{18}}<\log 2<\frac{78914}{2^{18}}$ ）

(2) 用 2 的次方倒數和計算 $\log 3$ 如下：

$$3=1.77827941\times\frac{3}{1.77827941}\approx 10^{\frac{1}{4}}\times 1.68702398\approx 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}\times 1.26508951$$

$$\approx 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}\times 1.09552238\approx 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}}\times 1.01946250$$

$$\approx 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}}\times 1.00128741\approx 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{2048}}\times 1.00016229$$

$$\approx 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{2048}+\frac{1}{16384}}\times 1.00002173$$

$$\approx 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{2048}+\frac{1}{16384}+\frac{1}{131072}}\times 1.00000417$$

$$\approx 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{2048}+\frac{1}{16384}+\frac{1}{131072}+\frac{1}{1048576}}\times 1.00000197\text{，}$$

於是 $\log 3\approx\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{2048}+\frac{1}{16384}+\frac{1}{131072}+\frac{1}{1048576}$

$$=\frac{500297}{1048576}\approx 0.477120399\text{ 。}$$

（實際上：若知 $3^{2^{20}}$ 為 500298 位數，可得 $\frac{500297}{2^{20}}<\log 3<\frac{500298}{2^{20}}$ ）

《後記》

現代資訊科技發達，使用電腦或手機按個鍵，對數值或根號近似值就立即呈現出來，本文提供方法所得的估計值之準確度，雖然較傳統之「四位對數查表」提升，但相較之下仍然相當遜色（即仍有很大改進空間），筆者曾猶豫是否該發表拙見？後來想到：萬一停電或是手邊沒有電子器材，該如何計算？就如生產汽車零件，雖然已全面電腦化，但在電腦當機或維修時，仍需「老師傅」靠敏銳的手感來品管零件，缺乏專業師傅的零件廠只好停工！另一方面，不論科技如何進展，「電腦如何求對數近似值」、「對數值的教學」、「數學史上的對數神話」、⋯，仍會繼續傳頌下去。

參考資料：

1. 林倉億（2011 年，2 月 19 日）。怎麼算 log 2 ？。教育部高中數學學科中心電子報，第 52 期。2016 年 1 月 15 日，取自 http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/ePaper/ePaperOpen.ashx?qs0=0&qs1=52#q+e78rribG9nMqFI
2. 國立編譯館（1996）。高中理科數學下冊。P.65～72（對數的近似求法）。
3. 葉善雲（2015 年 3 月）。迴歸線估算修正「財富倍增之 72 法則」之 69.34 法則。龍騰數亦優，第 26 刊，P.23～30。
4. excel 與 GSP 軟件輔助。
5. 計算引擎網站 http://www.wolframalpha.com。

數學競試問題的直觀組合解法與其推廣的組合恆等式

李維昌／國立宜蘭高中

研究目的：教育部101學年度高級中學數學競賽的臺中區複賽試題(一)出了以下這一個題目：

考慮由 n 個 0, 1 組成且 01 剛好出現 m 次的數字串（如 10110101 是由 8 個 0, 1 組成，且 01 剛好出現 3 次的數字串），令 $f(n,m)$ 為所有這種字串個數。

試證：$f(n,m)=C_{2m+1}^{n+1}$

本文試圖藉由組合的概念以直觀的方法來闡釋此競試問題並推廣一些組合恆等式。

研究過程：

預備知識》

一、從編號 1 到 9 號共 9 個號碼，選三個不同號碼共有多少種選法？

解：1. 先從 2 到 8 號，選一個號碼，選法共有 7 種，因此分成下列 7 種情形來討論：

(1) 如果我們先選 2 號，9 個號碼剩下 1 號與 3 到 9 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了三個號碼，共有 (1×7) 種選法。

(2) 如果我們先選 3 號，9 個號碼剩下 1 到 2 號與 4 到 9 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了三個號碼，共有 (2×6) 種選法。

(3) 如果我們先選 4 號，9 個號碼剩下 1 到 3 號與 5 到 9 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了三個號碼，共有 (3×5) 種選法。

(4) 如果我們先選 5 號，9 個號碼剩下 1 到 4 號與 6 到 9 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了三個號碼，共有 (4×4) 種選法。

(5) 如果我們先選 6 號，9 個號碼剩下 1 到 5 號與 7 到 9 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了三個號碼，共有 (5×3) 種選法。

(6) 如果我們先選 7 號，9 個號碼剩下 1 到 6 號與 8 到 9 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了三個號碼，共有 (6×2) 種選法。

(7) 如果我們先選 8 號，9 個號碼剩下 1 到 7 號與 9 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了三個號碼，共有 (7×1) 種選法。

2. 由 1.的討論，可以得知：

$$C_3^9=\sum_{\substack{y_1+y_2=8\\ y_{i\ge 1,i=1,2}}}\left(\prod_{i=1}^{2}y_i\right)$$

$$=1\times 7+2\times 6+3\times 5+4\times 4+5\times 3+6\times 2+7\times 1$$

$$=84$$

二、從編號 1 到 9 號共 9 個號碼，選五個不同號碼共有多少種選法？

解：1. 先從 2 到 8 號，選出兩個號碼，使得大的號碼比小的號碼至少大兩號以上，選法共有 $C_2^{(9-2)-1}=C_2^6=15$ 種。因此我們分成下列 15 種情形來討論：

(1) 如果我們先選 2 號與 4 號，9 個號碼剩下 1 號、3 號與 5 到 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(1\times1\times5)$ 種選法。

(2) 如果我們先選 2 號與 5 號，9 個號碼剩下 1 號、3 到 4 號與 6 到 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(1\times2\times4)$ 種選法。

(3) 如果我們先選 2 號與 6 號，9 個號碼剩下 1 號、3 到 5 號與 7 到 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(1\times3\times3)$ 種選法。

(4) 如果我們先選 2 號與 7 號，9 個號碼剩下 1 號、3 到 6 號與 8 到 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(1\times4\times2)$ 種選法。

(5) 如果我們先選 2 號與 8 號，9 個號碼剩下 1 號、3 到 7 號與 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(1\times5\times1)$ 種選法。

(6) 如果我們先選 3 號與 5 號，9 個號碼剩下 1 到 2 號、4 號與 6 到 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(2\times1\times4)$ 種選法。

(7) 如果我們先選 3 號與 6 號，9 個號碼剩下 1 到 2 號、4 到 5 號與 7 到 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(2\times2\times3)$ 種選法。

(8) 如果我們先選 3 號與 7 號，9 個號碼剩下 1 到 2 號、4 到 6 號與 8 到 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(2\times3\times2)$ 種選法。

(9) 如果我們先選 3 號與 8 號，9 個號碼剩下 1 到 2 號、4 到 7 號與 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(2\times4\times1)$ 種選法。

(10) 如果我們先選 4 號與 6 號，9 個號碼剩下 1 到 3 號、5 號與 7 到 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(3\times1\times3)$ 種選法。

(11) 如果我們先選 4 號與 7 號，9 個號碼剩下 1 到 3 號、5 到 6 號與 8 到 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(3\times2\times2)$ 種選法。

(12)如果我們先選 4 號與 8 號，9 個號碼剩下 1 到 3 號、5 到 7 號與 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(3\times3\times1)$ 種選法。

(13)如果我們先選 5 號與 7 號，9 個號碼剩下 1 到 4 號、6 號與 8 到 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(4\times1\times2)$ 種選法。

(14)如果我們先選 5 號與 8 號，9 個號碼剩下 1 到 4 號、6 到 7 號與 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(4\times2\times1)$ 種選法。

(15)如果我們先選 6 號與 8 號，9 個號碼剩下 1 到 5 號、7 號與 9 號三組號碼，然後我們再從這三組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了五個號碼，共有 $(5\times1\times1)$ 種選法。

2. 由 1.的討論，可以得知：

$$C_5^9 = \sum_{\substack{y_1+y_2+y_3=7 \\ y_{i\geq1,i=1,2,3}}} (\prod_{i=1}^{3} y_i)$$

$$\begin{aligned}
&= (1\times1\times5+1\times2\times4+1\times3\times3+1\times4\times2+1\times5\times1)+ \\
&\quad (2\times1\times4+2\times2\times3+2\times3\times2+2\times4\times1)+ \\
&\quad (3\times1\times3+3\times2\times2+3\times3\times1)+(4\times1\times2+4\times2\times1)+(5\times1\times1) \\
&= (5+8+9+8+5)+(8+12+12+8)+(9+12+9)+(8+8)+(5) \\
&= (35)+(40)+(30)+(16)+(5)=126
\end{aligned}$$

三、從編號 1 到 $(n+1)$ 號共 $(n+1)$ 個號碼，選 $(2m+1)$ 個不同號碼共有多少種選法？

解：1. 先從 2 到 n 號，選 m 個號碼 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m$，其中 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{m-1}<\alpha_m$ 且使得 $\alpha_{i+1}-\alpha_i\geq2, i=1,2,\cdots,m-1$。$(n+1)$ 個號碼剩下 1 號到 (α_1-1) 號、(α_1+1) 號到 (α_2-1) 號、(α_2+1) 號到 (α_3-1) 號、…、$(\alpha_{m-1}+1)$ 號到 (α_m-1) 號、(α_m+1) 號到 $(n+1)$ 號，共有 $(m+1)$ 組號碼，依序分別有 y_i 個號碼，$y_i\geq1, i=1,2,\cdots,m,m+1$，然後我們再從這 $(m+1)$ 組號碼中各選出一個號碼，如此一來我們共選了 $[m+(m+1)]$ 個號碼，共有 $(\prod_{i=1}^{m+1} y_i)$ 種選法。

2. 先從 2 到 n 號，選 m 個號碼 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m$，其中 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{m-1}<\alpha_m$ 且使得 $\alpha_{i+1}-\alpha_i\geq2, i=1,2,\cdots,m-1$，選法共有 $C_m^{[(n+1)-m]-1}=C_m^{n-m}$ 種與 $y_1+y_2+\cdots+y_m+y_{m+1}=n+1-m$ 的正整數解有 $C_m^{n+1-m-(m+1)+m}=C_m^{n-m}$ 組相同。

3. 由 1.與 2.的討論，可以得知以下的結論：

$$C_{2m+1}^{n+1} = \sum_{\substack{y_1+y_2+\cdots+y_m+y_{m+1}=n+1-m \\ y_{i\geq1,i=1,2,\cdots,m,m+1}}} (\prod_{i=1}^{m+1} y_i) \cdots ①$$

競賽題目》

考慮由 n 個 0, 1 組成且 01 剛好出現 m 次的數字串（如 10110101 是由 8 個 0, 1 組成，且 01 剛好出現 3 次的數字串），令 $f(n,m)$ 為所有這種字串個數。

試證： $f(n,m)=C_{2m+1}^{n+1}$

證明：

1. $m=0$ 時，定義 $f(0,0)=1=C_{2\times 0+1}^{0+1}$

   $f(1,0)=2$ ，[有 0,1 兩種數字串]

   $f(2,0)=3$，[有 00,10,11 三種數字串]

   $f(3,0)=4$，[有 000,100,110,111 四種數字串]

   $\vdots$

   $f(n,0)=n+1$，[有 n 個 0，左邊 1 個 1 右邊 $(n-1)$ 個 0，左邊 2 個 1 右邊 $(n-2)$ 個 0，左邊 3 個 1 右邊 $(n-3)$ 個 0，$\cdots$，左邊 $(n-1)$ 個 1 右邊 1 個 0，n 個 1，$(n+1)$ 種數字串]

   $\Rightarrow f(n,0)=n+1=C_1^{n+1}=C_{2\times 0+1}^{n+1}$

2. $m\ge 1$ 時，設 n 個數字，其中有 m 次 01，第一次 01（n 個 0, 1 數字排成一列，由左到右來數）的左邊有 x_1 個數字，有 $f(x_1,0)=(x_1+1)$ 種數字串

   第一次 01 與第二次 01 的之間有 x_2 個數字，有 $f(x_2,0)=(x_2+1)$ 種數字串

   第二次 01 與第三次 01 的之間有 x_3 個數字，有 $f(x_3,0)=(x_3+1)$ 種數字串

   第三次 01 與第四次 01 的之間有 x_4 個數字，有 $f(x_4,0)=(x_4+1)$ 種數字串

   $\vdots$

   第 $(m-1)$ 次 01 與第 m 次 01 的之間有 x_m 個數字，有 $f(x_m,0)=(x_m+1)$ 種數字串

   第 m 次 01 的右邊有 x_{m+1} 個數字，有 $f(x_{m+1},0)=(x_{m+1}+1)$ 種數字串

   其中 $x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1}=n-2m$ 且 $x_i\ge 0, i=1,2,\cdots,m,m+1$

   令 $y_i=x_i+1, i=1,2,\cdots,m,m+1 \Rightarrow y_i\ge 1, i=1,2,\cdots,m,m+1$

   $$f(n,m)=\sum_{\substack{x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1}=n-2m\\ x_i\ge 0, i=1,2,\cdots,m,m+1}}\left[\prod_{i=1}^{m+1}(x_i+1)\right]=\sum_{\substack{y_1+y_2+\cdots+y_m+y_{m+1}=n-m+1\\ y_i\ge 1, i=1,2,\cdots,m,m+1}}\left(\prod_{i=1}^{m+1}y_i\right)\cdots②$$

   由預備知識三的結論: $C_{2m+1}^{n+1}=\displaystyle\sum_{\substack{y_1+y_2+\cdots+y_m+y_{m+1}=n+1-m\\ y_i\ge 1, i=1,2,\cdots,m,m+1}}\left(\prod_{i=1}^{m+1}y_i\right)\cdots①$

   $f(n,m)=C_{2m+1}^{n+1}$ 得證。

例題》

考慮由 6 個 0, 1 組成且 01 剛好出現 2 次的數字串，令 $f(6,2)$ 為所有這種字串個數，求 $f(6,2)$ 之值為何？

解：$f(6,2)=\displaystyle\sum_{\substack{x_1+x_2+x_3=2\\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3}}[\prod_{i=1}^{3}(x_i+1)]$

$$
\begin{aligned}
&=(0+1)(0+1)(2+1)+(0+1)(1+1)(1+1)+(0+1)(2+1)(0+1)+\\
&\quad(1+1)(0+1)(1+1)+(1+1)(1+1)(0+1)+(2+1)(0+1)(0+1)\\
&=1\times1\times3+1\times2\times2+1\times3\times1+2\times1\times2+2\times2\times1+3\times1\times1\\
&=\sum_{\substack{y_1+y_2+y_3=5\\ y_i\ge 1,\ i=1,2,3}}(\prod_{i=1}^{3}y_i)=C^{2+5}_{2+3}=C^7_5=21
\end{aligned}
$$

推廣》

1. 求級數和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)=$？

解一：
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)&=\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2)=\sum_{k=1}^{n-1}nk-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\\
&=n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2=n[\frac{n\times(n-1)}{2}]-\frac{(n-1)\times n\times(2n-1)}{6}\\
&=\frac{n(n-1)}{6}[3n-(2n-1)]=\frac{(n+1)\times n\times(n-1)}{3\times2\times1}
\end{aligned}
$$

解二：由預備知識一的類推，可得知 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)=C^{n+1}_3=\frac{(n+1)\times n\times(n-1)}{3\times2\times1}$

2. 試證：$C^n_m=1\times C^{n-2}_{m-2}+2\times C^{n-3}_{m-2}+3\times C^{n-4}_{m-2}+\cdots+(n-m)\times C^{m-1}_{m-2}+(n-m+1)\times C^{m-2}_{m-2},m\ge3$ 。

解一：右式 $=1\times C^{n-2}_{m-2}+2\times C^{n-3}_{m-2}+3\times C^{n-4}_{m-2}+\cdots+(n-m)\times C^{m-1}_{m-2}+(n-m+1)\times C^{m-2}_{m-2}$

$$
\begin{aligned}
&=(C^{n-2}_{m-2}+C^{n-3}_{m-2}+C^{n-4}_{m-2}+\cdots+C^{m-1}_{m-2}+C^{m-2}_{m-2})+(C^{n-3}_{m-2}+C^{n-4}_{m-2}+\cdots+C^{m-1}_{m-2}+C^{m-2}_{m-2})+\\
&\quad(C^{n-4}_{m-2}+\cdots+C^{m-1}_{m-2}+C^{m-2}_{m-2})+\cdots+(C^{m}_{m-2}+C^{m-1}_{m-2}+C^{m-2}_{m-2})+(C^{m-1}_{m-2}+C^{m-2}_{m-2})+(C^{m-2}_{m-2})\\
&=(C^{n-2}_{m-2}+C^{n-3}_{m-2}+C^{n-4}_{m-2}+\cdots+C^{m-1}_{m-2}+C^{m-1}_{m-1})+(C^{n-3}_{m-2}+C^{n-4}_{m-2}+\cdots+C^{m-1}_{m-2}+C^{m-1}_{m-1})+\\
&\quad(C^{n-4}_{m-2}+\cdots+C^{m-1}_{m-2}+C^{m-1}_{m-1})+\cdots+(C^{m}_{m-2}+C^{m-1}_{m-2}+C^{m-1}_{m-1})+(C^{m-1}_{m-2}+C^{m-1}_{m-1})+(C^{m-2}_{m-2})\\
&=(C^{n-2}_{m-2}+C^{n-3}_{m-2}+C^{n-4}_{m-2}+\cdots+C^{m}_{m-1})+(C^{n-3}_{m-2}+C^{n-4}_{m-2}+\cdots+C^{m}_{m-1})+\\
&\quad(C^{n-4}_{m-2}+\cdots+C^{m}_{m-1})+\cdots+(C^{m}_{m-2}+C^{m}_{m-1})+(C^{m}_{m-1})+(C^{m-2}_{m-2})\\
&=(C^{n-1}_{m-1})+(C^{n-2}_{m-1})+(C^{n-3}_{m-1})+\cdots+(C^{m+1}_{m-1})+(C^{m}_{m-1})+(C^{m}_{m})\\
&=(C^{n-1}_{m-1})+(C^{n-2}_{m-1})+(C^{n-3}_{m-1})+\cdots+(C^{m+1}_{m-1})+(C^{m+1}_{m})\\
&=(C^{n-1}_{m-1})+(C^{n-2}_{m-1})+(C^{n-3}_{m-1})+\cdots+(C^{m+2}_{m})\\
&=(C^{n-1}_{m-1})+(C^{n-2}_{m-1})+(C^{n-2}_{m})\\
&=(C^{n-1}_{m-1})+(C^{n-1}_{m})\\
&=C^n_m=\text{左式}
\end{aligned}
$$

解二：從編號 1 到 n 號共 n 個號碼，選 m 個不同號碼共有多少種選法？

1. 先從 2 到 $(n-m+2)$ 號，選出一個號碼，選法共有 $(n-m+1)$ 種，因此分成下列 $(n-m+1)$ 種情形來討論：

(1) 如果我們先選 2 號，n 個號碼剩下 1 號與 3 到 n 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出 $1,(m-2)$ 個號碼，如此一來我們共選了 m 個號碼，共有 $(1\times C_{m-2}^{n-2})$ 種選法。

(2) 如果我們先選 3 號，n 個號碼剩下 1 到 2 號與 4 到 n 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出 $1,(m-2)$ 個號碼，如此一來我們共選了 m 個號碼，共有 $(2\times C_{m-2}^{n-3})$ 種選法。

(3) 如果我們先選 4 號，n 個號碼剩下 1 到 3 號與 5 到 n 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出 $1,(m-2)$ 個號碼，如此一來我們共選了 m 個號碼，共有 $(3\times C_{m-2}^{n-4})$ 種選法。

$\vdots$

$(n-m)$ 如果我們先選 $(n-m+1)$ 號，n 個號碼剩下 1 到 $(n-m)$ 號與 $(n-m+2)$ 到 n 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出 $1,(m-2)$ 個號碼，如此一來我們共選了 m 個號碼，共有 $(n-m)\times C_{m-2}^{m-1}$ 種選法。

$(n-m+1)$ 如果我們先選 $(n-m+2)$ 號，n 個號碼剩下 1 到 $(n-m+1)$ 號與 $(n-m+3)$ 到 n 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出 $1,(m-2)$ 個號碼，如此一來我們共選了 m 個號碼，共有 $(n-m+1)\times C_{m-2}^{m-2}$ 種選法。

2. 由 1.的討論，可以得知：

$$C_m^n = 1\times C_{m-2}^{n-2} + 2\times C_{m-2}^{n-3} + 3\times C_{m-2}^{n-4} + \cdots + (n-m)\times C_{m-2}^{m-1} + (n-m+1)\times C_{m-2}^{m-2}$$

3. 已知 α,β 皆為正整數且滿足 $2\le\alpha<\beta\le 6$ 且 $\beta-\alpha\ge 2$

求 $\displaystyle\sum_{\substack{2\le\alpha<\beta\le 6\\ \beta-\alpha\ge 2}}(\alpha-1)\times(\beta-\alpha-1)\times(7-\beta)$ 之值為何？

解：令 $y_1=\alpha-1\ge 1$，$y_2=\beta-\alpha-1\ge 1$，$y_3=7-\beta\ge 1$

$$\sum_{\substack{y_1+y_2+y_3=5\\ y_i\ge 1,\ i=1,2,3}} y_1\times y_2\times y_3 = C_{2+3}^{2+5} = C_5^7 = 21$$

4. 從編號 1 到 $(n+1)$ 號共 $(n+1)$ 個號碼，選 $(2m+1)$ 個不同號碼共有多少種選法？

解：1. 先從 $(m+1)$ 到 $(n-m+1)$ 號，選一個號碼，選法共有 $(n-2m+1)$ 種，因此分成下列 $(n-2m+1)$ 種情形來討論：

(1) 如果我們先選 $(m+1)$ 號，$(n+1)$ 個號碼剩下 1 到 m 號與 $(m+2)$ 到 $(n+1)$ 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出 m 個號碼，如此一來我們共選了 $(2m+1)$ 個號碼，共有 $(C_m^m \times C_m^{n-m})$ 種選法。

(2) 如果我們先選 $(m+2)$ 號，$(n+1)$ 個號碼剩下 1 到 $(m+1)$ 號與 $(m+3)$ 到 $(n+1)$ 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出 m 個號碼，如此一來我們共選了 $(2m+1)$ 個號碼，共有 $(C_m^{m+1} \times C_m^{n-m-1})$ 種選法。

(3) 如果我們先選 $(m+3)$ 號，$(n+1)$ 個號碼剩下 1 到 $(m+2)$ 號與 $(m+4)$ 到 $(n+1)$ 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出 m 個號碼，如此一來我們共選了 $(2m+1)$ 個號碼，共有 $(C_m^{m+2} \times C_m^{n-m-2})$ 種選法。

$\vdots$

$(n-2m)$ 如果我們先選 $(n-m)$ 號，$(n+1)$ 個號碼剩下 1 到 $(n-m-1)$ 號與 $(n-m+1)$ 到 $(n+1)$ 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出 m 個號碼，如此一來我們共選了 $(2m+1)$ 個號碼，共有 $(C_m^{n-m-1} \times C_m^{m+1})$ 種選法。

$(n-2m+1)$ 如果我們先選 $(n-m+1)$ 號，$(n+1)$ 個號碼剩下 1 到 $(n-m)$ 號與 $(n-m+2)$ 到 $(n+1)$ 號兩組號碼，然後我們再從這兩組號碼中各選出 m 個號碼，如此一來我們共選了 $(2m+1)$ 個號碼，共有 $(C_m^{n-m} \times C_m^m)$ 種選法。

2. 由 1.的討論，可以得知：

$$C_{2m+1}^{n+1} = C_m^m \times C_m^{n-m} + C_m^{m+1} \times C_m^{n-m-1} + \cdots + C_m^{n-m-1} \times C_m^{m+1} + C_m^{n-m} \times C_m^m$$

$$= \sum_{k=m}^{n-m} C_m^k \times C_m^{n-k}$$

104學年度臺北市
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科試題

筆試一：計算證明題（考試時間：2 小時，滿分：49 分）

1. 設 $ABCD$ 為平行四邊形，其中 $\angle A < \angle B$。
   試證：若 P 為 $\overline{AD}$ 上的任一點，則
   $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD} \le \overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$。（12 分）

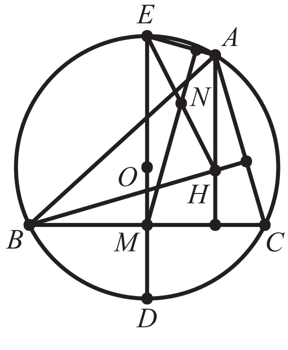
2. 設 $\triangle ABC$ 為邊長 1 的正三角形，$\overline{BC}$ 上有 n 等分點，沿點 B 到點 C 的方向，依次為 P_1、P_2、$\cdots$、P_{n-1}，其中 $n \ge 2$；並令向量內積的和 S_n 為

   $S_n = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}+\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{AP_3}+\cdots+\overrightarrow{AP_{n-1}}\cdot\overrightarrow{AC}$。

   試求 S_n 的值（以 n 表示）。（12 分）

3. 試找出所有可能的正整數 p 及數列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$ 同時滿足以下條件：
   (1) $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m \in \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$。
   (2) $\sum_{k=0}^{m} a_k p^k = (1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)$。（12 分）

4. 設 $\triangle ABC$ 是銳角三角形且 $\overline{AB} \ne \overline{AC}$，其外心為 O、垂心為 H。設點 D 是 $\angle BAC$ 的分角線與外接圓的另一交點，$\overline{DE}$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圓直徑，M 是 $\overline{BC}$ 的中點，N 是 $\overline{EH}$ 的中點。試證：直線 MN 與直線 AE 垂直。（13 分）



筆試二：填充題（考試時間：1 小時，滿分：21 分）

1. 對任意正數 x ，定義函數 $f(x)$ 為四數 $\log x, x^2-2x+1, 2x, -x+1$ 中的最大值，則函數 $f(x)$ 的最小值為__________。

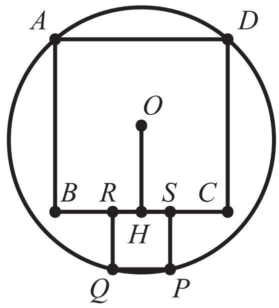
2. 若 $a_n=\dfrac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，則 $a_1+a_2+\cdots+a_{60}=$__________。

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC}=17$ 、 $\overline{CA}=8$ 、 $\overline{AB}=15$ ， M 是 $\overline{BC}$ 的中點。過點 A 作一直線與 $\overline{AM}$ 垂直，設此垂直線與直線 BC 交於點 D ，則 $\overline{BD}:\overline{CD}=$__________。

4. 坐標平面上，若 $P(a,b)$ 為曲線 $x^2+12xy+6y^2=1$ 上的動點，則 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的最小值為__________。

5. 若 $\langle F_n\rangle$ 為費氏數列： $F_1=F_2=1$ ， $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，則無窮級數 $\dfrac{F_1}{5}+\dfrac{F_2}{5^2}+\dfrac{F_3}{5^3}+\cdots+\dfrac{F_n}{5^n}+\cdots$ 之和為__________。

6. 如圖，圓 O 內有兩個正方形 $ABCD$ 及 $PQRS$ ，其中 A, D, P, Q 在圓上。若 $\overline{OH}\perp\overline{BC}$ 且 $\overline{OH}=104$ ，則兩正方形的邊長之差為__________。

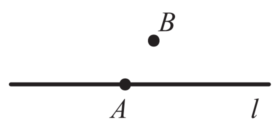


7. 若 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 $5, 6$ 及 7 ，且 P 為三邊上或其內部的任一點，則點 P 到三頂點距離平方和 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 的最小值為__________。

口試（考試時間：思考及作答時間 15 分鐘，答辯時間 15 分鐘）

1. 形如 $\dfrac{q}{p}$（其中 $8 \le p \le 99$）的最簡分數中，哪一個最簡分數最接近 $\dfrac{3}{7}$？

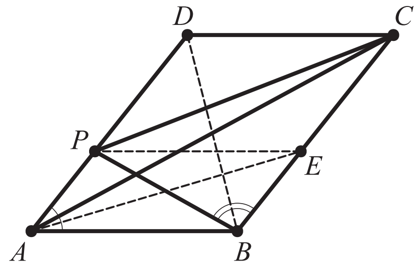
2. 給定一直線 l 及其上一點 A。當點 B 不在直線 l 上且直線 AB 與直線 l 不垂直時，直線 l 上恰有一點 F 使得：以 A 為頂點、F 為焦點的拋物線通過點 B。
試說明由點 A、點 B 與直線 l 如何作出焦點 F。



答案與解析

筆試一：計算證明題

1. 示意圖如下圖實線所示：



(1) 當 $P=A$ 時， $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{AA}+\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$ 。

當 $P=D$ 時，

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{DC}+\overline{DD}=\overline{AD}+\overline{DB}+\overline{AB}$$
$$<\overline{AD}+\overline{AC}+\overline{AB}.$$

（$\because \angle B>\angle A, \angle B+\angle A=180^\circ$， $\therefore \angle B>90^\circ, \angle A<90^\circ$，

而知 $\overline{AC}^2>\overline{AB}^2+\overline{BC}^2, \overline{BD}^2<\overline{AB}^2+\overline{AD}^2 \Rightarrow \overline{AC}>\overline{BD}$）

(2) 當 P 為 $\overline{AD}$ 邊非端點 A, D 時，過 P 作 $\overline{PE}\,//\,\overline{AB}$ 且交 $\overline{BC}$ 於 E，則 $ABEP$ 為平行四邊形，故 $\overline{PE}=\overline{AB}$ 。

欲證

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{AD}+\overline{AC}+\overline{AB}$$
$$\Leftrightarrow \left(\overline{PA}+\overline{PD}\right)+\overline{PB}+\overline{PC}<\overline{AD}+\overline{AC}+\overline{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overline{PB}+\overline{PC}<\overline{AC}+\overline{AB}.$$

連 $\overline{AE}$ ，在平行四邊形 $ABEP$ 中，二內角 $\angle A<\angle B$ ，故亦知 $\overline{PB}<\overline{AE}$ 。

(3) 在四邊形 $AECP$ 中 $\overline{AC}$ 與 $\overline{PE}$ 為相交的對角線，故得

$$\overline{AC}+\overline{PE}>\overline{PC}+\overline{AE}>\overline{PC}+\overline{PB}\text{ 。}$$

即得 $\overline{PB}+\overline{PC}<\overline{AC}+\overline{AB}$ 。

2. 為了方便計算，令 $P_0=B, P_n=C$ ，根據向量分點公式，得

$$\overrightarrow{AP_k}=\frac{(n-k)\overrightarrow{AP_0}+k\,\overrightarrow{AP_n}}{n}\text{ 。}$$

因為正 $\triangle ABC$ 的邊長為1，所以

$$\overrightarrow{AP_0}\cdot\overrightarrow{AP_0}=\overrightarrow{AP_n}\cdot\overrightarrow{AP_n}=1,\ \overrightarrow{AP_0}\cdot\overrightarrow{AP_n}=1\times1\times\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\text{ 。}$$

此時，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{AP_{k-1}}\cdot\overrightarrow{AP_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k+1)\,\overrightarrow{AP_0}+(k-1)\,\overrightarrow{AP_n}}{n}\cdot\frac{(n-k)\,\overrightarrow{AP_0}+k\,\overrightarrow{AP_n}}{n}\ ;$$

即

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k+1)(n-k)+\frac{1}{2}(n-k+1)k+\frac{1}{2}(k-1)(n-k)+(k-1)k}{n^2}\ 。$$

整理可得

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-(n+1)k+(n^2+\frac{n}{2})}{n^2}\ 。$$

代入平方和公式，得

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{n(n+1)^2}{2n^2}+\frac{2n+1}{2}\ ;$$

即

$$S_n=\frac{5n^2-2}{6n}\ 。$$

3. 當 $p=1$ 時，$a_0=a_1=\cdots=a_m=0$，都不會滿足(2)式。以下考慮 $p\ge 2$ 的情況。注意：當數列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_m$ 滿足題設條件時，數列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_m,0,0,\cdots,0$ 也會滿足題設條件，故僅須考慮 $a_m\ne 0$ 的情況。
   (i) 當 $m=0$ 時，$a_0=1+a_0$，不可能。
   (ii) 當 $m=1$ 時，$a_0+a_1p=(1+a_0)(1+a_1)$，得知：$a_1(p-1-a_0)=1$。故 $a_1=p-1-a_0=1$，即 $a_0=p-2,a_1=1$。
   (iii) 以下證明：當 $m\ge 2$ 時，數列都不存在。假設

$$\sum_{k=0}^{m}a_kp^k=(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)\ 。$$

利用 $(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)$

$$\begin{aligned}
&=(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-1})+a_m(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-1})\\
&=(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-2})+a_{m-1}(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-2})\\
&\quad+a_m(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-1})\ =\cdots\\
&=(1+a_0)+a_1(1+a_0)+a_2(1+a_0)(1+a_1)+\cdots+a_m(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-1})\\
&=(1+a_0)+\sum_{k=1}^{m}a_k\prod_{i=0}^{k-1}(1+a_i)\ 。
\end{aligned}$$

可得：$\sum_{k=0}^{m}a_kp^k=(1+a_0)+\sum_{k=1}^{m}a_k\prod_{i=0}^{k-1}(1+a_i)$。

移項整理得：$\sum_{k=1}^{m}a_k\left(p^k-\prod_{i=0}^{k-1}(1+a_i)\right)=1$。

(1) 若 $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}=p-1$，則 $\sum_{k=1}^{m}a_k\left(p^k-\prod_{i=0}^{k-1}(1+a_i)\right)=0$，不合。

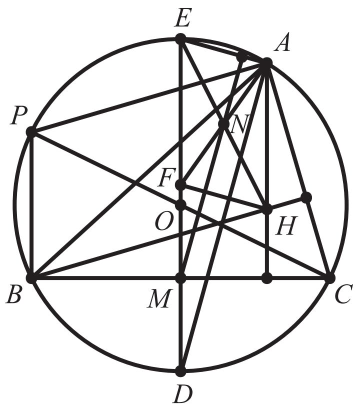
(2) 若 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{m-1}$ 中有一項不等於 $p-1$，則

$$\sum_{k=1}^{m}a_k\left(p^k-\prod_{i=0}^{k-1}(1+a_i)\right)\geq a_m\left(p^m-\prod_{i=0}^{m-1}(1+a_i)\right)>a_m\geq 1\text{，不合。}$$

綜合以上討論，所求為 $p\geq 2$，

而數列為：$\langle p-2,1\rangle,\langle p-2,1,0\rangle,\cdots,\langle p-2,1,0,0,\cdots,0\rangle$。

4. 設直線 CO 與外接圓的另一交點為 P。



因為 $\overline{CP}$ 是$\triangle ABC$ 外接圓的一直徑，所以，$\overline{PB}\perp\overline{BC}$ 、$\overline{PA}\perp\overline{CA}$。因為直線 PB、直線 AH 都與直線 BC 垂直，所以，$\overline{PB}$ 與 $\overline{AH}$ 平行。同理，因為直線 PA、直線 BH 都與直線 AC 垂直，所以，$\overline{PA}$ 與 $\overline{BH}$ 平行。於是，$\square PAHB$ 為平行四邊形，$\overline{AH}=\overline{PB}$。其次，在$\triangle BCP$ 中，因為點 O 與點 M 分別是 $\overline{PC}$ 與 $\overline{BC}$ 的中點，所以，$\overline{PB}=2\overline{OM}$。於是，可得

$$\overline{AH}=\overline{PB}=2\overline{OM}\text{。}$$

在直線 DE 上作點 F 使得點 M 成為 $\overline{DF}$ 的中點。因為 $\angle A$ 是銳角，所以，邊 $\overline{BC}$ 的中點 M 必在半徑 $\overline{OD}$ 上。於是，可得

$$\overline{DE}=2\overline{DO}=2(\overline{DM}+\overline{OM})=\overline{DM}+\overline{FM}+2\overline{OM}=\overline{DF}+2\overline{OM}\text{，}$$

所以，可得 $\overline{EF}=\overline{DE}-\overline{DF}=2\overline{OM}=\overline{AH}$。因為直線 AH 與直線 EF 都與直線 BC 垂直，所以，$\overline{EF}$ 與 $\overline{AH}$ 平行。由此可知：$\square AEFH$ 為平行四邊形，其對角線 $\overline{AF}$ 與 $\overline{EH}$ 互相平分於 $\overline{EH}$ 的中點 N。

在$\triangle ADF$ 中，因為點 M 與點 N 分別是 $\overline{DF}$ 與 $\overline{AF}$ 的中點，所以，直線 MN 與直線 AD 平行。因為 $\overline{DE}$ 是$\triangle ABC$ 外接圓的一直徑，所以，直線 AD 與直線 AE 垂直。於是，直線 MN 與直線 AE 垂直。

筆試二：填充題

1.	2.	3.	4.
$\frac{2}{3}$	665	$\frac{225}{64}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$
5.	6.	7.	
$\frac{5}{19}$	$\frac{832}{5}$ 或 $-\frac{832}{5}$ 皆可	$\frac{110}{3}$	

口試

1. 因為 $\left|\frac{3}{7}-\frac{q}{p}\right|=\frac{|3p-7q|}{7p}$ ，

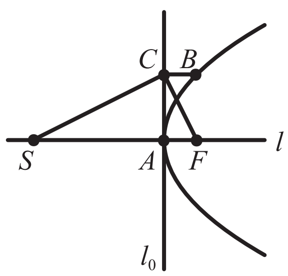
   所以依題意，欲找的 p 值要愈大且小或等於 99 使得 $3p-7q=\pm 1$ 。

   又因為 $p<100 \Rightarrow 3p<300$ ，且 $3p$ 與 7 的倍數要相差 1，

   因此，從小於 300 且接近 7 的倍數著手。

   我們發現 $287=7\times 41$ 與 $288=3\times 96$ 相差 1，故 $\frac{41}{96}$ 與 $\frac{3}{7}$ 相差 $\frac{1}{7\times 96}$ 是滿足題意中最接近 $\frac{3}{7}$ 的最簡分數。

2. 設過點 A 而與直線 l 垂直的直線為 l_0 、且點 B 至直線 l_0 的垂足為點 C。在直線 l 上作出點 S 使得：點 S 與點 B 在直線 l_0 的異側，且 $\overline{AS}=4\overline{BC}$ 。過點 C 作直線 CS 的垂直線，設此垂直線與直線 l 交於點 F，則以點 A 為頂點、點 F 為焦點的拋物線必通過點 B。其理由如下：



因為△CSF 是直角三角形且 $\angle SCF$ 是直角，所以，依相似三角形的性質，可知 $\overline{AC}^2=\overline{AS}\times\overline{AF}=4\overline{BC}\times\overline{AF}$ 。因為

$$\overline{BF}=\sqrt{\overline{AC}^2+\left|\overline{AF}-\overline{BC}\right|^2}=\sqrt{4\overline{BC}\times\overline{AF}+(\overline{AF}-\overline{BC})^2}=\overline{AF}+\overline{BC}$$ 。

另一方面，設以點 A 為頂點、點 F 為焦點所作拋物線的準線為直線 l_1 ，則點 A 至準線 l_1 的距離為 $\overline{AF}$ 。因此，點 B 至準線 l_1 的距離等於 $\overline{AF}+\overline{BC}$ 。

專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 113

☆☆☆

(1) 已知 $f(x)=x^2+a_0=(x-1)(x-a_0)$，求 a_0 的值。

(2) 已知 $f(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_0=(x-1)(x-a_3)(x-a_2)(x-a_0)$，求多項式 $f(x)$。

〔玩鎖・玩索〕

這是一道有趣的數學問題，多項式的根與多項式的係數幾乎一樣。如果 $f(x)$ 是三次多項式，那麼等同於求滿足

$$f(x)=x^3+a_2x^2+a_0=(x-1)(x-a_2)(x-a_0)$$

的係數 a_2 與 a_0。有興趣的讀者可以試試！又當 $f(x)$ 的次數超過四次時，是否有滿足這樣性質的多項式呢？

遊戲 114

☆☆☆

在電視上看過心算比賽嗎？裁判將出題者出好的題目書寫在事先準備好的白紙上，比賽開始時，瞬間亮出題目，並要求選手在幾秒內算出正確答案。題目經常是很複雜的四則運算，有時還會有開根號之類的，常常觀眾題目還沒看完，選手已經算完了。

大陸的心算神童申克功算過一道很複雜的題目，當裁判亮出題目，觀眾只理解到題目是求

$$\sqrt[13]{13\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}$$

這個開根號的數時（圓圈代表觀眾來不及記憶的數字），說時遲，那時快，申克功已經算出答案，並經裁判確認正確了。

申克功只花了十三秒就算出這個複雜的根式是一個正整數，你知道答案是多少嗎？（參考數據 $\log 2\approx 0.3010$, $\log 3\approx 0.4771$, $\log 7\approx 0.8451$, $\log 13\approx 1.1139$）

〔玩鎖・玩索〕

計算機（電腦）是現代人的計算利器，嚴格來講，應該是估算工具，因為大多數複雜的數學式子，計算器僅能提供近似值而已。在計算機（電腦）還沒發明之前，對數表就是扮演這個角色。雖然對數表已是昔日的計算利器，但是自然界裡仍然處處深受指數與對數函數的影響。這裡只是要你利用對數表來估算申克功心算的整數是多少而已。

滿足 $a_{n+1}=2-a_n^2(n\ge 1)$ 的遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 會因第一項 a_1 的值不同而不同。例如，當 $a_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 時，計算前幾項，得

遊戲 115

☆☆☆☆☆

$$a_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;$$

$$a_2=-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ;$$

$$a_3=-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;$$

$$a_4=-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ;$$

$$\vdots$$

很明顯的，數列 $\langle a_n \rangle$ 每兩項一循環，即奇數項為 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，偶數項為 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$。這樣的數列稱為週期 2 的數列。

如果首項 $a_1=2\cos 20^\circ$，那麼數列 $\langle a_n \rangle$ 如何描述呢？

〔玩鎖・玩索〕

現今世界上稍微了解一點混沌數學的人，無人不知李天岩與約克於 1975 年在《美國數學月刊》上發表了一篇極其重要的論文「週期三則亂七八糟」。該文首創了「混沌」（chaos）的概念，開拓了整個科學界對混沌動力系統研究的新紀元。

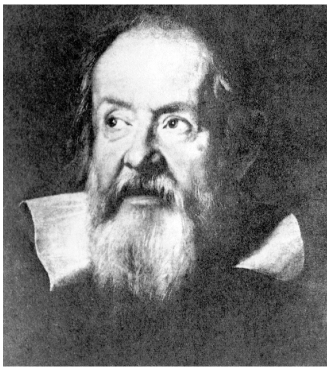
李天岩畢業於清華大學，所以對中國高等教育中普遍存在的填鴨式教學深有體會，並深惡痛絕。他曾講過這樣的故事：一位數學研究生當博士資格考試的口試時，教授要考她證明特殊的吉洪諾夫（A. Tychonoff）定理：兩個緊緻集的乘積也是緊緻的，她央求教授讓她證明一般的吉洪諾夫定理：任意個數緊緻集之乘積也是緊緻的，因為她記得證明的每一個細節而不知道怎樣證明更簡單的兩個緊緻集的情形。李天岩堅決反對學生死記硬背，不求真懂。李天岩堅信，若是真正了解一門學科，就會講得連普通人也能聽得懂。

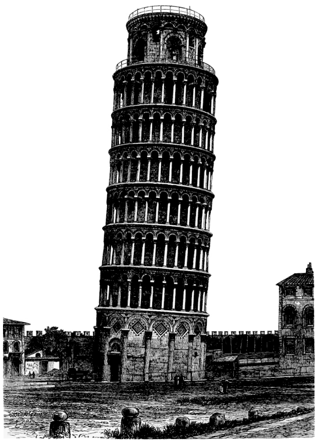
週期三則亂七八糟是自然界經常發現的現象，它是說在自然界裡，當你發現週期 3 的現象時，任何週期的現象都會發生。它表現在數列的現象就是，如果能找到一個初始值 a_1 使得數列 $\langle a_n \rangle$ 每三項一循環，即週期為 3，那麼對任意正整數 n，一定可以找到初始值 a_1 使得數列 $\langle a_n \rangle$ 每 n 項一循環，即週期為 n。當初始值 $a_1=2\cos 20^\circ$ 時，可以求 a_2, a_3, a_4 的值，並嘗試套用三角學的三倍角公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ 來找該數列的循環性質。

遊戲 116

☆☆

數學兼哲學家伽利略，於公元 1632 年出版《對話》一書觸怒教廷，在他 70 歲時，接受宗教法庭審判且於該年被判終身監禁。出版《對話》一書到在獄中過世是伽利略人生中最灰暗的 10 年。





年輕的伽利略發明十倍率的望遠鏡，並在隔年發現木星的第一顆衛星（後人稱為歐羅巴衛星）。發現衛星到接受審判剛好是他被監禁時間的三倍。事實上，發明望遠鏡到出版《對話》算是伽利略的黃金歲月，這段時間正好是他發現衛星時年齡的一半。試問：伽利略在哪一年發現歐羅巴衛星？

〔玩鎖・玩索〕

伽利略是虔誠的天主教徒，他的《對話》是以委婉的方式支持哥白尼地球繞著太陽運轉的學說。自從《對話》出版以後，伽利略就走上了危險的道路，道路的一邊是虔誠教徒心目中的天堂，一邊則是他的望遠鏡中所透露的天空。地球是宇宙中心的信仰與地球繞著太陽運行的真理是他所面臨的抉擇。伽利略當時一共發現四顆木星的衛星，並將這發現寫成《星際使者》這本書送給佛羅倫斯的柯西莫公爵。伽利略是第一位觀測月球上群山陰影的天文學家，他發現了月球表面的凹凸不平，並親手繪製了第一幅月亮表面圖，如下圖所示：

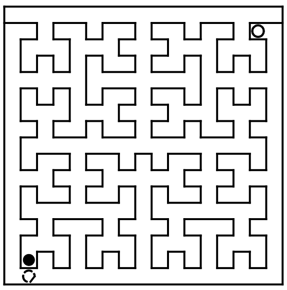
梵諦岡在伽利略死後三百五十年才替他平反，1992 年教宗若望保祿二世公開讚揚伽利略的學問：「在最後的分析中，科學與科技的發現，證明了伽利略出眾的才智，將我們帶向蘊涵在萬物之中的卓越思想。」有關伽利略的生活與科學成就，推薦時報出版，戴瓦・梭貝爾所著的書《伽利略的女兒》。

代數學鼻祖丟番圖的年齡問題「他的生活中，童年占去六分之一，又過了十二分之一長出鬍鬚，再過了七分之一他結了婚，五年之後生下兒子，但是兒子的壽命只有他的一半，在兒子死後四年，他也過世了。求丟番圖的年齡。」是中學生耳熟能詳的算術問題。伽利略的這道問題與丟番圖問題類似，都是在談直線上的問題，把年齡想成直線上移動的點。差別在丟番圖問題只須設一個未知數就可以解決，伽利略問題設兩個未知數比較方便。

動手玩數學~破解祕笈 第28期

遊戲 109

如下圖所示，從 A 點出發，沿著希爾伯特曲線前進，最後會走到 B 點，而且希爾伯特曲線在任何地方都不相交，即可以將希爾伯特曲線想成連接 A，B 兩點的一條繩索。因此，正方形迷宮被希爾伯特繩索分割成兩個區域，在同一區域的點才能到達，不同區域的兩個點沒辦法相通。白色球走到虛白色球位置，此時虛白色球與灰色球相隔一繩索，即白色球與灰色球剛好分布在不同的區域。故白色球與灰色球無法相遇。

A  B

遊戲 110

令

$$\begin{cases} 1766 + x = p^2, \\ 1598 + x = q^2. \end{cases}$$

因為

$$p = \sqrt{1766 + x} \geq \sqrt{1766} \approx 42.02,$$
$$q = \sqrt{1598 + x} \geq \sqrt{1598} \approx 39.97,$$

所以 $p + q \geq 42.02 + 39.97 = 81.99$。又由

$$168 = (1766 + x) - (1598 + x) = p^2 - q^2$$
$$= (p+q)(p-q) \geq 81(p-q)$$

得

$$p - q \leq \frac{168}{81} \approx 2.07.$$

故 $p = q + 1$ 或 $p = q + 2$，再逐一討論：

(1) 當 $p = q + 1$ 時，$1766 + x = (q+1)^2$，$1598 + x = q^2$，將兩式相減，得

$$168 = 2q + 1 \Rightarrow q = 83.5 \text{（不合）}.$$

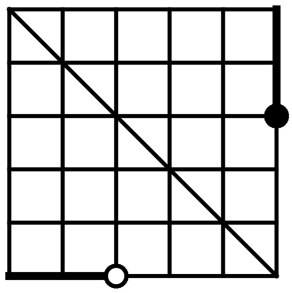
(2) 當 $p = q + 2$ 時，$1766 + x = (q+2)^2$，$1598 + x = q^2$，將兩式相減，得

$$168 = 4q + 4 \Rightarrow q = 41，\ p = 43.$$

由 $1766 + x = 43^2 = 1849$，得 $x = 83$。

遊戲 111

(1) 如下圖所示，當甲移動白子之後，乙以圖中的對角線作對稱軸，將黑子移到與白子對稱的位置。這時白子與黑子仍然位於某正方形的兩個對頂角上。依這樣的規律，先玩的甲會落敗。也就是說，後玩的乙只需採取對稱反對角線的策略，就會得勝。



乙

甲

(2) 甲將白子向右移 2 格且乙將黑子向左移 1 格，此時白子與黑子位於 5×5 正方形的斜對角點上，而且變成乙先玩。由(1)知道後玩者採取對稱的策略可贏，故甲可以贏得比賽。

遊戲 112

(1) 當 $2n+1$ 人玩此遊戲時，被殺的人依序為

$$2, 4, 6, \cdots, 2n$$

共 n 人。故留下來的人數有

$$(2n+1) - n = n + 1$$

人，即為碎形數列的第 $2n+1$ 項 F_{2n+1} 的值。

(2) 碎形數列接下來五項分別為

$$30, 8, 31, 16, 32.$$