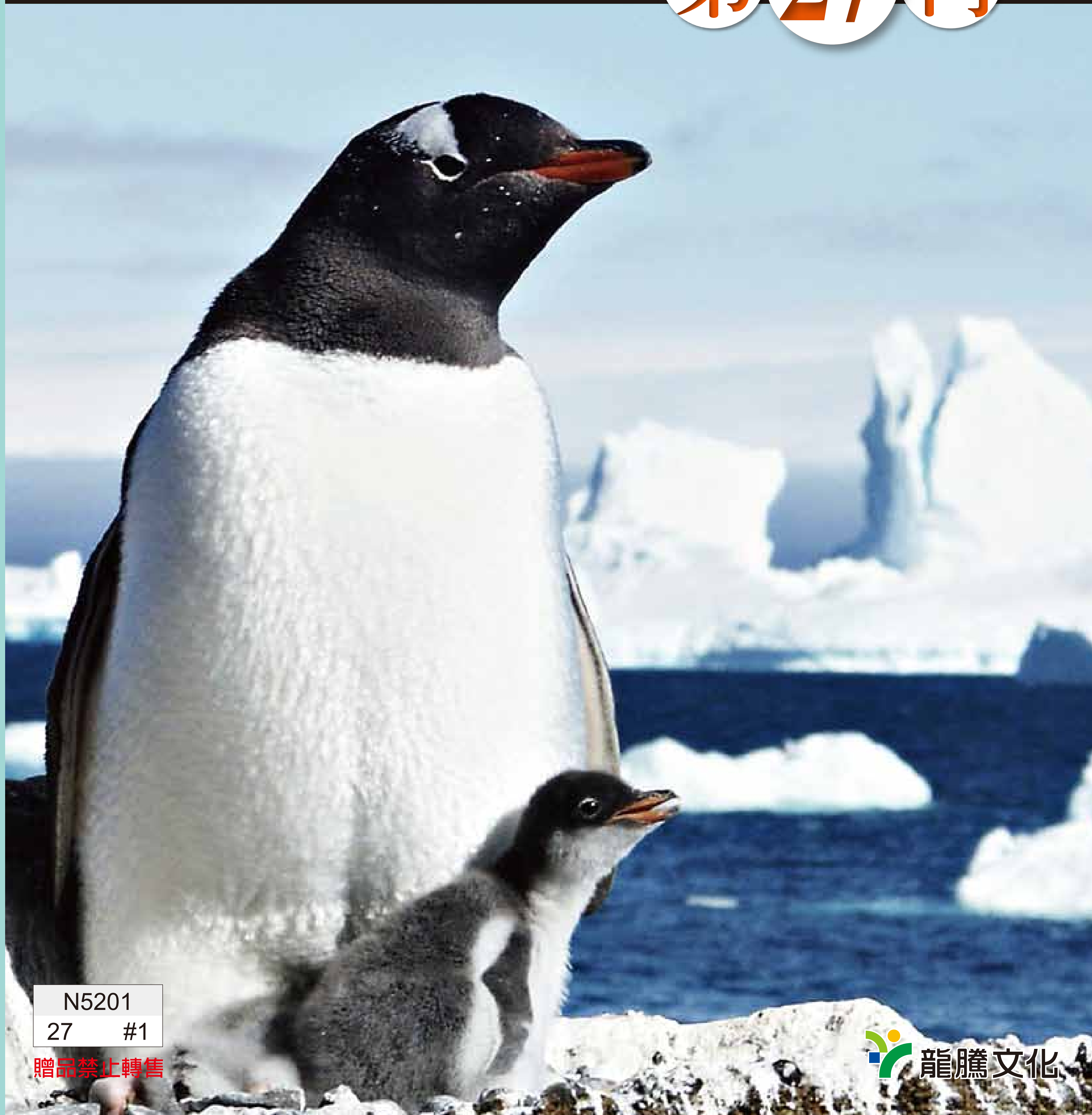
龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第27刊



N5201
27　#1

贈品禁止轉售

龍騰文化

龍騰數亦優

因為知識的傳播與分享才造就出人類的偉大
龍騰邀請您　分享寶貴的知識與經驗
共同為數學教育開展出優質的交流園地

投稿議題

1.高中職教育政策，國內外教育新知
2.教材探討、教案分享、資訊融入教學分享
3.教學生活趣聞、教學甘苦談

投稿注意事項

1.請註明主題、投稿科目、作者簡歷、聯絡電話與地址
2.本刊有權刪改稿件，若不接受刪修，請務必註明
3.每篇文章以1000～2000字為限

來稿請寄

248 新北市五股區五權七路1號　數學編輯小組
電話：(02)2299-9063 分機 372
傳真：(02)2298-9755
e-mail :joanne_lee@ lungteng.com.tw

編輯室墨記

現在最夯的 PISA 試題來囉！從教授精心挑選的 PISA 試題中，我們可以從中發現，生活周遭裡充滿著數學的影子，裡面的試題除了可以讓我們動動腦，活化腦細胞外，更可以提供給老師們給予學生不同的學習情境，讓學生面對未來生活可能遭遇的問題可以活用思考，快先搶先翻閱吧！

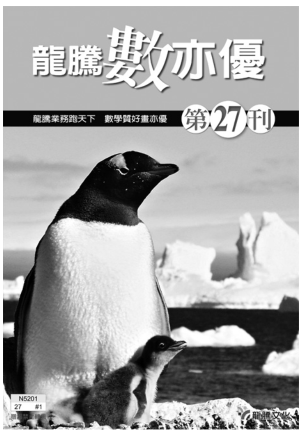
〈無窮調和級數〉、〈二次曲線的中點弦與弦中點軌跡〉究竟藏有什麼有趣的事情呢？快快翻開本期文章一探究竟吧！有趣的機率問題，好玩卻常常讓人有摸不著頭緒的時候，跟著〈獨立事件，獨立在哪？〉這篇文章，一同進到好玩的機率問題裡吧！

話說「真相只有一個，真理越辯越明。」數學家之間互相提出問題，互相解決問題，從每一次的來回辯駁中，各自又可得到更多的數學觀念，也讓數學的世界更有趣，我們快來看看〈追隨代數大師尤拉在解方程式上的天才之旅〉、〈從組合意義來看一道競賽試題〉，從中您是否也可以發現什麼呢？

熱騰騰的〈國立臺灣師範大學數學系 104 學年度大學甄選入學指定項目甄試試題〉出爐囉！快來看看這次甄試考了些什麼題目，也讓自己小試身手吧！

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的內容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 joanne_lee@lungteng.com.tw。



發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
執行編輯：李彥宜
美術編輯：林佳瑩

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248新北市五股區五權七路1號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2298-9755
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2015/05/18
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2015.05 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

PISA 2012試題（上）

許志農／臺灣師大數學系

企鵝

動物攝影師尚．巴提歷經一年之久的考察，拍攝了許多企鵝和企鵝寶寶的照片。他對不同企鵝族群的數量增長特別感興趣。

問題 1：

正常情況下，一對企鵝夫婦每年產兩顆蛋。通常只有從較大的蛋中孵出的企鵝寶寶能夠存活。對於跳岩企鵝來說，第一顆蛋的重量約為 78g，第二顆蛋的重量約為 110g。第二顆蛋約比第一顆蛋重百分之多少？

(A) 29％　(B) 32％　(C) 41％　(D) 71％

問題 2：

尚．巴提對一個企鵝族群的數量在未來幾年內的變化感到好奇。為了尋找答案，他作出如下假設：

・在年初，這個族群由 10000 隻（5000 對夫婦）企鵝構成。

・每年春天，每對企鵝養育一隻企鵝寶寶。

・到年底，所有的企鵝（包括成年企鵝與企鵝寶寶）中有 20％會死去。

那麼到第一年的年底，這個族群中還有多少隻企鵝（包括成年企鵝與企鵝寶寶）？

問題 3：

尚．巴提假設這個族群將繼續以下述方式增長：

・在年初，這個族群有同樣數量的雌、雄企鵝，這些企鵝組成一對對的夫婦。

・每年春天，每對企鵝夫婦養育一隻企鵝寶寶。

・到年底，所有的企鵝（包括成年企鵝與企鵝寶寶）中有 20％會死去。

・滿一歲的企鵝可以養育企鵝寶寶。

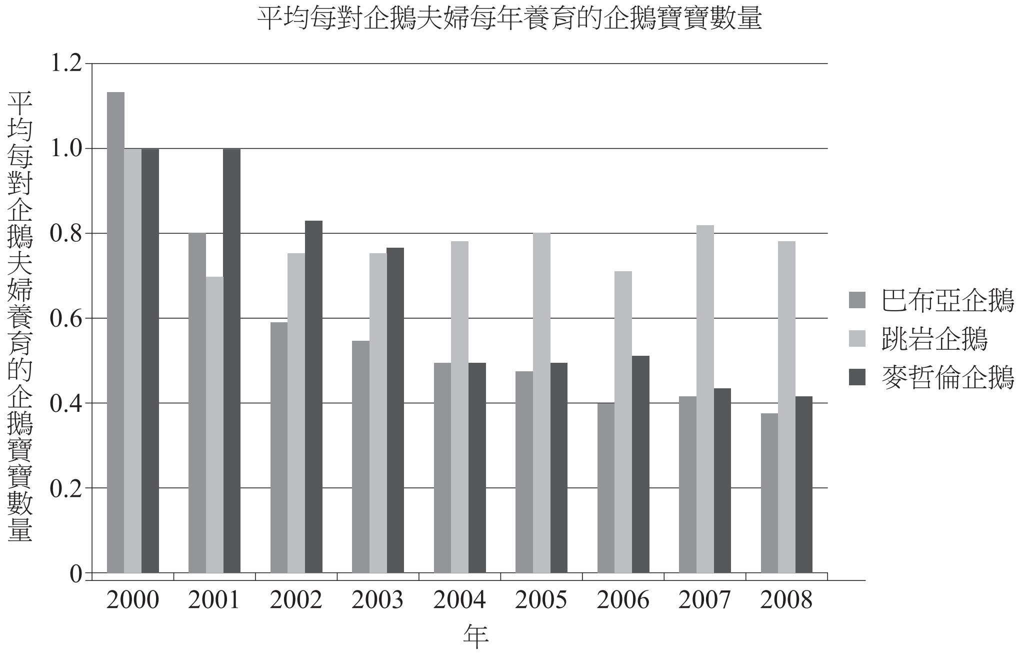
根據上述假設，下列哪個公式表示了 7 年後企鵝的數量 P？

(A) $P=10000\times(1.5\times0.2)^7$　　(B) $P=10000\times(1.5\times0.8)^7$

(C) $P=10000\times(1.2\times0.2)^7$　　(D) $P=10000\times(1.2\times0.8)^7$

問題 4：

尚・巴提旅行結束回家後，他在網路上查看一對企鵝夫婦平均養育多少隻企鵝寶寶的資料。他發現下面關於巴布亞企鵝、跳岩企鵝和麥哲倫企鵝等三種企鵝的長條圖。



根據上圖，下列關於三種企鵝的敘述是正確或錯誤？

針對每一個敘述，圈選「正確」或「錯誤」。

敘述	該敘述正確或錯誤？
在 2000 年，對這三種企鵝來說，平均每對企鵝夫婦養育的企鵝寶寶數量皆超過 0.6。	正確／錯誤
在 2006 年，對這三種企鵝來說，不到 80％的企鵝夫婦有養育企鵝寶寶。	正確／錯誤
到 2015 年左右，這三種企鵝都將絕種。	正確／錯誤
從 2001 年到 2004 年，平均每對麥哲倫企鵝夫婦養育的企鵝寶寶的數量逐年減少。	正確／錯誤

攀登富士山

富士山是日本著名的休眠火山。

問題 1：

富士山只在每年的 7 月 1 日至 8 月 27 日對外開放，這期間大約有 200000 人來攀登富士山。請問平均每天有多少人來攀登富士山？

(A) 710　　(B) 3400　　(C) 7100　　(D) 7400

問題 2：

從御殿場到富士山的登山步道長約 9 公里（km），遊客必須在晚上八點前完成來回 18 km 的路程。山本估計自己可以以平均每小時 1.5 km 的速度登山，並以兩倍的速度下山，此速度的估算包含用餐和休息所花費的時間。

按照山本估計的速度，他最遲要在何時出發才能在晚上八點前回來？

問題 3：

山本帶著一個計步器去記錄在御殿場登山步道所走的步數。他的計步器上顯示他在上山時共走了 22500 步。

山本在御殿場登山步道共走了 9 km，請以公分（cm）為單位估算他步伐的平均長度。

小清騎單車

小清剛獲得一輛新單車，單車的手把上有測速器。這個測速器可以讓小清知道，她騎單車的距離以及路程的平均速度。

問題 1：

在一趟路程中，小清在前 10 分鐘騎了 4 km，接著的 5 分鐘騎了 2 km。

下列哪一個敘述是正確的？

(A) 小清前 10 分鐘的平均速度比後 5 分鐘的平均速度快

(B) 小清前 10 分鐘的平均速度與後 5 分鐘的平均速度相同

(C) 小清前 10 分鐘的平均速度比後 5 分鐘的平均速度慢

(D) 從上述資料無法判斷小清的平均速度

問題 2：

小清騎了 6 km 到阿姨家。她的測速器顯示整趟路程的平均速度是 18 km/h。

下列哪一個敘述是正確的？

(A) 小清花了 20 分鐘到達阿姨家

(B) 小清花了 30 分鐘到達阿姨家

(C) 小清花了 3 小時到達阿姨家

(D) 無法判斷小清花了多少時間到達阿姨家

問題 3：

小清從家中騎單車到 4km 外的河邊，花了 9 分鐘。騎回家時她抄了一條較短的近路，這條路徑長 3km，只花了 6 分鐘。

小清往返河邊路程的平均速度是多少？答案以 km/h 表示。

DVD 出租

曉珍在 DVD 和電腦遊戲出租店工作。在這家店裡，一年的會員費為 10 西德蘭元。
會員租借 DVD 的價格比非會員便宜，如下表所示：

非會員 一片 DVD 的租借費用	會員 一片 DVD 的租借費用
3.20 西德蘭元	2.50 西德蘭元

問題 1：
簡楚去年是這家 DVD 出租店的會員。去年，包括會員費在內，他總共花了 52.50 西德蘭元。
如果簡楚不是會員，他要租借同樣的 DVD 數量，要花多少錢？

問題 2：
會員至少要租多少片 DVD，才能抵銷會員費的成本？寫出你的計算過程。
寫出你的計算過程：

哪一輛車？

樂瑤剛取得汽車駕駛執照，想要買她的第一輛車。下表顯示在當地經銷商找到的四輛汽車資料。

型號	阿爾法	保特	卡斯特	迪馳
年分	2003	2000	2001	1999
標價（西德蘭元）	4800	4450	4250	3990
已行駛距離（公里）	105000	115000	128000	109000
引擎排氣量（公升）	1.79	1.796	1.82	1.783

問題 1：

樂瑤想要一輛符合以下全部條件的車：

・已行駛距離不超過 120000 公里。

・2000 年或以後製造。

・標價不超過 4500 西德蘭元。

哪一輛車符合樂瑤的條件？

(A) 阿爾法　(B) 保特　(C) 卡斯特　(D) 迪馳

問題 2：

哪一輛車的引擎排氣量最少？

(A) 阿爾法　(B) 保特　(C) 卡斯特　(D) 迪馳

問題 3：

樂瑤須另外繳交汽車標價的 2.5%作為稅款。阿爾法的附加稅款是多少西德蘭元？

賣報紙

在西德蘭這個國家，有兩家報紙想招募售報員。下面的海報顯示兩家報紙售報員的薪資計算方式。

> 西德蘭星報
>
> 想賺外快嗎？
>
> 販賣我們的報紙吧！
>
> 你的薪資：一星期內賣出的前 240 份報紙，每份報紙可得 0.2 西德蘭元；若每多賣出一份報紙則可得 0.4 西德蘭元。

> 西德蘭日報
>
> 工時少，酬薪高！
>
> 販賣西德蘭日報，一星期可賺 60 西德蘭元。此外，你每賣出一份報紙將額外有 0.05 西德蘭元。

問題 1：

瑞德平均每星期賣出 350 份西德蘭星報。他平均每星期賺多少錢？

問題 2：

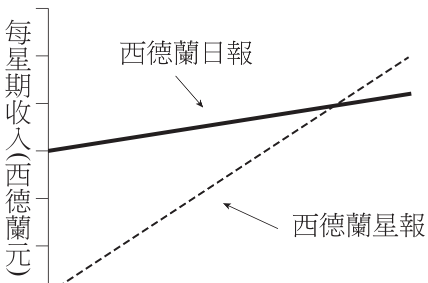
小莉販賣西德蘭日報，在某星期她賺了 74 西德蘭元。她在那個星期賣出多少份報紙？

問題 3：

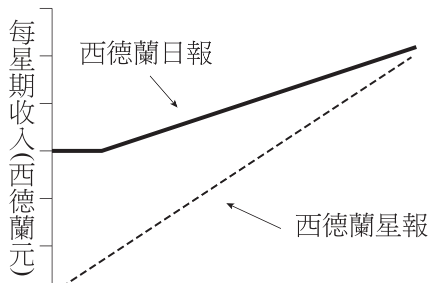
翰強決定應徵當售報員。他需要選擇西德蘭星報或西德蘭日報。

下列哪一個圖正確表示兩家報紙的薪資計算方式？請圈選 A、B、C 或 D。

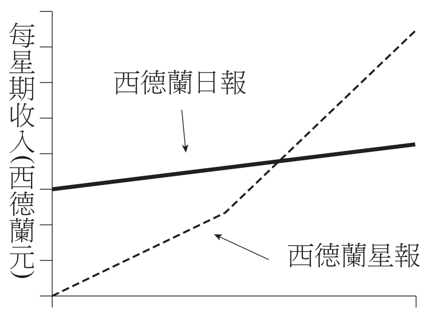
A



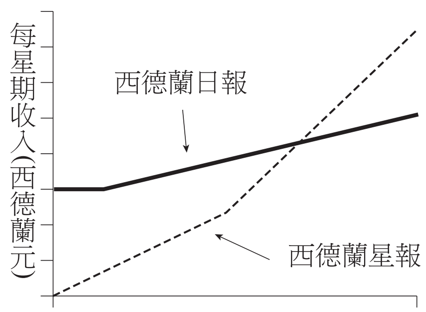
B



C



D



有線電視

下表顯示的是五個國家各自擁有電視的家庭資料，表中也呈現擁有電視的家庭同時也裝設有線電視的百分比。

國家	擁有電視的家庭總數	擁有電視的家庭總數占全部家庭總數的百分比	裝設有線電視的家庭總數占擁有電視的家庭總數的百分比
日本	48.0 百萬	99.8%	51.4%
法國	24.5 百萬	97.0%	15.4%
比利時	4.4 百萬	99.0%	91.7%
瑞士	2.8 百萬	85.8%	98.0%
挪威	2.0 百萬	97.2%	42.7%

資料來源：ITU，國際電信指標 2004／2005
ITU，國際電信／ICT 發展報告 2006

問題 1：
表中顯示，在瑞士的全部家庭中，有 85.8%的家庭擁有電視。根據表中的資訊，最接近瑞士家庭總數的估計是多少？
(A) 2.4 百萬 (B) 2.9 百萬 (C) 3.3 百萬 (D) 3.8 百萬

問題 2：
凱文看著表中有關法國和挪威的資料。凱文說：「因為這兩個國家各自擁有電視的家庭總數占其全部家庭總數的百分比是差不多的，所以和法國比起來，挪威裝設有線電視的家庭總數是比較多的。」

請解釋為什麼這句話是不正確的，並提出一個理由來說明你的答案。

調味醬

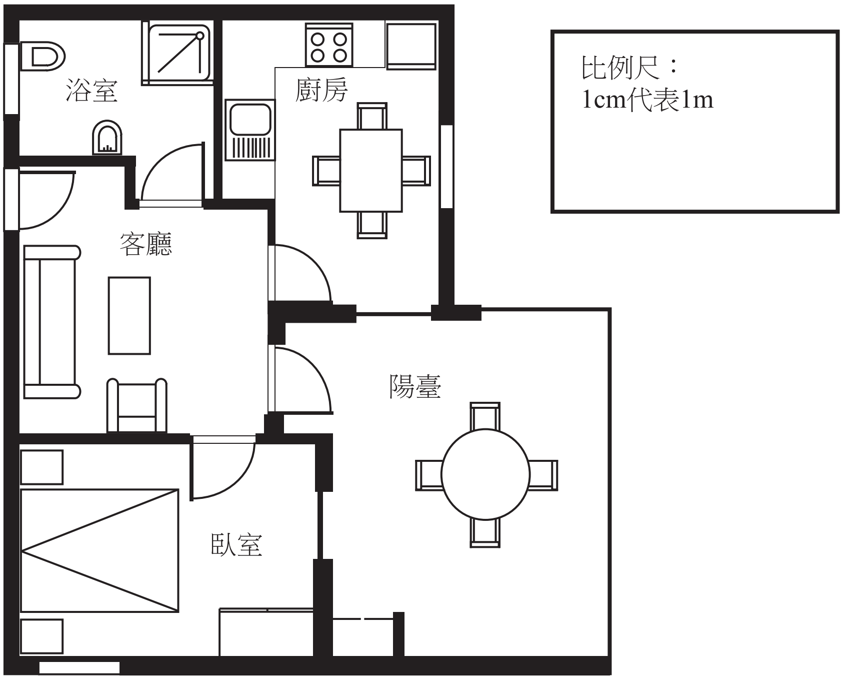
問題 1：
假設你正在調製沙拉醬。這裡有一個調製 100 毫升（mL）沙拉醬的食譜。

沙拉油	60 mL
醋	30 mL
醬油	10 mL

要調製 150 mL 的沙拉醬需要多少毫升（mL）的沙拉油？

購買公寓

這是柏睿的父母想要從房地產公司購買的公寓平面圖。



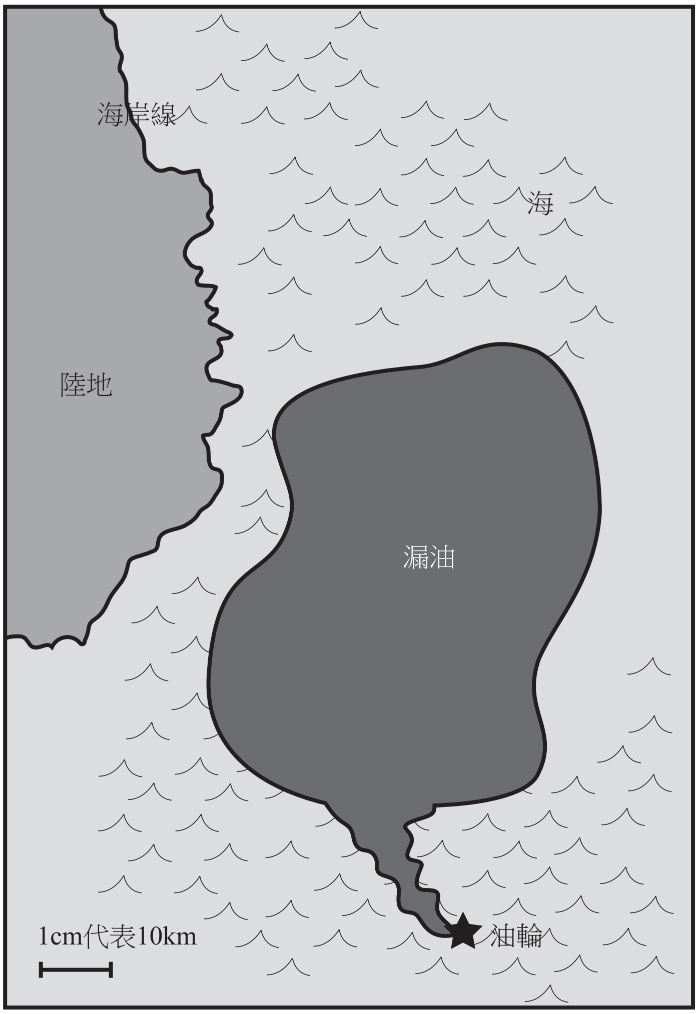
問題 1：

如果我們要估計公寓的地板總面積（包括陽臺和牆壁）時，可以先測量每個房間的大小，再計算每個房間的面積，最後將所有面積加起來。當然，也有一個更簡易的方法來估計地板總面積。例如：只需要測量出平面圖中的 4 個邊長，然後進行一些簡單運算。

請你從上面的平面圖中，標示出你在估計此公寓的地板總面積時，會需要測量出的 4 個邊長，並以此算出該公寓的地板總面積。

漏油

一艘油輪在海上觸礁，導致儲油槽破洞。油輪距離陸地約 65km。幾天後，石油擴散了，如下圖。



問題 1：

利用地圖上的比例尺，估計漏油區域的面積，答案以平方公里（km^2）表示。

MP3 播放器

音樂城 MP3 專賣店		
MP3 播放器	耳罩式耳機	喇叭
		
155 西德蘭元	86 西德蘭元	79 西德蘭元

問題 1：

維維用她的計算機把 MP3 播放器、耳罩式耳機和喇叭的價錢加起來。她得到的答案是 248。

維維得到的答案是不正確的。她犯了下面的一項錯誤，是哪一項呢？

(A) 她加了其中的一個價錢兩次

(B) 她忘記加上三個價錢中的一個

(C) 她漏按了其中一個價錢的個位數字

(D) 她減去其中一個價錢而不是加上

問題 2：

音樂城進行促銷活動，只要你買 2 件或 2 件以上的商品，就可以原售價的 8 折來買。

森森有 200 西德蘭元。在這個促銷活動中他能買什麼？

針對每一個選項，圈選「是」或「否」。

商品	森森是否用 200 西德蘭元能買到？
MP3 播放器和耳罩式耳機	是／否
MP3 播放器和喇叭	是／否
全部 3 個商品 —— MP3 播放器、耳罩式耳機和喇叭	是／否

問題 3：

MP3 的銷售價錢包含了 37.5%的利潤，不含利潤的價錢稱為批發價。

利潤是以批發價的百分比計算出來的。

以下公式是否正確表示出批發價 w 和銷售價錢 s 之間的關係？

針對每一個公式，圈選「是」或「否」。

公式	公式是否正確？
$s=w+0.375$	是／否
$w=s-0.375s$	是／否
$s=1.375w$	是／否
$w=0.625s$	是／否

無窮調和級數

江慶昱／衛道中學退休教師

一、楔子》

1999 年，臺大數學系推甄考了 10 題，其中一題是這樣的：

(1) 證明對所有大於 1 的正整數 $n, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 都不是整數。

(2) 如果分母不是連續整數，試舉一反例。

剛好那時候有一位學生小張準備推甄臺大，於是我每星期中會有一天跟他討論數學，幫他張羅一些題目做練習。我是在網路上找到以上這個題目的。

這一年是國中辦推甄高中的第二年，我女兒推甄上了文華高中，小張順利上了臺大，算是雙喜臨門。

二、無窮調和級數》

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 是一個無窮調和級數，第一個證明此無窮調和級數發散的人是尼克爾．奧里斯姆（Nicole Oresm 1323～1382），中世紀的哲學家。

尼克爾．奧里斯姆 1360 年給出來的證法是這樣子的：

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}>8\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}>2^{n-1}\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}>(n-1)\times\frac{1}{2}$$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}>1+n\times\frac{1}{2}$，所以 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 發散。

我高中時就是這樣證明的。

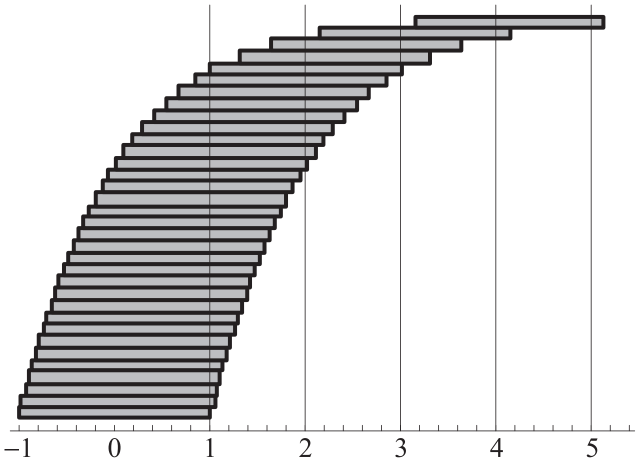
18 世紀的數學主流是微積分與無窮級數，奧里斯姆在 14 世紀就可以證明出這個級數的發散性，令人佩服。

「天才之旅」一書中有好幾種無窮調和級數發散的證明，分別由蒙哥利（Pietro Mengoli 1625～1686）、柏努利兄弟 John Bernoulli（1667～1748）、Jacob Bernoulli（1655～1705）證明。

三、多米諾骨牌堆疊（Overhanging dominoes）》

這是夏普（T.R. Sharp）1954 年玩出來的遊戲。

有 n 張牌和一個桌子，將這 n 張牌沿桌子邊緣一張張疊起來。疊的方式是：在符合重力的條件下，儘可能突出桌緣，牌的邊緣和桌子邊緣平行，我們最多能突出多少？

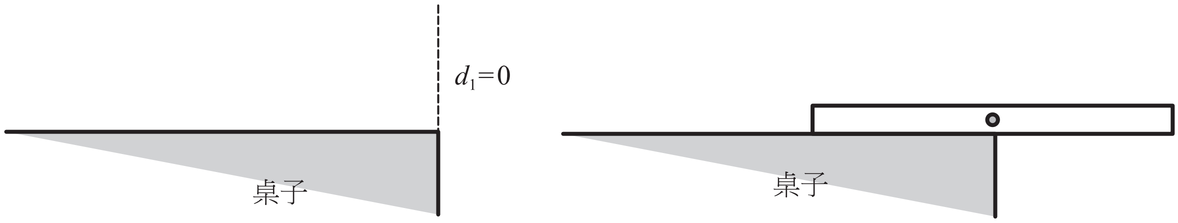


物理學家常用「思想實驗」來解釋現象。我們也來仿效一下。

所謂「符合重力的條件」是什麼意思？

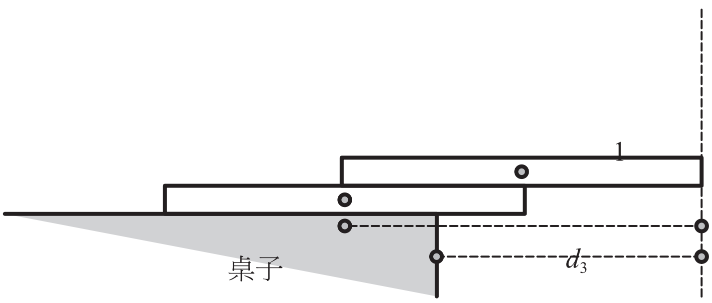
假設 n 個物體的重量分別是 w_1、w_2、⋯、w_n，重心位置為 p_1、p_2、⋯、p_n。則它們合在一起的重心位置為 $p_{n+1}=\dfrac{w_1p_1+w_2p_2+\cdots+w_np_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$；假設每張紙牌的重量皆為 w，則 $p_{n+1}=\dfrac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}$。

當只有一張紙牌時，如果紙牌的重心剛好在桌子邊緣上，我們就得到最大的突出。假設紙牌長 2 單位，則突出量為 1 單位。（圖 2）



（圖 1）　　（圖 2）

當有兩張牌時，如果上面紙牌的重心恰好落在第二張紙牌的邊緣，而這兩張紙牌合起來的重心落在桌緣時，$d_3=\dfrac{1+2}{2}=1+\dfrac{1}{2}$，我們得到最大的突出 $1+\dfrac{1}{2}$ 單位。（圖 3）



（圖 3）

我們將牌一張張疊起來，使得上面 k 張牌的重心恰落在桌面的邊緣。

假設 d_k = 第 k 張紙牌的最大突出量。（沒有紙牌的特殊情況假設為 $d_1=0$，有 k 張紙牌時桌子視為第 $k+1$ 張紙牌。）

(1) 沒有紙牌時，$d_1=0$。

(2) 1 張紙牌時，$d_2=1$。

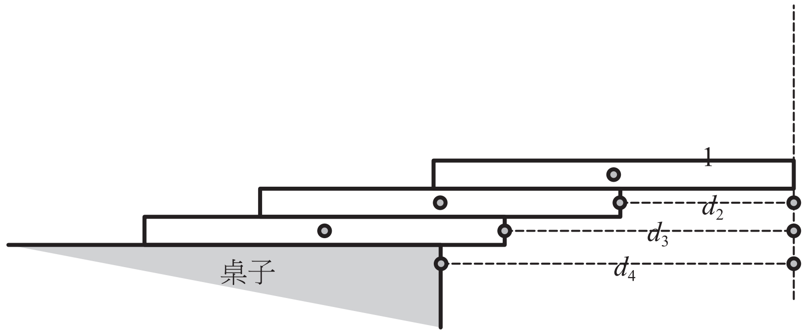
(3) 2 張紙牌時，

$$d_3=\frac{\left(1+d_1\right)+\left(1+d_2\right)}{2}=\frac{1+(1+1)}{2}=1+\frac{1}{2}\text{ 。}$$

（桌子當作是第 3 張紙牌，所以 d_3 也就是兩張紙牌的最大突出量。）

(4) 3 張紙牌時，

$$d_4=\frac{\left(1+d_1\right)+\left(1+d_2\right)+\left(1+d_3\right)}{1+1+1}=\frac{3+d_1+d_2+d_3}{3}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\text{ 。}$$



（圖 4）

一般而言 $kd_{k+1}=k+d_1+d_2+\cdots+d_k$ 對 $k\geq 1\cdots$。(1)，

$(k-1)d_k=(k-1)+d_1+d_2+\cdots+d_{k-1}$　對 $k\geq 2\cdots$。(2)，

兩式相減，得 $kd_{k+1}-(k-1)d_k=1+d_k$ ，

即 $d_{k+1}=d_k+\frac{1}{k}$ 對 $k\geq 2$ ；但是此式對 $k=1$ 也成立。

所以對 $k\geq 1$ ， $d_{k+1}=d_k+\frac{1}{k}$ 。

紙牌的突出量即 d_{k+1} ，容易算出 $d_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}$ ，

總之，第二張牌比第三張牌突出 $\frac{1}{2}$ 個單位長。

第三張牌比第四張牌突出 $\frac{1}{3}$ 個單位長。

因此 n 張牌的最大突出量 $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 單位，用 H_n 表示。

例如，四張牌的突出量 $H_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=2\frac{1}{12}$ 單位，超過一張牌的長度一點點。52 張牌的突出量為 H_{52} ，大約 2.27 張牌的長度。

因此，理論上只要有足夠多的骨牌，最頂層骨牌離最底層的距離就可以無窮遠。 $H_{52}\fallingdotseq 2.27$ 告訴我們，實際上的堆牌是一件蠻困難的事。

四、後記》

國中用推甄的方式上高中是一個很棒的方法，至少我女兒就這樣上了文華高中。可惜只辦了兩年。這兩年臺中全國補習班真是生意鼎盛。

12 年國教馬上要上路了，各校要辦特色招生，我預料這也將是補習班大展身手的時候，從我念小學到現在，所謂「減輕負擔、快樂學習」從來都只是天邊的彩虹。（已有許多縣市宣布不續辦特招。）

五、習作》

1. 證明對所有大於 1 的正整數 n，H_n 都不是整數。
2. 所有的無窮調和級數都發散，這是常識。試證$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$ 發散。
3. 試證「若 $a>1$ 則 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>\frac{3}{a}$ 」。並由此證明無窮調和級數的發散性。（這是 1647 年蒙哥利（Pietro Mengoli）發現的，Journey through Genius p.205。）

參考資料：

1. 多米諾骨牌堆疊（Overhanging dominoes）
   http://v.163.com/movie/2006/8/F/4/M6GLI5A07_M6GLMCDF4.html
2. http://www.dcs.warwick.ac.uk/~msp/papers/maximum_overhang.pdf
3. 天才之旅（Journey through Genius by William Dunham）p.227～236
4. 1665 年，牛頓推導出第一個冪級數$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$，尤拉在 1734 年，利用牛頓的結果得到$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(H_n-\ln(n)\right)=0.57721566\cdots$，$\gamma$ 稱為尤拉常數。
5. http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html 尤拉常數
6. 具體數學（格致圖書公司陳衍文翻譯） p.295
   只要有足夠多的骨牌，最頂層骨牌離最底層的距離就可以無窮遠。
   http://www.slideshare.net/lufeche/concrete-mathematics-graham-knuth-patashnik
7. 2014 年數學覺知月主題之一 http://www.mathaware.org/mam/2014/calendar/overhang.html
8. 數學傳播季刊第 34 卷第 2 期；第 35 卷第 2 期。

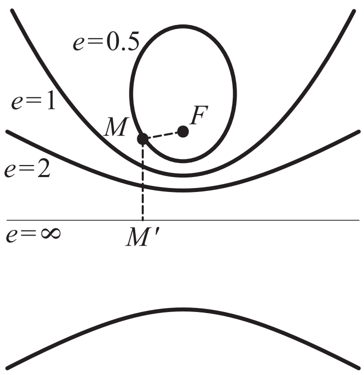
二次曲線的中點弦與弦中點軌跡

葉善雲／臺北市東山高中

一、前言》

關於過圓內一點 I 的弦，若 I 為圓心，則任意過 I 的弦皆為直徑；若 I 不是圓心，則過 I 點的所有弦中，以 I 為中點的弦（稱為中點弦）垂直 I 與圓心的連線，又所有弦的中點所形成的圖形（稱為弦中點軌跡）是以 I 及圓心為直徑兩端點的圓。本文嘗試將上述結果從圓推廣到二次曲線。

為探討一般性的結果，底下的二次曲線定義，我們採用焦點與準線觀點。圓錐（二次）曲線應用最廣泛的定義為（橢圓，拋物線，雙曲線的統一定義）：動點到一定點（焦點）的距離與其到一定直線（準線）的距離之比為常數（離心率 e）的點的集合是圓錐（二次）曲線。對於 $0<e<1$ 得到橢圓，對於 $e=1$ 得到拋物線，對於 $e>1$ 得到雙曲線。在圓的情況下，$e=0$ 且準線被假想為離中心無限遠。圓錐曲線的離心率是對它偏離於圓的程度的度量，請參閱維基百科之圓錐曲線。



有固定焦點 F 和準線的橢圓（$e=1/2$）、拋物線（$e=1$）和雙曲線（$e=2$）

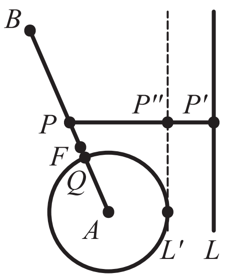
《定理》設 F, L 分別為二次曲線 Γ 的焦點與準線，e 為 Γ 的離心率，則 Γ 的焦弦中點 P 滿足 $\overrightarrow{PF}\cdot\left(\overrightarrow{PF}-e^2\cdot\overrightarrow{PP'}\right)=0$，其中 P' 為 P 在 L 上的投影點。

證明：設 $\overline{AB}$ 為一焦弦，P 為 $\overline{AB}$ 之中點，且 P' 為 P 在 L 上的投影點，則

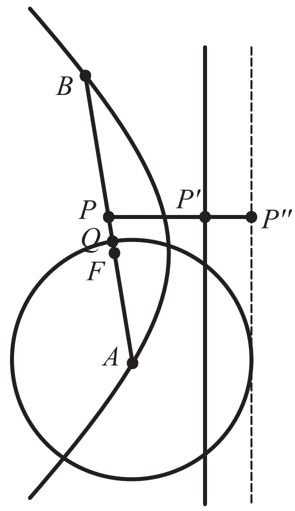
$$d(P,L)=\frac{1}{2}\big(d(A,L)+d(B,L)\big)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\overline{AF}+\frac{1}{e}\overline{BF}\right)=\frac{1}{e}\cdot\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{1}{e}\cdot\overline{AP}\text{。}$$

不妨設 F 在 A, P 之間，作平行 L 的直線 L'，

使 $d(P,L')=e\cdot d(P,L)=\overline{AP}$，



$e<1$：橢圓



$e>1$：雙曲線

並令 P'' 為 P 在 L' 上的投影點，則

$$d(A,L')=d(A,L)-(1-e)\cdot d(P,L)=\frac{1}{e}\overline{AF}-(1-e)\cdot\frac{1}{e}\overline{AP}$$

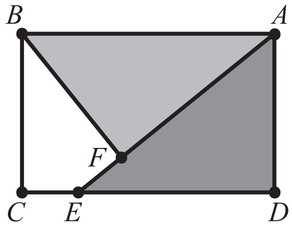
$$=\frac{1}{e}(\overline{AF}-\overline{AP})+\overline{AP}=\overline{AP}-\frac{1}{e}\overline{PF}\text{ 。}$$

在 $\overline{PA}$ 上取一點 Q 使 $\overline{AQ}=\overline{AP}-\frac{1}{e}\overline{PF}=d(A,L')$ 且 $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{e}\overrightarrow{PF}$ ，

此時 $\overrightarrow{QP''}=\overrightarrow{PP''}-\overrightarrow{PQ}=e\overrightarrow{PP'}-\frac{1}{e}\overrightarrow{PF}=-\frac{1}{e}\cdot\left(\overrightarrow{PF}-e^2\cdot\overrightarrow{PP'}\right)$ ，

則由底下的引理 1，知 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{QP''}$ ，於是 $\overrightarrow{PF}\cdot\left(\overrightarrow{PF}-e^2\cdot\overrightarrow{PP'}\right)=0$ 。

《引理 1》已知 $\square ABCD$ 為矩形， E 為 $\overline{CD}$ 邊上的點， F 為 $\overline{AE}$ 上的點，如圖所示，若 $\overline{AB}=\overline{AE}$ 且 $\overline{CE}=\overline{EF}$ ，則 $\overline{FA}\perp\overline{FB}$ 。



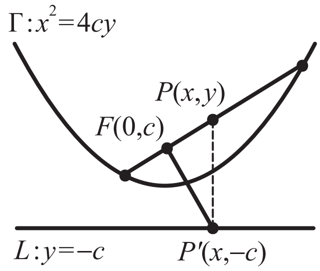
證明：因為 $\overline{AB}=\overline{AE}$ ， $\angle BAF=\angle DEA$ ，

且 $\overline{AF}=\overline{AE}-\overline{FE}=\overline{CD}-\overline{CE}=\overline{DE}$ ，

所以 $\triangle AFB\cong\triangle EDA$ ，於是 $\angle AFB=\angle ADE=90^\circ$ ，

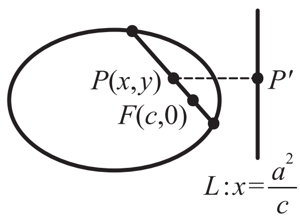
即 $\overline{FA}\perp\overline{FB}$ 。

《例如：焦弦中點軌跡》



(1) 拋物線 Γ ： $x^2=4cy$ ， $F(0,c)$ ， L ： $y=-c$ ， $e=1$ ，Γ 的焦弦中點 $P(x,y)$ ， P 在 L 上的投影點為 $P'(x,-c)$ ，則由

$\overrightarrow{PF}(-x,c-y)\cdot\overrightarrow{P'F}(-x,2c)=0$ ，得 $x^2=2c(y-c)$ ，其軌跡為以原焦點 $F(0,c)$ 為頂點，原頂點 $V(0,0)$ 與 $F(0,c)$ 連線之中垂線 $y=\frac{c}{2}$ 為準線之拋物線。



(2) 橢圓 Γ ： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （ $a>b>0$ ）， $F(c,0)$ ， L ： $x=\frac{a^2}{c}$ ，

$e=\frac{c}{a}$ ，Γ 的焦弦中點 $P(x,y)$ ， P 在 L 上的投影點為 $P'\left(\frac{a^2}{c},y\right)$ ，

則 $\overrightarrow{PF}(c-x,-y)$ ， $e^2\cdot\overrightarrow{PP'}=\left(c-\frac{c^2}{a^2}x,0\right)$

且 $\overrightarrow{PF}-e^2\cdot\overrightarrow{PP'}=\left(-x+\frac{c^2}{a^2}x,-y\right)=\left(-\frac{b^2}{a^2}x,-y\right)$ ，

由 $\overrightarrow{PF}\cdot\left(\overrightarrow{PF}-e^2\cdot\overrightarrow{PP'}\right)=0$ ，得 $\frac{b^2}{a^2}x(x-c)+y^2=0$ ，整理得 $\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\frac{c^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{4a^2}}=1$ ，此圖形為以

原焦點$F(c,0)$為長軸頂點，原頂點$V(a,0)$與$F(c,0)$連線之中垂線$x=\dfrac{a+c}{2}$為準線之橢圓。

(3) 雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$F(c,0)$，$L$：$x=\dfrac{a^2}{c}$，$e=\dfrac{c}{a}$，$\Gamma$的焦弦中點$P(x,y)$，$P$在$L$上的投影點為$P'\left(\dfrac{a^2}{c},y\right)$，則$\overrightarrow{PF}(c-x,-y)$，$e^2\cdot\overrightarrow{PP'}=\left(c-\dfrac{c^2}{a^2}x,0\right)$

且$\overrightarrow{PF}-e^2\cdot\overrightarrow{PP'}=\left(-x+\dfrac{c^2}{a^2}x,-y\right)=\left(\dfrac{b^2}{a^2}x,-y\right)$，由$\overrightarrow{PF}\cdot\left(\overrightarrow{PF}-e^2\cdot\overrightarrow{PP'}\right)=0$，

得$y^2-\dfrac{b^2}{a^2}x(x-c)=0$，整理得$\dfrac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\frac{c^2}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{b^2c^2}{4a^2}}=1$，此圖形為以原焦點$F(c,0)$為貫軸頂點，原頂點$V(a,0)$與$F(c,0)$連線之中垂線$x=\dfrac{a+c}{2}$為準線之雙曲線。

利用下列事實：拋物線之平行弦中點連線平行對稱軸，橢圓（或雙曲線）之平行弦中點連線通過對稱中心，我們有底下的推論 1 與推論 2。

《推論 1》 設F,L分別為二次曲線Γ的焦點與準線，e為Γ的離心率，I為Γ內部一點（與焦點同側）。若Q為過I之弦的中點，則Q滿足$\overrightarrow{QI}\cdot\left(\overrightarrow{QF}-e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}\right)=0$，其中$Q'$為$Q$在準線$L$上的投影點。

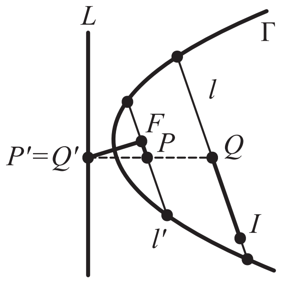
證明：若I為Γ的對稱中心O，則$Q=I=O$，推論顯然成立。

底下，當I不是Γ的對稱中心時，設l為過I之弦且Q為其中點，l'為平行l之焦弦且P為其中點，令P'為P在L上的投影點，得$\overrightarrow{QI}\,//\,\overrightarrow{PF}$。

(1) 當Γ為拋物線時，即$e=1$：

此時平行弦的中點連線平行對稱軸。

得$\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{P'F}=\overrightarrow{Q'F}=\overrightarrow{QF}-\overrightarrow{QQ'}$，根據上述定理$\overrightarrow{PF}\cdot\left(\overrightarrow{PF}-e^2\cdot\overrightarrow{PP'}\right)=0$，所以$\overrightarrow{QI}\cdot\left(\overrightarrow{QF}-e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}\right)=0$。



(2) 當Γ為橢圓或雙曲線時，即$e\neq1$：

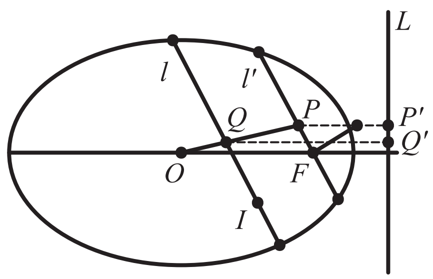
此時平行弦的中點連線通過對稱中心。

由底下引理 2，得

$\left(\overrightarrow{PF}-e^2\cdot\overrightarrow{PP'}\right)//\left(\overrightarrow{QF}-e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}\right)$，

根據上述定理$\overrightarrow{PF}\cdot\left(\overrightarrow{PF}-e^2\cdot\overrightarrow{PP'}\right)=0$，

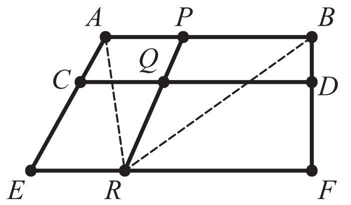
所以$\overrightarrow{QI}\cdot\left(\overrightarrow{QF}-e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}\right)=0$。



《引理 2》已知平面三直線 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ 互相平行

且 A, C, E 三點共線，B, D, F 三點共線，截線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 分別交三線於 P, Q, R，如圖所示，

則 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{CQ}:\overline{QD} \Leftrightarrow \overline{ER}:\overline{RF}=\overline{AP}:\overline{PB}$。



《推論 2》設 F, L 分別為二次曲線 Γ 的焦點與準線，e 為 Γ 的離心率，m 為一固定實數。若 Q 為斜率 m 之弦的中點，則 Q 滿足 $(1, m)\cdot\left(\overrightarrow{QF}-e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}\right)=0$，其中 Q' 為 Q 在準線 L 上的投影點。

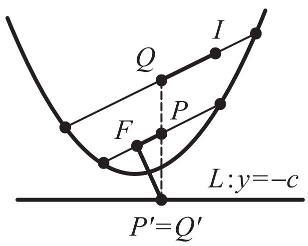
證明：設 l 為斜率 m 的焦弦，此弦之方向向量可取為 $(1, m)$，由上述推論 1 可得。

《例如：過定點弦之弦中點與平行弦之弦中點軌跡》

(1) 給定拋物線 Γ：$x^2=4cy$，$F(0, c)$，L：$y=-c$，$e=1$：

① 已知 $I(x_0, y_0)$ 為 Γ 內部一點，若 $Q(x, y)$ 為過 I 之弦的中點，則 Q 在準線 L 上的投影點為 $Q'(x, -c)$，由推論 1：

$\overrightarrow{QI}\cdot\overrightarrow{Q'F}=0$，得 $(x_0-x, y_0-y)\cdot(-x, 2c)=0$，即過拋物線 Γ 內部一點 $I(x_0, y_0)$ 的弦中點軌跡方程式為 $x(x-x_0)=2c(y-y_0)$（仍為一拋物線）。



② 設斜率 m 的平行弦之中點 $Q(x, y)$，則 Q 在準線 L 上的投影點為 $Q'(x, -c)$，由推論 2：

$(1, m)\cdot\overrightarrow{Q'F}=0$，得 $(1, m)\cdot(-x, 2c)=0$，即拋物線 Γ 之平行弦的弦中點所在直線軌跡方程式為 $x=2cm$（平行對稱軸之一射線）。

(2) 給定橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），$F(c, 0)$，$L$：$x=\dfrac{a^2}{c}$，$e=\dfrac{c}{a}$：

① 已知 Γ 內部非對稱中心的點 $I(x_0, y_0)$，若 $Q(x, y)$ 為過 I 之弦的中點，則 Q 在準線 L 上的投影點為 $Q'\left(\dfrac{a^2}{c}, y\right)$，$\overrightarrow{QF}(c-x, -y)$，$e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}=\left(c-\dfrac{c^2}{a^2}x, 0\right)$

且 $\overrightarrow{QF}-e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}=\left(-x+\dfrac{c^2}{a^2}x, -y\right)=\left(-\dfrac{b^2}{a^2}x, -y\right)$，由推論 1：$\overrightarrow{QI}\cdot\left(\overrightarrow{QF}-e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}\right)=0$，

得 $(x_0-x, y_0-y)\cdot\left(-\dfrac{b^2}{a^2}x, -y\right)=0$，即過橢圓 Γ 內部非對稱中心的點 $I(x_0, y_0)$ 的弦中點軌跡方程式為 $\dfrac{b^2}{a^2}x(x-x_0)+y(y-y_0)=0$（仍為一橢圓）。

② 設斜率 m 的平行弦之中點 $Q(x,y)$，則 Q 在準線 L 上的投影點為 $Q'\left(\frac{a^2}{c},y\right)$，由推論 2：$(1,m)\cdot\left(\overrightarrow{QF}-e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}\right)=0$，得 $(1,m)\cdot\left(-\frac{b^2}{a^2}x,-y\right)=0$，即橢圓 Γ 之平行弦的弦中點所在直線軌跡方程式為 $\frac{b^2}{a^2}x+my=0$（過對稱中心之一線段）。

(3) 給定雙曲線 Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$F(c,0)$，$L$：$x=\frac{a^2}{c}$，$e=\frac{c}{a}$：

① 已知 Γ 內部非對稱中心的點 $I(x_0,y_0)$，若 $Q(x,y)$ 為過 I 之弦的中點，則 Q 在準線 L 上的投影點為 $Q'\left(\frac{a^2}{c},y\right)$，$\overrightarrow{QF}(c-x,-y)$，$e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}=\left(c-\frac{c^2}{a^2}x,0\right)$

且 $\overrightarrow{QF}-e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}=\left(-x+\frac{c^2}{a^2}x,-y\right)=\left(\frac{b^2}{a^2}x,-y\right)$，由推論 1：$\overrightarrow{QI}\cdot\left(\overrightarrow{QF}-e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}\right)=0$，

得 $(x_0-x,y_0-y)\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}x,-y\right)=0$，即過雙曲線 Γ 內部非對稱中心的點 $I(x_0,y_0)$ 的弦中點軌跡方程式為 $\frac{b^2}{a^2}x(x-x_0)-y(y-y_0)=0$（仍為一雙曲線）。

② 設斜率 m 的平行弦之中點 $Q(x,y)$，則 Q 在準線 L 上的投影點為 $Q'\left(\frac{a^2}{c},y\right)$，由推論 2：$(1,m)\cdot\left(\overrightarrow{QF}-e^2\cdot\overrightarrow{QQ'}\right)=0$，得 $(1,m)\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}x,-y\right)=0$，即雙曲線 Γ 之平行弦的弦中點所在直線軌跡方程式為 $\frac{b^2}{a^2}x-my=0$（過對稱中心）。

《推論 3》設 F,L 分別為二次曲線 Γ 的焦點與準線，e 為 Γ 的離心率，M 為 Γ 內部一點（與焦點同側）。若 l 為以 M 為中點的弦且 P 為 l 上的點，則 P 滿足

$\overrightarrow{MP}\cdot\left(\overrightarrow{MF}-e^2\cdot\overrightarrow{MM'}\right)=0$，其中 M' 為 M 在準線 L 上的投影點。

換言之，當 M 不是 Γ 的對稱中心時，l 的法向量為 $(\overrightarrow{MF}-e^2\cdot\overrightarrow{MM'})$。
（當 M 是 Γ 的對稱中心時，任意過 M 的弦都是以 M 為中點的弦。）

《例如：中點弦方程式》

(1) 拋物線 Γ：$y^2=4cx$，$F(c,0)$，L：$x=-c$，$e=1$，$M(x_0,y_0)$：
M 在準線 L 上的投影點 $M'(-c,y_0)$，則以 M 為弦中點的弦所在直線 l 的法向量為

$\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{M'F}=(2c,-y_0)$，此時 l 的方程式為 $2cx-y_0y=2cx_0-(y_0)^2$。

(2) 橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），$F(c,0)$，$L$：$x=\dfrac{a^2}{c}$，$e=\dfrac{c}{a}$，$M(x_0,y_0)\neq(0,0)$：

M 在準線 L 上的投影點 $M'\left(\dfrac{a^2}{c},y_0\right)$，則以 M 為弦中點的弦所在直線 l 的法向量為

$\overrightarrow{MF}-e^2\cdot\overrightarrow{MM'}=(c-x_0,-y_0)-\dfrac{c^2}{a^2}\left(\dfrac{a^2}{c}-x_0,0\right)=\left(\dfrac{c^2}{a^2}x_0-x_0,-y_0\right)=\left(-\dfrac{b^2}{a^2}x_0,-y_0\right)$，

此時 l 的方程式為 $\dfrac{b^2}{a^2}x_0x+y_0y=\dfrac{b^2}{a^2}(x_0)^2+(y_0)^2$。

(3) 雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$F(c,0)$，$L$：$x=\dfrac{a^2}{c}$，$e=\dfrac{c}{a}$，$M(x_0,y_0)\neq(0,0)$：

M 在準線 L 上的投影點 $M'\left(\dfrac{a^2}{c},y_0\right)$，則以 M 為弦中點的弦所在直線 l 的法向量為

$\overrightarrow{MF}-e^2\cdot\overrightarrow{MM'}=(c-x_0,-y_0)-\dfrac{c^2}{a^2}\left(\dfrac{a^2}{c}-x_0,0\right)=\left(\dfrac{c^2}{a^2}x_0-x_0,-y_0\right)=\left(\dfrac{b^2}{a^2}x_0,-y_0\right)$，

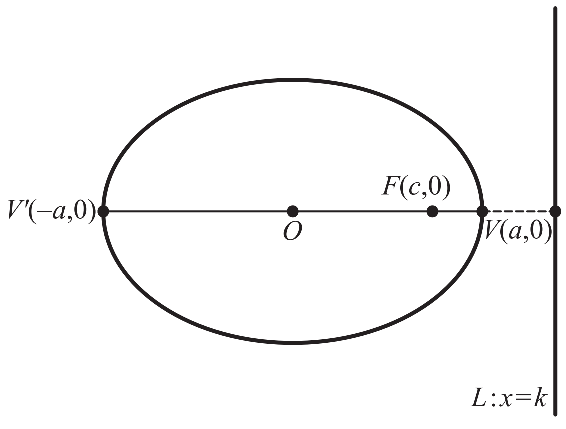
此時 l 的方程式為 $\dfrac{b^2}{a^2}x_0x-y_0y=\dfrac{b^2}{a^2}x_0-(y_0)^2$。

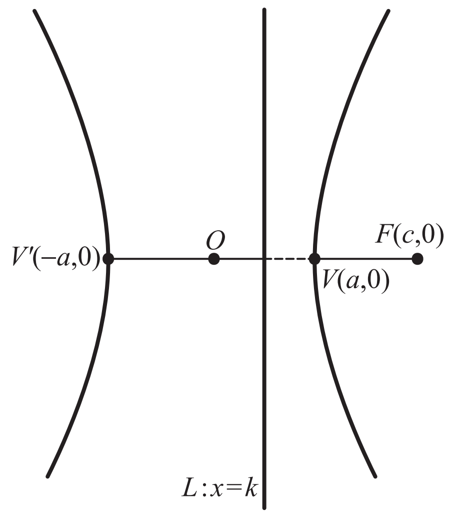
二、附錄：橢圓、雙曲線的準線與離心率》

已知焦點 $F(c,0)$（其中 $c>0$），說明橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）

或雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的離心率 e 與準線 L：$x=k$。

〔解〕設 $V(a,0)$，$V'(-a,0)$，則由 $\overline{VF}=e\cdot d(V,L)$ 與 $\overline{V'F}=e\cdot d(V',L)$，





得$\begin{cases}|a-c|=e\cdot|k-a|\\ a+c=e\cdot(k+a)\end{cases}$，化簡得$e=\dfrac{c}{a}$且$k=\dfrac{a^2}{c}$，此時$e=\dfrac{c}{a}$且$L$：$x=\dfrac{a^2}{c}$。

另外，對任意$P(x,y)\in\Gamma$，

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}$$

$$=|a-ex|=e\cdot\left|x-\frac{a^2}{c}\right|=e\cdot d(P,L)，$$

所以Γ的離心率$e=\dfrac{c}{a}$且準線為L：$x=\dfrac{a^2}{c}$。

參考資料：

1. 張國男：妙用坐標參數化法以解圓錐曲線諸弦中點圖形之描述問題，數學傳播 26 卷 4 期 P28~51，民 91 年 12 月。
2. 維基百科：圓錐（二次）曲線之定義。
3. 林福來等：高中數學第四冊教師手冊 P75～89，南一書局，民 99 年版。

獨立事件，獨立在哪？

林典蔚／彰化高中

一、前提》

涼爽的 4 月往往是高一學生在數學上頗為痛苦的階段，在經過排列、組合的洗禮後緊接而來的是層次更高的機率：古典機率、條件機率、貝氏定理。在條件機率中有個重要的子題為獨立事件，在教導獨立事件時，個人常透過底下的例子引入：

> 箱子內有 3 個紅球，1 個白球，從箱中每次取出一球，取後放回，連取二次，試問：
> (1) 第一次取出白球的機率為何？
> (2) 在第一次取出白球的條件下，第二次取出白球的機率為何？

以上題目是高中數學龍騰版第二冊課本中在獨立事件的引入例題，如果我們假設

A：第一次取出白球的事件

B：第二次取出白球的事件

則上述題目的第一題的解顯然為 $P(A)=\frac{1}{4}$，由於本題為取後放回的狀況，故第一次的取球情形並不會影響第二次，雖然題目設定的前提為第一次取出白球，但第二題根據條件機率的表示法與直觀判斷也可得到 $P(B|A)=\frac{1}{4}$，在以往的教學上，我會告知學生從上述的例子可以看出

當事件 A 發生的前提下並不影響事件 B 的機率，也就是 $P(B|A)=P(B)$，

接著只要做點推導就可以得出獨立事件的定義：$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

推導完定義，總是練習的開始，個人選取的第一個題目如下：

> 同時投擲大小兩顆公正骰子，令 A 為大骰子出現 5 點的事件，B 為點數和 7 的事件，試問：
>
> (1) A 與 B 是否為獨立事件？
> (2) A' 與 B 是否為獨立事件？

一如往常的，透過計算可得 $P(A\cap B)=\frac{1}{36}$，$P(A)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，由於兩事件為獨立事件需滿足 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，因此可判定該題的事件 A 與事件 B 互為獨立事件，多年來對於這題的教學亦復如此，直到 2014 年課堂上學生精彩的一問：

老師，這題應該不是獨立事件，理由是當大骰子出現 5 點的前提下，需要點數和為 7，就表示另外一個小骰子需出現 2，此時怎麼能說 A 事件的發生並不影響 B 事件？

此時林老師眉頭一皺，而孩子們也七嘴八舌的討論起來，最終這個問題在這堂課沒有解決，因為所有的思考都聚焦在「當 A 發生的前提下會影響到 B」的論點。

二、解決之道》

自我檢視了對於獨立事件所做的詮釋，透過一開始的例子，我引導學生獨立事件的論述為

當事件 A 發生的前提下並不影響事件 B 的機率，也就是 $P\left(B\middle|A\right)=P(B)$，

但事實上，透過推導也可以得到「當 A 不發生的前提下也不影響 B」，即 $P(B|A')=P(B)$，因此一開始在引入獨立事件的觀念時，若能將論述改為

事件 A 發生「與否」並不影響事件 B 的機率，也就是 $P\left(B\middle|A\right)=P(B)$，

則學生思考題目時，或許就不會一直拘泥於 A 一定要發生後對 B 產生的影響。

回到剛剛的題目來談，當 A 發生時，即大骰子出現 5 點，則顯然會有得到事件 B（點數和為 7）的機會，另一方面，當 A 不發生時，即大骰子出現 1、2、3、4、6 時，則顯然還是會有得到事件 B（點數和為 7）的機會，而且不論 A 發生也好，不發生也罷，產生點數和為 7 的機會均等，因此就表示事件 A 與事件 B 獨立。同樣地，如果我們將題目更改如下：

同時投擲大小兩顆公正骰子，令 A 為大骰子出現 5 點的事件，B 為點數和 9 的事件，試問： (1) A 與 B 是否為獨立事件？ (2) A' 與 B 是否為獨立事件？

則透過上述的思考方式也可以立刻判斷 A 與 B 兩事件並非獨立事件，因為當大骰子出現不是 5 點的狀況，如：1 點，則此時點數和為 9 的機率為 0，也就表示事件 A 發生與否會影響事件 B 的機率，故 A 與 B 兩事件不是獨立事件。

三、教學心得》

在提出將敘述「當事件 A 發生的前提下並不影響事件 B 的機率」更改成「事件 A 發生與否並不影響事件 B 的機率」後，學生對於該題目也就不再拘泥於事件 A 一定要發生，而會去思考當 A 不發生的狀況。然而這樣的論述，也進而促使學生更順理成章的接受當事件 A 與事件 B 獨立時，事件 A' 與事件 B 亦為獨立事件，剩下的就只是集合的推導而已。

參考資料：

1. 許志農，高中數學第二冊，龍騰文化事業股份有限公司，p.22。

2. Sheldon Ross.（2002）. A First Course in Probability （6th ed.）.USA:Prentice Hall

追隨代數大師尤拉在解方程式上的天才之旅

李維昌／國立宜蘭高中

研究目的：數學家白努利曾舉一個精確的例子說「四次多項式 $x^4-4x^3+2x^2+4x+4$ 不可能分解成兩個實係數二次多項式的乘積」，但是代數大師尤拉在公元 1724 年時，將白努利所舉的四次多項式 $x^4-4x^3+2x^2+4x+4$ 分解為二次多項式

$x^2-\left(2+\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)$ 與另一個二次多項式

$x^2-\left(2-\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1-\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)$ 的乘積。本文嘗試分解

$x^4-4x^3+2x^2+4x+4$ 為兩個實係數二次多項式的乘積，並利用同樣的分解手法加以推廣，可以分解更多實係數四次多項式形如 $x^4-4x^3+ax^2+(8-2a)x+c$ 為兩個實係數二次多項式的乘積。

研究過程：設 $\alpha\ge 0$ 且 $\beta\ge 0\Rightarrow\sqrt{\beta}\ge 0$ ，

將 $x^4-4x^3+2x^2+4x+4$ 分解成

$$\left[x^2+\left(-2+\sqrt{\alpha}\right)x+\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)\right]\cdot\left[x^2+\left(-2-\sqrt{\alpha}\right)x+\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}\right)\right]$$

$$=x^4-4x^3+\left(4-\alpha+2\sqrt{\beta}\right)x^2+\left(-4\sqrt{\beta}+2\alpha\right)x+\left(\beta-\alpha\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{\beta}+4-\alpha=2\cdots\cdots(1)\\ -4\sqrt{\beta}+2\alpha=4\cdots\cdots(2)\\ \beta-\alpha=4\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1)\Rightarrow 2\sqrt{\beta}-\alpha=-2\cdots\cdots(4)\\ (2)\Rightarrow 2\sqrt{\beta}-\alpha=-2\cdots\cdots(4)\\ \beta-\alpha=4\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

$(3)-(4)\Rightarrow\beta-2\sqrt{\beta}=6\Rightarrow\left(\sqrt{\beta}-1\right)^2=7\Rightarrow\sqrt{\beta}=1\pm\sqrt{7}$ ，

$\sqrt{\beta}=1-\sqrt{7}<0$（不合），$\sqrt{\beta}=1+\sqrt{7}$ 代入(4)可得 $\alpha=4+2\sqrt{7}$ ，

因此 $x^4-4x^3+2x^2+4x+4$

$$=\left[x^2+\left(-2+\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1+\sqrt{7}-\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)\right]\cdot$$
$$\left[x^2+\left(-2-\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1+\sqrt{7}+\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)\right]$$ 。

推廣：設$\alpha \ge 0$且$\beta \ge 0 \Rightarrow \sqrt{\beta} \ge 0$》

設a，c為實數滿足$c-a+5 \ge 0$且$(6-a)+2\sqrt{c-a+5} \ge 0$
將實係數四次多項式$x^4-4x^3+ax^2+(8-2a)x+c$分解成

$$\left[x^2+\left(-2+\sqrt{\alpha}\right)x+\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)\right]\cdot\left[x^2+\left(-2-\sqrt{\alpha}\right)x+\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}\right)\right]$$

$$=x^4-4x^3+\left(4-\alpha+2\sqrt{\beta}\right)x^2+\left(-4\sqrt{\beta}+2\alpha\right)x+(\beta-\alpha)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{\beta}+4-\alpha=a\cdots\cdots(1)\\-4\sqrt{\beta}+2\alpha=8-2a\cdots\cdots(2)\\\beta-\alpha=c\cdots\cdots(3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1)\Rightarrow 2\sqrt{\beta}-\alpha=a-4\cdots\cdots(4)\\(2)\Rightarrow 2\sqrt{\beta}-\alpha=a-4\cdots\cdots(4)\\\beta-\alpha=c\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

$$(3)-(4)\Rightarrow \beta-2\sqrt{\beta}=c-a+4\Rightarrow\left(\sqrt{\beta}-1\right)^2=c-a+5\Rightarrow\sqrt{\beta}=1\pm\sqrt{c-a+5}$$

取$\sqrt{\beta}=1+\sqrt{c-a+5}$代入(4)

$\Rightarrow 2\left(1+\sqrt{c-a+5}\right)-a+4=\alpha\Rightarrow\alpha=(6-a)+2\sqrt{c-a+5}$。

結論：a，c為實數滿足$c-a+5 \ge 0$且$(6-a)+2\sqrt{c-a+5} \ge 0$》

實係數四次多項式$x^4-4x^3+ax^2+(8-2a)x+c$

$$=\left[x^2+\left(-2+\sqrt{(6-a)+2\sqrt{c-a+5}}\right)x+\left(1+\sqrt{c-a+5}-\sqrt{(6-a)+2\sqrt{c-a+5}}\right)\right]\cdot$$
$$\left[x^2+\left(-2-\sqrt{(6-a)+2\sqrt{c-a+5}}\right)x+\left(1+\sqrt{c-a+5}+\sqrt{(6-a)+2\sqrt{c-a+5}}\right)\right]$$。

範例》

1. 實係數四次多項式$x^4-4x^3+ax^2+(8-2a)x+c$
   取$a=2$，$c=4$時，$x^4-4x^3+2x^2+4x+4$即為白努利所舉的例子。
   利用結論的分解公式
   $x^4-4x^3+2x^2+4x+4$
   $$=\left[x^2+\left(-2+\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1+\sqrt{7}-\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)\right]\cdot$$
   $$\left[x^2+\left(-2-\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1+\sqrt{7}+\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)\right]$$。
2. 實係數四次多項式$x^4-4x^3+ax^2+(8-2a)x+c$
   取$a=3$，$c=7$
   利用結論的分解公式
   $x^4-4x^3+3x^2+2x+7=\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2-5x+7\right)$。

3. 實係數四次多項式 $x^4-4x^3+ax^2+(8-2a)x+c$ ，
取 $a=5$ ， $c=16$ ，
利用結論的分解公式

$$x^4-4x^3+5x^2-2x+16=\left(x^2+x+2\right)\cdot\left(x^2-5x+8\right)$$ 。

4. 實係數四次多項式 $x^4-4x^3+ax^2+(8-2a)x+c$ ，
取 $a=1$ ， $c=7$ ，
利用結論的分解公式

$$\begin{aligned}
&x^4-4x^3+x^2+6x+7\\
&=\left[x^2+\left(-2+\sqrt{(6-1)+2\sqrt{7-1+5}}\right)x+\left(1+\sqrt{7-1+5}-\sqrt{(6-1)+2\sqrt{7-1+5}}\right)\right]\cdot\\
&\quad\left[x^2+\left(-2-\sqrt{(6-1)+2\sqrt{7-1+5}}\right)x+\left(1+\sqrt{7-1+5}+\sqrt{(6-1)+2\sqrt{7-1+5}}\right)\right]\\
&=\left[x^2+\left(-2+\sqrt{5+2\sqrt{11}}\right)x+\left(1+\sqrt{11}-\sqrt{5+2\sqrt{11}}\right)\right]\cdot\\
&\quad\left[x^2+\left(-2-\sqrt{5+2\sqrt{11}}\right)x+\left(1+\sqrt{11}+\sqrt{5+2\sqrt{11}}\right)\right]
\end{aligned}$$ 。

附記》

底下為白努利所舉的例子 $x^4-4x^3+2x^2+4x+4$ 的另一種分解方法。

解： $x^4-4x^3+2x^2+4x+4$

$$\begin{aligned}
&=\left(x^4-4x^3+6x^2-4x+1\right)+\left(-4x^2+8x-4\right)+7\\
&=(x-1)^4-4(x-1)^2+7\\
&=\left[(x-1)^2-2-\sqrt{3}i\right]\cdot\left[(x-1)^2-2+\sqrt{3}i\right]\\
&=\left\{\left[(x-1)-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{2}}i\right)\right]\cdot\left[(x-1)-\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{2}}i\right)\right]\right\}\cdot\\
&\quad\left\{\left[(x-1)-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{2}}i\right)\right]\cdot\left[(x-1)-\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{2}}i\right)\right]\right\}\\
&=\left\{\left[x-\left(1+\frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2}+\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(1-\frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2}-\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2}i\right)\right]\right\}\cdot\\
&\quad\left\{\left[x-\left(1+\frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2}-\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(1-\frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2}+\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2}i\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$=\left\{\left[x-\left(1+\frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2}+\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(1+\frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2}-\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2}i\right)\right]\right\}\cdot$$

$$\left\{\left[x-\left(1-\frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2}-\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(1-\frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2}+\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2}i\right)\right]\right\}$$

$$=\left[x^2+\left(-2-\sqrt{2\sqrt{7}+4}\right)x+\left(1+\frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2}\right)^2\right]\cdot$$

$$\left[x^2+\left(-2+\sqrt{2\sqrt{7}+4}\right)x+\left(1-\frac{\sqrt{2\sqrt{7}+4}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-4}}{2}\right)^2\right]$$

$$=\left[x^2+\left(-2-\sqrt{2\sqrt{7}+4}\right)x+\left(1+\sqrt{2\sqrt{7}+4}+\sqrt{7}\right)\right]\cdot$$

$$\left[x^2+\left(-2+\sqrt{2\sqrt{7}+4}\right)x+\left(1-\sqrt{2\sqrt{7}+4}+\sqrt{7}\right)\right]。$$

從組合意義來看一道競賽試題

吳孝仁、賴政泓／臺北市政大附中、陳憲儀／臺中市豐原高中

一、前言》

教育部 101 學年度高級中學數學競賽的臺中區複賽試題（一）有著這樣一道問題：

考慮由n個 0，1 組成且 01 剛好出現m次的數字串（如 10110101 是由 8 個 0，1 組成，且 01 剛好出現 3 次的數字串）。令 $f(n,m)$ 為所有這種數字串個數，證明：

$$f(n,m)=\binom{n+1}{2m+1}$$

我們簡單的瀏覽一下解答的做法：

令 $f_i(n,m)$ 為這種字串中尾數為 $i=0$，1 的個數。則我們有遞迴關係

$$f_0(n,m)=f_0(n-1,m)+f_1(n-1,m)\cdots\cdots\ (1)$$
$$f_1(n,m)=f_0(n-1,m-1)+f_1(n-1,m)\cdots\cdots\ (2)$$

要解出這個遞迴關係應該是不容易的！但是，我們倒是可以觀察出來 $f_0(n,m)=f(n-1,m)$。所以藉由題意順藤摸瓜我們可以「猜」出

$$f_0(n,m)=f(n-1,m)=\binom{n}{2m+1},$$

藉由(1)逆推又可「猜」出

$$f_1(n,m)=f_0(n+1,m)-f_0(n,m)=\binom{n+1}{2m+1}-\binom{n}{2m+1}=\binom{n}{2m},$$

接下來利用遞迴關係(1)，(2)兩式，對$m+n$做數學歸納法證明猜測正確。所以

$$f(n,m)=f_0(n,m)+f_1(n,m)=\binom{n}{2m+1}+\binom{n}{2m}=\binom{n+1}{2m+1},$$

證明完畢。

我們覺得這原先是很有意思的一個計數問題，但是最後處理的方法卻落入單純的數學歸納法來證明是有點可惜的一件事，特別是藉由題意在猜測 $f_0(n,m)$ 這一項讓我們覺得有點倒果為因。所以這篇文章目的在把這個計數問題賦予一個組合模型，然後直接在這個模型上計數來處理原本的問題。

計數方法千變萬化，甚至涉及高等數學領域。本文方法絕非最佳，只能算是與夥伴討論出來的心得，願分享給各位先進作為深入教學或概念連結的素材。

二、重複組合模型》

有k個相同的物品（k個 0）分給$m+1$人，方法有H_k^{m+1}，這是重複組合模型。但是在實際的計數上，我們準備了m根相同的隔棒（m個 1），將所有分法與k個 0，m個 1 排列做一對一對應。m根棒子隔出了$m+1$個間隔，棒子與棒子之間 0 的數目依序為第 1 人，第 2 人，…第$m+1$人所分到的物品數目。所以

$$H_k^{m+1}=(k\text{ 個0, }m\text{ 個1排列數})=\mathrm{C}_k^{m+k}\text{ ，}$$

以上是我們熟悉的。當然附帶許多變形的問題，例如：如果每個人至少分到 1 個物品（$k\geq m+1$），那就每人先發 1 個 0，剩下$k-m-1$個 0 再分。所以分法有H_{k-m-1}^{m+1}。

三、分析》

注意到在原來的問題裡：001100110101 我們可以看成 6 個 0 分給 7 個人（1，2，⋯ 6，7 號），恰好 1，3，5，6 號有拿到，依題意字串也恰好出現 4 對 01。而 110000100111 則是 3，4 號有拿到，而字串出現 2 對 01。

但是觀察 110001001110 卻出了點意外，字串出現 2 對 01，卻是 3，4，7 號有拿到。7 號的舉動似乎打破我們想要建立的對應關係，為此，我們編個故事。把 6 個 0 只分給 7 個人當中的 3 個，而且 7 號一定要是其中一個，另外 2 個人一定要分到，但是 7 號不一定要分到。這個模型恰好與 6 個 0，6 個 1 所組成的字串且出現 2 次 01 一對一對應。因此 6 個 0，6 個 1 所組成的字串且出現 2 次 01 的個數為

$$C_2^6\times H_{6-2}^3=225\text{ 。}$$

現在，由n個 0，1 組成且 01 剛好出現m次的字串，我們假設有k個 0，$n-k$個 1。因為 01 出現了m次，所以$k\geq m$，$n-k\geq m$即$m\leq k\leq n-m$。由上述的分析知道：

k個 0，$n-k$個 1 所組成的字串且出現m次 01 的個數

$=k$個 0 只分給$n-k+1$個人當中的$m+1$個，而且第$n-k+1$人
一定要是其中一個，另外m個人一定要分到，但是
第$n-k+1$人不一定要分到的方法數

$=C_m^{n-k}\times H_{k-m}^{m+1}=C_m^{n-k}\times C_m^k$

接著，我們讓足碼k從m取到$n-m$，於是得到$f(n,m)=\sum_{k=m}^{n-m}C_m^k\times C_m^{n-k}\cdots\cdots(3)$

四、證明組合等式 $\sum_{k=m}^{n-m}C_m^k\times C_m^{n-k}=C_{2m+1}^{n+1}\cdots\cdots(\#)$》

雖然賦予了組合上的意義，但是原來的計數公式似乎被我們複雜化了。在驗證過幾個具體數據後，(#)是正確的。所以接下來的目的就是證明(#)。我們採用「殊途同歸」的方式來證明：

考慮對角頂點在$A(-1,0)$，$B(2m,n-2m)$的矩形，從A走捷徑到B的方法有

$$C_{2m+1}^{2m+1+n-2m}=C_{2m+1}^{n+1}\text{ ，}$$

另外一方面，任何一條捷徑走法恰與鉛直線$L:x=m-\dfrac{1}{2}$交於一點，交點為

$$P_0\left(m-\frac{1}{2},0\right),\quad P_1\left(m-\frac{1}{2},1\right),\quad \cdots,\quad P_{n-2m}\left(m-\frac{1}{2},n-2m\right)\text{，}$$

而與 L 交點在 $P_i\left(m-\frac{1}{2},i\right)$ 的捷徑恰好是從 $A(-1,0)$ 到 $A_i(m-1,i)$ 的捷徑，右移 1 單位到 $B_i(m,i)$，再從 $B_i(m,i)$ 走捷徑到 $B(2m,n-2m)$。

所以與 L 交點在 $P_i\left(m-\frac{1}{2},i\right)$ 的捷徑數目為

$$C_m^{i+m}\times C_m^{n-m-i}\text{，}$$

我們讓足碼 i 從 0 取到 $n-2m$ 便得到 A 到 B 的所有捷徑數目為

$$\begin{aligned}&C_m^m\times C_m^{n-m}+C_m^{m+1}\times C_m^{n-m-1}+\cdots+C_m^{n-m-1}\times C_m^{m+1}+C_m^{n-m}\times C_m^m\\&=\sum_{k=m}^{n-m}C_m^k\times C_m^{n-k}\text{，}\end{aligned}$$

從而證明(#)。

五、評註》

在探索問題的過程中我們得到(3)，看起來似乎把問題複雜化。回頭來看才發現級數裡每一項 $C_m^{n-k}\times H_{k-m}^{m+1}=C_m^{n-k}\times C_m^k$ 可將問題的部分情形對應到我們熟悉的模型上，加總後完成計數 $f(n,m)=\sum_{k=m}^{n-m}C_m^k\times C_m^{n-k}$。而組合等式(#)本身就可以獨立成一個命題，藉由建構適合的走捷徑模型，讓我們省去繁複的代數運算並且得到更簡潔的形式。

行文至此，我想起我的高中老師在教授排列組合的時候說過的一句話：「算排列組合的時候，有的時候就好像在編故事。編一個好的故事，題目就會變得很簡單。」現在回來看，其實談的是對應（bijection）這個概念，這真是點出了高中排列組合的精華了。

最後，我們很好奇是否有更好、更簡潔的模型來對應這個計數問題？如果有，那肯定是個更美的故事了！也請不吝說給我們聽。期待與您交流 Cantor0968@gmail.com。

國立臺灣師範大學數學系
104學年度大學甄選入學指定項目甄試試題

筆試一、計算證明題（考試時間：2 小時）

1. (1) 已知多項式 $x^4-4x^3+22x^2-36x+81$ 是多項式 $f(x)$ 的完全平方，求多項式 $f(x)$ 。（10 分）

   (2) 找出讓
$$n^4-4n^3+22n^2-36n-326$$
是完全平方數的所有可能的整數 n 。（10 分）

2. 證明：對所有的正整數 n ，不等式
$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\le 3-\frac{1}{n}$$
恆成立。（20 分）

3. 設有 34 個均不為 0 的相異實數，其中正數有 p 個、負數有 q 個。已知從這 34 個數中任取相異三數的乘積為正數的機率是 $\frac{1}{2}$ 。

   (1) 試證：$C_3^p+pC_2^q=C_3^q+qC_2^p$ 。（其中 $C_k^m=\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ 表組合數）（10 分）

   (2) 試求出所有可能的數對 (p,q) 。（10 分）

4. 設三角形 ABC 的面積為 S ，$\overline{BC}=a$ ，$\overline{CA}=b$ ，$\overline{AB}=c$ ，且對應於頂點 A ，B ，C 的中線長為 m_a ，m_b ，m_c 。

   (1) 證明：$a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{2}{\sqrt{3}}(am_a+bm_b+cm_c)$。（10 分）

   (2) 證明：$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$ 。（10 分）

5. 已知滿足方程組 $\begin{cases}x+y+z=8\\ax+2y+6z=20\\x-2y+bz=-13\end{cases}$ 的 (x,y,z) 為空間中的一條直線 L 。

   (1) 試求 a 與 b 之值。（10 分）

   (2) 給定空間 $A(1,6,-1)$ 、 $B(2,6,0)$ 兩點，於直線 L 上取 C 、 D 兩點使得 $ABCD$ 恰為正四面體的四個頂點。試求 C 、 D 兩點的坐標。（10 分）

筆試二、填充題（考試時間：1.5 小時）

1. 甲、乙、丙和其他七人圍圓桌而坐，甲、乙、丙三人兩兩不相鄰之機率為多少？
2. 設資料 $X=(-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4)$ ，而 $i=1$ ，2，3，4 時，資料 $Y_i=((-4)^i,(-3)^i,(-2)^i,(-1)^i,0^i,1^i,2^i,3^i,4^i)$ 。令 r_i 代表資料 X 和資料 Y_i 的相關係數，$i=1$，2，3，4。請寫出 r_1 ，r_2 ，r_3 與 r_4 的大小關係（例如 $r_1<r_2=r_3<r_4$ 或 $r_4<r_3<r_2<r_1$ ）。
3. 三位數中數字不重複且為 15 的倍數共有多少個？

4. 同時滿足下列條件的五次多項式共有幾個？

(a) x^5 項的係數為 1，其他係數為實數；

(b) 有 5 個相異根；

(c) 所有根都在集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i, i, -i\}$ 中，其中 $i=\sqrt{-1}$ 。

5. 橢圓 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ 上的點到直線 $y=\frac{1}{3}x-5$ 之最短距離為何？

6. 設平面上兩直線 L_1 ： $x+7y-2=0$ 與 L_2 ： $2x-y-4=0$ 相交於 P 點。若圓 C 通過 P 點且分別與直線 L_1 和 L_2 相交於 $A(9,-1)$ 和 $B(0,-4)$ 兩點，則所有位於圓 C 內部，且坐標皆為整數的點，共有多少個？

7. 已知 $\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{\pi}{4}$ ， $\sin(4\theta)=\frac{3}{5}$ ，且 $G=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ ，則 G^8 的反矩陣為何？

8. 已知空間中一平面通過 $\left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$ 和 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ 兩點，且與直線

$$\begin{cases} x=\frac{26}{3}-\frac{2}{3}t, \\ y=-6-2t, \qquad t\text{ 為實數，} \\ z=4+t, \end{cases}$$

平行。若此平面的法向量與 z -軸的夾角為 θ ，則 $\sin\theta$ 之值為何？

9. 已知常數 $a>1$ ，求函數 $f(x)=2a(\sin x+\cos x)-\sin x\cos x-2a^2$ 的最大值為多少？

10. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長滿足 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3\overline{AB}^2$ ，求 $\sin C$ 的最大值。

解析

筆試一、計算證明題

1. (1) 經過比較係數，可配得

$$x^4-4x^3+22x^2-36x+81=(x^2-2x+9)^2\text{，}$$

因此

$$f(x)=\pm(x^2-2x+9)\text{。}$$

(2) 設

$$n^4-4n^3+22n^2-36n-326=k^2\text{，}$$

得

$$(n^2-4n^3+22n^2-36n+81)-407=k^2\text{，}$$

即

$$(n^2-2n+9)^2-k^2=407=11\times 37\text{。}$$

再因式分解，得

$$\Big((n^2-2n+9)-k\Big)\Big((n^2-2n+9)+k\Big)=1\times 407\text{ 或 }11\times 37\text{，}$$

解得

$$n^2-2n+9=\frac{1+407}{2}\text{ 或 }\frac{11+37}{2}\text{，}$$

即 $n^2-2n+9=204$ 或 24，解此二次方程式，得

$$n=15\text{，}-13\text{，}5\text{ 或 }-3\text{。}$$

經驗算均合，故答案為

$$n=-13\text{，}-3\text{，}5\text{ 或 }15\text{。}$$

2. 設 $A(k)=(1+1^{-3})(1+2^{-3})(1+3^{-3})\cdots(1+k^{-3})$，明顯地 $A(1)=2\le 3-\frac{1}{1}$。

假設 $n=k$ 時，不等式 $A(k)\le 3-\frac{1}{k}$ 成立。

當 $n=k+1$ 時，我們有

$$A(k+1)=A(k)(1+(k+1)^{-3})\le\left(3-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{(k+1)^3+1}{(k+1)^3}\right)\text{。}$$

因為 $\left(3-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{(k+1)^3+1}{(k+1)^3}\right)=3-\frac{k^3+3k^2+2}{k(k+1)^3}$，又由 $k^2-k+2\ge 0$ 知分子

$k^3+3k^2+2\ge k(k+1)^2$，所以 $A(k+1)\le 3-\frac{1}{k+1}$。

由數學歸納法，本題得證。

3. (1) 從 34 個數中任取相異三數的取法有 C_3^{34} 種。取出三數的乘積為正數的情況可分兩類：三正數或一正兩負，其取法分別為 C_3^p，pC_2^q 種。

因此，取出三數的乘積為正數的取法有 $C_3^p + pC_2^q$ 種，又三數乘積為正數的機率是 $\frac{1}{2}$ ，故

$$\frac{C_3^p + pC_2^q}{C_3^{34}} = \frac{1}{2} \text{ 。}$$

同理，取出三數的乘積為負數的情況可分兩類：三負數或一負兩正；取法有 $C_3^q + qC_2^p$ 種，而三數乘積為負數的機率也是 $\frac{1}{2}$ ，故

$$\frac{C_3^q + qC_2^p}{C_3^{34}} = \frac{1}{2} \text{ 。}$$

綜合上述可得

$$C_3^p + pC_2^q = C_3^q + qC_2^p = \frac{C_3^{34}}{2} = 2992 \cdots\cdots ①$$

故得證

$$C_3^p + pC_2^q = C_3^q + qC_2^p \text{ 。}$$

(2) 由 $p+q=34$ 得 $q=34-p$ ，代入①式，化簡可得到以下方程式

$$p^3 - 51p^2 + 842p - 4488 = 0 \text{ 。}$$

由 $p=q=17$ 是顯然的解得知：上式有 $p-17$ 的因式，故可分解為

$$(p-17)(p^2 - 34p + 264) = 0 \text{ ，}$$

即

$$(p-17)(p-12)(p-22) = 0 \text{ 。}$$

而當 $p=12$ 時， $q=22$ ；當 $p=22$ 時， $q=12$ 。故可能的數對 (p,q) 為 $(17,17)$ ， $(12,22)$ ， $(22,12)$ 。

4. (1) 利用柯西不等式，得不等式

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2\right) \ge \left(am_a + bm_b + cm_c\right)^2 \text{ 。}$$

利用中線定理公式，可分別得

$a^2 + \left(2m_a\right)^2 = 2b^2 + 2c^2$ ，即 $m_a{}^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$ ；

$b^2 + \left(2m_b\right)^2 = 2a^2 + 2c^2$ ，即 $m_b{}^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}$ ；

$c^2 + \left(2m_c\right)^2 = 2a^2 + 2b^2$ ，即 $m_c{}^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$ 。

因此

$$\begin{aligned} m_a{}^2 + m_b{}^2 + m_c{}^2 &= \left(\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}\right) + \left(\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}\right) + \left(\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}\right) \\ &= \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4} \text{ 。} \end{aligned}$$

代入上述柯西不等式，得

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}\right)\geq\left(am_a+bm_b+cm_c\right)^2 \text{，}$$

即

$$\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq\left(am_a+bm_b+cm_c\right)^2 \text{。}$$

故

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\left(am_a+bm_b+cm_c\right) \text{，}$$

得證。

(2) 設 h_a，h_b，h_c 為三相應的高，有 $a=\dfrac{2S}{h_a}$，$b=\dfrac{2S}{h_b}$，$c=\dfrac{2S}{h_c}$，代入(1)的不等式，得到

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\right)S \text{。}$$

又因為 $h_a\leq m_a$，$h_b\leq m_b$，$h_c\leq m_c$，所以 $\dfrac{m_a}{h_a}+\dfrac{m_b}{h_b}+\dfrac{m_c}{h_c}\geq 3$，代入上述不等式

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{4S}{\sqrt{3}}\left(\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\right)\geq\frac{4S}{\sqrt{3}}\cdot 3=4\sqrt{3}S \text{，}$$

得證。

5. (1) 因為 $\begin{cases}x+y+z=8\\ax+2y+6z=20\\x-2y+bz=-13\end{cases}$ 為一直線，所以 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$。

由 $\Delta_x=\begin{vmatrix}8&1&1\\20&2&6\\-13&-2&b\end{vmatrix}=0$，得 $(16b-78-40)-(-96+20b-26)=0$，即 $b=1$。

再由 $\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&8\\a&2&20\\1&-2&-13\end{vmatrix}=0$，得 $(-26+20-16a)-(-40-13a+16)=0$，即 $a=6$。

將 $a=6$，$b=1$ 代入 Δ，得

$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\6&2&6\\1&-2&1\end{vmatrix}=0$，即 $(2+6-12)-(-12+6+2)=0$（合）。

故 $a=6$，$b=1$。

(2) 因為 $\begin{cases}x+y+z=8\\6x+2y+6z=20\\x-2y+z=-13\end{cases}$ 為直線 L，所以 $L:\begin{cases}x=1-t\\y=7\\z=t\end{cases}$ （t 為整數）。

在 L 上取點 $C(1-t_1,7,t_1)$，點 $D(1-t_2,7,t_2)$ 兩點，使得 $ABCD$ 為正四面體。

因為 $\sqrt{(1-t_1-1)^2+(7-6)^2+(t_1-(-1))^2}=\sqrt{(1-2)^2+(6-6)^2+(-1-0)^2}$，所以

$\sqrt{t_1^{\,2}+1+t_1^{\,2}+2t_1+1}=\sqrt{2}$ ，即 $2t_1^{\,2}+2t_1=0$ ，解得 $t_1=-1$ 或 0 。

同理，可知 $t_2=-1$ 或 0 。

當 $C=(2,7,-1)$ 時， $D=(1,7,0)$ ；當 $C=(1,7,0)$ 時， $D=(2,7,-1)$ 。

故所求兩點為 $(2,7,-1)$ 與 $(1,7,0)$ 。

筆試二、填充題

1. 先利用排容原理求出發生的可能數，所有可能扣掉任兩人相鄰再加上三人相鄰，即

$n(A)=\dfrac{10!}{10}-\dfrac{9!}{9}\times C_2^3\times 2!+\dfrac{8!}{8}\times 3!$，故機率為

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\dfrac{10!}{10}-\dfrac{9!}{9}\times C_2^3\times 2!+\dfrac{8!}{8}\times 3!}{\dfrac{10\,!}{10}}=\frac{5}{12}\text{ 。}$$

2. 由題目可知：是要繪出 $Y_1=X$ ， $Y_2=X^2$ ， $Y_3=X^3$ ， $Y_4=X^4$ 的圖形，
因為 $Y_1=X$ 的散布圖為斜率是 1 的斜直線，所以
$$r_1=1\text{ ，}$$
又因為 $Y_3=X^3$ 的圖形皆在第一、三象限，所以
$$0<r_3<1\text{ ，}$$
再因為 $Y_2=X^2,Y_4=X^4$ 的圖形為對稱 y 軸的圖形，所以
$$r_2=r_4=0\text{ 。}$$
由此可知
$$r_2=r_4<r_3<r_1\text{ 。}$$

3. 因為此三位數是 15 的倍數，所以是 3 的倍數以及 5 的倍數。因為是 5 的倍數，所以個位數會是 0 或是 5，又要是 3 的倍數，所以各個位數的和也會是 3 的倍數。
將 0 到 9 的數字利用除以 3 的餘數分成 3 類：$\{0,3,6,9\}\{1,4,7\}\{2,5,8\}$ ，如果要是 3 的倍數，那麼有兩種可能：
①分類取一個數字
②同一個分類取 3 個數字。
用個位數為 0 或 5，以及上面分類討論如下：
(1) 當個位數為 0 時：
第①種取法有 $C_1^3\times C_1^3\times 2!$ 個，第②種取法有 $C_2^3\times 2!$ 個，兩種有 24 個。

(2) 當個位數為 5 時：
第①種取法因為百位數不可以是 0，所以如果有取到 0，則有 3 個，如果沒有取到 0，那麼有 $C_1^3\times C_1^3\times 2!$ ，第②種取法有 $C_2^2\times 2!$ ，兩種有 23 個。
綜合(1)(2)，總共有 47 個。

4. 因為題目說五次多項式的係數皆為實數，所以如果有虛根，由虛根成對定理可知：必須有另一個共軛的根，再將所有根的集合再分成以下兩集合：

$\{0,1,2,3,4,5\}\{1+i,1-i,-1+i,-1-i,i,-i\}$

分情況討論五次多項式的根，狀況如下：

(1) 沒有虛根：$C_5^6=6$。

(2) 2 個虛根：$C_3^6\times C_1^3=20\times 3=60$。

(3) 4 個虛根：$C_1^6\times C_2^3=6\times 3=18$。

綜合(1)(2)(3)，總共有 84 個。

5. 假設橢圓上的點 P 座標為 $(2\cos\theta,\sin\theta)$，又 $L:x-3y-15=0$，利用點到直線的距離公式可知：

$$d(P,L)=\frac{|2\cos\theta-3\sin\theta-15|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|2\cos\theta-3\sin\theta-15|}{\sqrt{10}}\text{。}$$

因為 $2\cos\theta-3\sin\theta=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos\theta-\frac{3}{\sqrt{13}}\sin\theta\right)=\sqrt{13}\sin(\phi-\theta)$，其中

$\sin\phi=\frac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\phi=\frac{3}{\sqrt{13}}$，又因為 $-1\le\sin(\phi-\theta)\le 1$，所以

$$-\sqrt{13}\le 2\cos\theta-3\sin\theta\le\sqrt{13}\text{。}$$

由此可知：當 $2\cos\theta-3\sin\theta=\sqrt{13}$ 時，$d(P,L)$ 有最小值 $\frac{15-\sqrt{13}}{\sqrt{10}}$。

6. 首先可利用 L_1 與 L_2 相交，求出 P 點的坐標：$\begin{cases}x+7y-2=0\\2x-y-4=0\end{cases}\Rightarrow P(2,0)$，再利用 $A(9,-1)$，$B(0,-4)$，$P(2,0)$ 三點皆在圓上，找出圓的方程式。

$\overline{AP}$ 中垂線：$7x-y-39=0$，$\overline{BP}$ 中垂線：$x+2y+3=0$，將交點找出，即為圓心 O 坐標：

$\begin{cases}7x-y-39=0\\x+2y+3=0\end{cases}\Rightarrow O(5,-4)$，而半徑為 $\overline{AO}=5$，所以圓 C 的方程式為 $(x-5)^2+(y+4)^2=25$。

因為要位於圓 C 的內部，又要坐標為整數，所以即求 $(x-5)^2+(y+4)^2<25$ 的整數解。

分情況討論狀況如下：

(1) $x=5$：$(y+4)^2<25\Rightarrow -5<y+4<5\Rightarrow -9<y<1$，

$y=-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0$，共有 9 個解。

(2) $x=6$：$(y+4)^2<24\Rightarrow -\sqrt{24}<y+4<\sqrt{24}\Rightarrow -4-\sqrt{24}<y<-4+\sqrt{24}$，

$y=-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0$，共有 9 個解。

(3) $x=7$：$(y+4)^2<21\Rightarrow -\sqrt{21}<y+4<\sqrt{21}\Rightarrow -4-\sqrt{21}<y<-4+\sqrt{21}$，

$y=-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0$，共有 9 個解。

(4) $x=8$ ：$(y+4)^2<16\Rightarrow -4<y+4<4\Rightarrow -8<y<0$ ，

$y=-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1$ ，共有 7 個解。

(5) $x=9$ ：$(y+4)^2<9\Rightarrow -3<y+4<3\Rightarrow -7<y<-1$ ，

$y=-6,-5,-4,-3,-2$ ，共有 5 個解。

(6) 而 $x=4$ 與 $x=6$ 的情形相同，同理，$x=3$ 與 $x=7$ 、$x=2$ 與 $x=8$ 、$x=1$ 與 $x=9$ 的情形都相同。

綜合以上，共有 $2\times(5+7+9+9)+9=69$ 個。

7. 因為 $G=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}$ ，所以 G 為旋轉 $(-\theta)$ 的旋轉矩陣，而 G^8 的反矩陣即為旋轉 8θ 的旋轉矩陣。

因為 $\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{\pi}{4}$ ，所以 $\frac{\pi}{2}<4\theta<\pi$ ，又因為 $\sin(4\theta)=\frac{3}{5}$ ，所以 $\cos(4\theta)=-\frac{4}{5}$ 。由此可知

$$\begin{aligned}G^{-8}&=\begin{bmatrix}\cos(8\theta) & -\sin(8\theta)\\ \sin(8\theta) & \cos(8\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2(4\theta) & -\sin 2(4\theta)\\ \sin 2(4\theta) & \cos 2(4\theta)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2\cos^2(4\theta)-1 & -2\cos(4\theta)\sin(4\theta)\\ 2\cos(4\theta)\sin(4\theta) & 2\cos^2(4\theta)-1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2\times\frac{16}{25}-1 & -2\times\frac{-4}{5}\times\frac{3}{5}\\ 2\times\frac{-4}{5}\times\frac{3}{5} & 2\times\frac{16}{25}-1\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}7 & 24\\ -24 & 7\end{bmatrix}\text{。}\end{aligned}$$

8. 因為平面上有 $A\left(\frac{2}{3},2,0\right)$ ，$B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ 兩點，所以平面的法向量與 $\overrightarrow{AB}$ 垂直，又因為平面與直線平行，所以平面的法向量與直線的方向向量垂直，利用外積將法向量求出：

$$\overrightarrow{n}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3},-2,1\right)=\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{9},-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{18}(3,2,6)\text{ 。}$$

而 z -軸的方向向量為 $(0,0,\pm1)$ ，所以 $\cos\theta=\frac{(3,2,6)\cdot(0,0,\pm1)}{7\cdot 1}=\pm\frac{6}{7}$ ，又因為 $0<\theta<\pi$ ，所以 $\sin\theta=\frac{\sqrt{13}}{7}$ 。

9. 假設 $t=\sin x+\cos x$ ，則 $t=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ，因為 $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$ ，所以 $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ 。

因為 $t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$ ，所以 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}(t^2-1)$ ，將原式用 $t=\sin x+\cos x$ 替換，整理得

$$\begin{aligned} f(t)&=2at-\frac{1}{2}(t^2-1)-2a^2\\ &=-\frac{1}{2}t^2+2at-2a^2+\frac{1}{2}\\ &=-\frac{1}{2}(t-2a)^2+\frac{1}{2}\text{，}\end{aligned}$$

由此可知，當 $t=2a>2$ 時有最大值，但因為 $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ ，所以當 $t=\sqrt{2}$ 時有最大值，最大值為 $-2a^2+2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$ 。

10. 假設 $a=\overline{BC}$ ，$b=\overline{AC}$ ，$c=\overline{AB}$ ，由餘弦定理可知，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(a^2+b^2)-\frac{1}{3}(a^2+b^2)}{2ab}=\frac{\frac{2}{3}(a^2+b^2)}{2ab}\cdots\cdots①$$

又由算幾不等式可知：$\frac{a^2+b^2}{2}\ge\sqrt{a^2b^2}=ab$ ，所以 $a^2+b^2\ge 2ab$ ，代入①式可得，

$$\cos C=\frac{\frac{2}{3}(a^2+b^2)}{2ab}\ge\frac{\frac{4}{3}ab}{2ab}=\frac{2}{3}\text{，}$$

又因為 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$ ，所以

$$\sin^2 C=1-\cos^2 C\le 1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\text{，}$$

即 $\sin C$ 有最大值 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 。

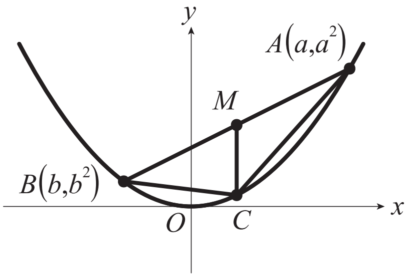
專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 105

☆☆☆☆☆

如下圖所示，A 與 B 是拋物線 $y=x^2$ 上的兩點，M 是 AB 弦中點，而過 M 點的鉛直線與拋物線相交於 C 點：



(1) 求拋物線上過 C 點的切線方程式，並驗證此切線與直線 AB 平行。

(2) 計算三角形 ABC 的面積。

(3) 利用積分計算拋物線與弦 AB 所圍的區域面積（稱此面積為拋物線弓形面積）。

(4) 證明：弦 AB 所對應的拋物線弓形面積與三角形 ABC 的面積比為 4：3。

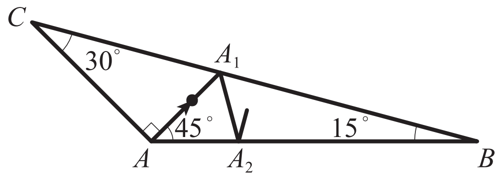
〔玩鎖・玩索〕

這就是阿基米德利用他創的窮盡法求得拋物線弓形面積的大致過程。這裡的結果不僅對拋物線 $y=x^2$ 成立，對其他拋物線也都適用。

遊戲 106

☆☆

下圖中，ABC 是一個三角形的球檯，一顆球從 A 點與邊 AC 垂直的方向撞出。若球依入射角等於反射角的物理規律在三角形的球檯內不停的跑動，且令 A_n 是該球第 n 次碰撞到三角形邊上的點，則描述 A_n 的規律。



〔玩鎖・玩索〕

將前幾次碰到邊的入射角大小算出來，觀察其角度關係，就會發現規則。

遊戲 107

☆☆☆☆☆

(1) 試利用數學歸納法證明：對每個大於 1 的整數 n，恆有

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\cdots\sqrt{n}}}}}<\frac{3}{\sqrt[2^{n-1}]{n+2}}。$$

請注意：上式右端的分母是 $n+2$ 的正 2^{n-1} 次方根。

(2) 試證：對每個大於 1 的整數 n，恆有

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\cdots\sqrt{n}}}}}<3。$$

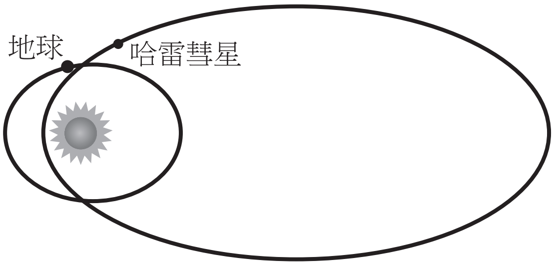
〔玩鎖・玩索〕

本問題出自 100 年度師大數學系推甄試題，它是一道不等式形式的數學歸納法證明題。

遊戲 108

☆☆☆

愛德蒙・哈雷在他的好朋友艾薩克・牛頓的協助之下，成功地計算出一顆彗星（就是有名的哈雷彗星）將於 1758 年光臨地球，而且這是它在第十八世紀唯一的一次光臨，同時他們也算出下世紀也僅會光臨一次。



如果哈雷彗星的週期 P 剛好是整數年，而且第十八世紀是指西元 1701 年至西元 1800 年，那麼考慮以下四個問題：

(1) 根據上述資料推論 $P \geq 72$ 。

(2) 中國的天文學家，在第十七世紀裡，一共觀測到哈雷彗星光臨地球兩次。試據此推論 $P \leq 78$ 。

(3) 事實上，中國的天文學家早已注意哈雷彗星很久，翻開歷史記錄得知：此顆彗星在第十四世紀也是光臨地球兩次；但是在第十一及十二世紀時，哈雷彗星分別僅光臨地球一次而已。你是否能根據這些資料，列舉出哪些從(1)及(2)所得到的 P 值是不合的，並算出哈雷彗星的真正週期？

(4) 西元幾年哈雷彗星才會再度光臨地球？

〔玩鎖・玩索〕

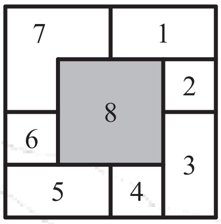
中國南北朝數學家祖沖之說：「遲疾之律，非出神怪，有形可檢，有數可推。」大意是說：「天體運行的規律，不是什麼神怪、不可捉摸的東西，而是有形體可供觀察檢驗，且有數據可以計算推測的。」天體（太陽、地球、彗星等）運行是有週期性的，而且可以量化，並用科學方法得到的！有關哈雷彗星最先和最完備的紀錄皆來自中國，據朱文鑫《天文考古錄》考證：自秦始皇七年（公元前 240 年）至清宣統二年（1910 年）共有 29 次記錄，並符合計算結果。

直線是最容易瞭解的幾何圖形，在直線上面刻記或畫點就變成了代數的數線。有了可以記錄的數線之後，人類的歷史可以在上面有相對應的點，星體運行時間表也可以記錄在這條無止盡的數線上。人一生中的酸甜苦辣可以用立體的臉部皺紋寫實，亦可用平面的日記來描述，但也可以讓它簡單的刻畫在生命的這條一維數線上。善用數線上的一些關鍵點，可以讓我們省事不少。

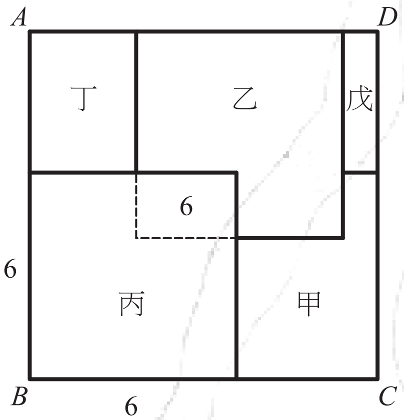
動手玩數學~破解祕笈 第26期

遊戲 101

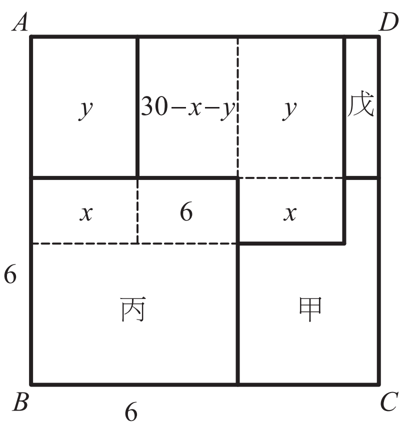
依數字從小到大將正方形重疊上來：



〈玩鎖・玩索〉裡的題目參考解答：從丙的面積為 36 平方公分得知，五個正方形都是邊長為 6 的正方形。如〈圖一〉所示，乙和丙重疊的長方形面積為$36-30=6$平方公分。接下來，將乙與丁被蓋住的部分用虛線呈現出來，並令從上面看到丁部分的面積為y，下方的長方形面積為x，如〈圖二〉所示。又將乙正方形向左推到邊線產生丁正方形，所以乙扣掉丁之後的兩塊面積依序為〈圖二〉所示的y與x。因為從上面看到乙部分的面積為 30，所以面積 6 上方的長方形之面積為$30-x-y$。



〈圖一〉



〈圖二〉

因為$ABCD$是正方形，所以丙正右邊的長方形面積$18+x$與丙正上方的長方形面積$y+(30-x-y)$相等，即

$$18+x=y+(30-x-y)\Rightarrow x=6\text{ 。}$$

利用比例關係，得

$$30-x-y=y\Rightarrow 2y=30-x=24\Rightarrow y=12\text{ 。}$$

因此，從上面看到丁部分的面積為 12 平方公分。

類似的方法可以推得，從上面看到戊部分的面積為 4 平方公分。事實上，不難推得，正方形$ABCD$的邊長剛好是 10 公分。

遊戲 102

碰到x軸的點都是多項式$f(x)$的實根，所以a，0.5，b都是多項式$f(x)$的實根。選項(1)正確。

又x軸與圖形相切於$(a,0)$與$(b,0)$兩點，所以$f'(a)=f'(b)=0$，即$(x-a)^2\,|\,f(x)$及$(x-b)^2\,|\,f(x)$，選項(2)(3)正確。

因為$f(x)$是五次多項式，0.5 是實數根，a與b至少二重根，所以$f(x)$的根剛好是 0.5，a（二重根）及b（二重根），選項(4)不正確。

從圖中可知$a,0,1,b$都是$f'(x)$的根，又$f'(x)$是四次多項式，所以$f'(x)$有四實數根，選項(5)正確。

當$x<a$及$x>b$時，圖形是遞增的，又$-1<a$及$b<2$，所以$f'(-1)>0$及$f'(2)>0$，選項(6)(7)正確。

當x很大時，圖形在x軸上方，所以$f(x)$的首項係數為正，選項(8)正確。

遊戲 103

因為

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^2-2\sqrt{2}\pi n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\pi-\frac{2\sqrt{2}\pi}{n}\right)=\pi$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^2+2\sqrt{2}\pi n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\pi+\frac{2\sqrt{2}\pi}{n}\right)=\pi\ ，$$

所以由夾擠定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\pi\ 。$$

遊戲 104

因為有 18 個白球，是偶數，所以這 18 個白球剛好對稱於大圓的圓心。當先玩的甲選定白球塗色時，後玩的乙就選該球對於大圓圓心的對稱球塗色。在這樣的過程中，後玩的乙肯定不會出問題。但是，遊戲可塗色的球會越來越少，遲早會有玩者違例或沒辦法選球，而這人必定是先玩的甲。所以後玩的乙只要堅守對稱原則，就會贏得遊戲。