數學素養評量試題

許志農／臺灣師大數學系

一、素養簡介

臺灣中學生近十年來無論是在 TIMSS 的數學成就測驗，或 PISA 的數學素養評量等國際評比中皆名列前茅，但是相關數據也顯示出臺灣學生在「數學正向態度」和「學習自信心」上顯著低於國際平均。這種反差現象影響的將是學生未來透過數學探索與了解世界的信心與動力。真正的數學素養不僅僅在於知識的深度，而更在於知識應用的廣度。數學素養就是一種數學眼光，一種從數學了解世界的眼光。然而要培養了解世界的數學眼光，不能只強調數學知識的工具面，還必須關心其文化面。

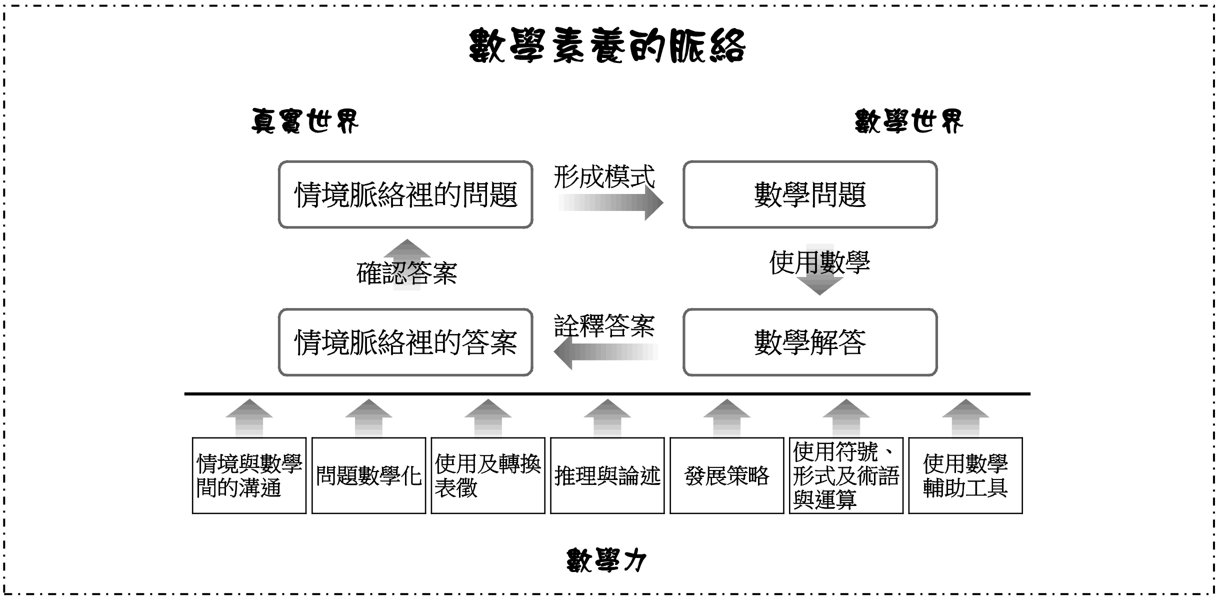
我國傳統學校教育向來相當重視「知識」的重要性，國民中小學九年一貫課程改革，則進一步強調「能力」的重要性，未來中小學的課程改革，則更宜重視「素養」的重要性。素養不是指成就，也不是指性向，而是一個人在面對各種複雜多變的情境及實際問題時，能夠靈活運用學校所學，抱持主動積極的態度及多元開放的精神，整合各種相關資訊，發揮思辨、統整、溝通與創意來解決問題的能力。

什麼是數學素養？PISA 所定義的數學素養是指個人能在多樣不同的情境之下，將情境問題轉化成數學問題、使用數學及詮釋數學的能力。這素養包括了數學推理及使用、應用數學概念、程序、事實、工具來解釋、描述及預測現象。它協助個人了解數學在世界上所扮演的角色，且能夠針對個體在生活中的需求運用或者投入數學活動，進行有根據的評斷，以成為一個具有積極態度及反思能力的國民。

以 PISA 來看，數學素養評量的目的：

1. 追蹤並報告 15 歲學生在接近中等教育結束時的數學素養水準。
2. 提供政策制定者、教育相關人員及研究人員有關學生數學素養水準跨時間成長的消息。

讓我們先用流程圖解釋數學素養脈絡，再以文字說明：



解決 PISA 情境問題的三個步驟為：

1. 將情境問題轉化成數學問題。
2. 使用數學概念、事實、步驟和推理。
3. 詮釋、應用及評鑑數學結果。

其內蘊的數學力包括底下七項：

1. 情境與數學間的溝通。
2. 問題數學化。
3. 使用及轉換表徵。
4. 推理和論述。
5. 發展策略。
6. 使用符號、形式及術語與運算。
7. 使用數學輔助工具。

另 PISA 評量試題，根據題目的情境與解題所需的數學知識作如下兩種分類：

1. 試題的情境脈絡：試題的情境脈絡應該是包含 15 歲小孩（學生）世界的一部分，且情境脈絡應包羅萬象，如

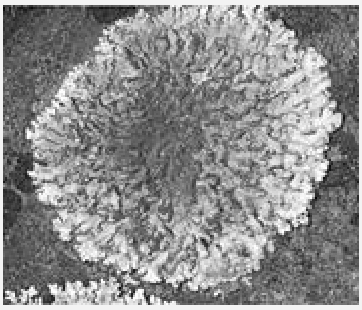
P 學生個人生活；E 教育／職業；C 社會（公民）；S 科學性的

2. 解題的數學知識：解題所需的數學知識以涉及底下四個領域為原則。

F 變化和關係；S 空間和圖形；Q 數與量；U 不確定性與數據分析

例如 PISA2006 數學樣本試題中編號 M047〈地衣〉的題目：

全球性暖化會造成一部分冰川融化的結果。約在冰川消失的 12 年後，微小的植物—地衣，會開始在岩石間生長。地衣生長的形式有如圓圈一般：



圓圈的直徑與地衣的年齡之間關係約可用下列的公式來表示：

$$d = 7.0 \times \sqrt{t-12}, t \geq 12\ ,$$

這裡的圓圈直徑 d 是以公釐為單位，而 t 表示冰後的年數。

(1) 利用公式，算出冰川消失後 16 年的地衣直徑，並寫出你的計算方法。

(2) 安安測量出某地區地衣的直徑為 35 公釐。請問在這地區的冰川是多少年前消失？並寫出你的計算方法。

〈地衣〉這道題目在數學素養分類裡，情境脈絡是科學（S），數學知識是變化和關係（F）；而根據我國國中數學課綱的能力指標是在第 3 冊第 2 章第 1 節。

數學內容	情境脈絡	解題步驟	數學力
☑ 變化和關係 ☐ 空間與圖形 ☐ 數與量 ☐ 不確定性	☐ 學生個人生活的 ☐ 教育／職業 ☐ 社會（公民） ☑ 科學性的	☑ 將情境問題轉化成數學問題 ☑ 使用數學概念、事實、步驟和推理 ☑ 詮釋、應用及評鑑數學結果	☑ 情境與數學間的溝通 ☐ 問題數學化 ☐ 使用及轉換表徵 ☐ 推理和論述 ☐ 發展策略 ☑ 使用符號、形式及術語與運算 ☐ 使用數學輔助工具

二、課程規劃

數學素養評量試題命題能力的養成需要長時間的磨練，從理論理解、實例欣賞、親自仿效到掌握命題要領，都需要相當的時間，所以素養命題的工作都需要三到四次的課程規劃（含回家作業），底下是四次的課程規劃說明：

次別	課程目標	分組討論的內容
第一次	增進數學素養評量的認識 • 簡介與舉例 • 試題的情境脈絡 • 試題的數學知識	分組討論： • 特色招生數學素養評量的意義 • 閱讀討論數學素養評量架構及意涵 • 教師素養試題設計經驗分享 • 討論與分配回家的命題作業
回家作業	• 教師依分配或自行設計一道素養試題題組（約 2~4 小題） • 用網路或電話與組內學員討論設計的試題，也請同事對試題作評析 • 分析該道試題的情境脈絡與數學知識，並確認該試題隸屬於能力指標的哪一冊、哪一章及哪一節 • 找幾位學生作讀題與初步測試工作	
第二次	疑惑、解答與試題分享 • 提出對素養內容的疑問 • 回家命題過程困難點的因應之道 • 各組推派學員分享自己設計的試題 • 授課教授的總結	分組討論： • 數學素養的疑惑討論 • 分享自己命題的過程 • 組內學員討論與分享設計試題內容 • 各組推派學員作試題分享 • 討論大範圍的施測與給分標準的訂定
回家作業	• 修訂自我的試題設計 • 選擇 1~2 個班級進行第一次施測，分析學生的答題類型或答題選項百分比 • 依國際素養規範訂定評分標準 • 在第一次施測後對試題作進一步的修訂 • 將修訂完的試題寄給組長或授課教授，進行第一次專家修正	

第三次	評量試題分享 • 提出對第一次施測的疑問 • 每位學員分享自己設計的試題 • 授課教授的總結	分組討論： • 組內學員討論試題與施測結果 • 組間學員分享與報告試題與施測結果
回家作業	• 再次修訂自我設計的試題與評分標準 • 再選擇 1~2 個班級進行第二次施測 • 在第二次施測後對試題作進一步的修訂 • 將修訂完的試題寄給組長或授課教授，進行第二次專家修正	
第四次	評量試題的分享、回饋與心得報告	分組討論： • 組內學員討論第二次施測結果 • 組間學員分享與報告第二次施測結果 • 參與試題命題的心路歷程（分享、回饋與心得報告）
回家作業	• 完成試題的最後修訂 • 寄回定稿的試題供編印 • 寄回設計心得報告	

附錄：學生施測成績參考表格

得分	**0**		**1**		**2**	**總計**
類型	0A	0B	1A	1B	2A	
人數	4	16	24	20	16	
百分比	5%	20%	30%	25%	20%	
人數	20		44		16	80
百分比	25%		55%		20%	
平均值：0.95；標準差：0.67						

三、如何發掘或設計一道優質數學素養評量試題

「解題」與「命題」是老師經常要從事的兩件工作，教人解題的書不勝枚舉，但是傳授命題要領的書卻付之闕如。之所以這樣，是由於解題與命題來自頭腦的兩種截然不同的運作模式，解題是一種技術，而命題是一項藝術，或者說，「怎麼解題」是一種收斂型思考的過程，而「如何命題」卻是一種發散型創意的行為。

命一道優質素養題目需要經驗的累積，還是態度的轉變呢？兩者都需要！經驗的累積對題幹與題目設計等修題技巧的幫助比較大；而命題態度的轉變會直接影響整道題目的質量。在命題的過程中，會經歷至少兩個階段：

1. 學徒階段：凡事起頭難，放下身段，屈身當學徒是最困難的階段。在學徒階段，必須經歷模仿、依樣畫葫蘆、臨摹與舊瓶裝新酒等漫長過程。
2. 師父階段：對人類過去數學發展史要有一定的認識，並養成閱讀科普書籍的好習慣。

數學家龐加萊在《數學的創造》中提出的數學思考三時期，適合作為素養試題開發的三段歷程：

一、準備期：

就是對問題下很大功夫，又深陷混亂的階段。在這個階段，人們都會採取觀察、實作、分析、學習與內化等有意識的策略。

二、孕育期：

就是停止有意識的思考，讓潛意識發酵，當腦袋裡的小燈泡忽然被點亮，那個「恍然大悟」的時刻就會到來。

三、收割期：

也是收割階段。這一階段只是寫下所有的事情，檢查細節，進行組織並發表。

龐加萊特別強調孕育階段的潛意識角色，這是最難懂，也是至為關鍵的階段。在這裡舉三個實例來說明數學素養評量試題是如何孕育出來（被發現或發明），並期待在某個無法掌握與期待的時刻，可以享受到阿基米德從浴缸跳出來說：「我知道怎麼命數學素養試題」的喜悅。

《例 1》以 <u>人口老化指數</u> 為命題動機…發明

準備期：臺灣與日本受少子化衝擊，人口分布成倒金字塔。上網查閱衡量一地區人口老化程度的指標，發現「人口老化指數」，而 Google 發現人口老化指數的定義為

$$\frac{\text{老年人口數}}{\text{幼年人口數}}\times 100\% \text{ ，}$$

其中老年人口數是指 65 歲以上人口數，幼年人口數則是未滿 15 歲人口數。

再 Google 一下數據，世界各國來看，日本的 184.62%、德國 161.54%、英國 94.44%、法國 89.47%、加拿大 87.5%、臺灣 76.21%、澳洲 73.68%、紐西蘭 70%、韓國 68.75%、美國 65%。

全國各縣市來看，嘉義縣的人口老化最嚴重，老化指數為 127.68%，次為澎湖縣 113.61%，雲林縣 110.1%；最低則是桃園縣 51.11%，次為新竹市 51.9%，臺中市 56.4%。

孕育期：根據上述資料，思索題幹與答題項目的設計（包含搜尋更多資訊）。

收割期：設計成素養題目。

《例 2》以 <u>三角形面積公式</u> 為命題動機…發現

準備期：一百多年前（西元 1899 年）皮克發現並證明了三角形面積的一個有趣公式：

$$\frac{1}{2}S+I-1 \text{ .}$$

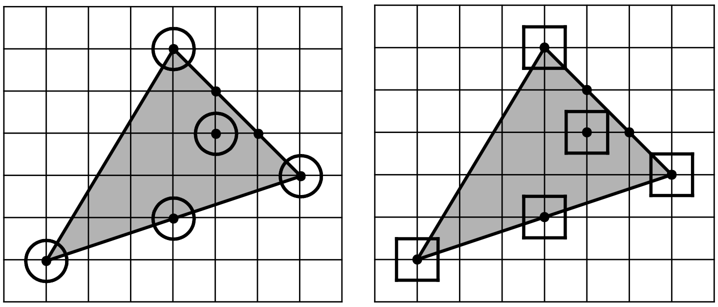
這個公式是當三角形的三個頂點都落在格子點上時才成立的，而且符號 S 代表落在三角形邊上的格子點數，符號 I 代表落在三角形內部的格子點數。舉例來說，下圖中的

三角形邊上一共有 6 個格子點，內部有 10 個格子點，即

$$S=6, I=10 \ .$$

根據皮克公式，三角形的面積為

$$\frac{1}{2}\times 6+10-1=12 \ .$$



〈皮克公式之我譯〉

每個數學公式發現之前總是有他的雛形或基本想法，究竟皮克是透過怎樣的創意發現了面積公式，我們不得而知，但是，將上圖想成鋪地磚的想法，似乎可以給我們皮克公式之合理性的一點啟發。

孕育期：根據上述科普知識，思索題幹與答題項目的設計（包含搜尋更多資訊）。

收割期：設計成素養題目。

《例 3》以 **<u>身體質量指數 BMI</u>**為命題動機…發明

準備期：「環肥燕瘦」是漂亮身材的成語，那麼胖瘦判斷方式有公式嗎？Google 一下發現身體質量指數（Body Mass Index, BMI）是目前國際上通用的胖瘦判斷方式，其定義為

$$\text{身體質量指數BMI}=\frac{\text{體重(公斤)}}{\text{身高}^2\text{(公尺}^2\text{)}} \ .$$

孕育期：根據上述資料，思索題幹與答題項目的設計（包含搜尋更多資訊）。

收割期：龍門國中陳怡橋老師設計成素養題目如下：

身體質量指數 BMI

設計者：陳怡橋

有個性的你，身材不是個絕對值，體重比別人重五公斤就是胖嗎？哈哈~身材好壞是要算 BMI 值，一起來看看吧！

BMI（身體質量指數）的兩三事：

身體質量指數（Body Mass Index, BMI）是目前國際上通用的胖瘦判斷方式，藉由將身高、體重代入公式所得出的數據，來客觀的評判一個人的體型是否理想或太胖、太瘦。

$$\text{身體質量指數BMI}=\frac{\text{體重(公斤)}}{\text{身高}^2\text{(公尺}^2\text{)}}$$

身體質量指數 BMI 值判定								
年齡	男生				女生			
	過輕 (BMI<)	正常範圍 (BMI 介於)	過重 (BMI>)	肥胖 (BMI ≥)	過輕 (BMI<)	正常範圍 (BMI 介於)	過重 (BMI>)	肥胖 (BMI ≥)

11	15.8	15.8~21.0	21.0	23.5	15.8	15.8~20.9	29.0	23.1
12	16.4	16.4~21.5	21.5	24.2	16.4	16.4~21.6	21.6	23.9
13	17.0	17.0~22.2	22.2	24.8	17.0	17.0~22.2	22.2	24.6
14	17.6	17.6~22.7	22.7	25.2	17.6	17.6~22.7	22.7	25.1
15	18.2	18.2~23.1	23.1	25.5	18.0	18.0~22.7	22.7	25.3
16	18.6	18.6~23.4	23.4	25.6	18.0	18.0~22.7	22.7	25.3
17	19.0	19.0~23.6	23.6	25.6	18.3	18.3~22.7	22.7	25.3
18	19.2	19.2~23.7	23.7	25.6	18.3	18.3~22.7	22.7	25.3
成人	18.5	18.5~24.0	24	27	18.5	18.5~24.0	24.0	27.0

◎資料來源：衛生福利部

問題 1：蘇軾:「短長肥瘠各有態，玉環飛燕誰敢憎」說明了不同朝代有不同的審美觀。據史記記載楊貴妃身高 1.64 米、體重 138 斤；趙飛燕身高 1.6 米、體重 118 斤。依目前衛生福利部所公布的 BMI 公式來計算，楊貴妃肥胖嗎？趙飛燕過輕嗎？（唐朝 1 斤約為現在的 600 克，漢朝 1 斤約為現在的 250 克）

問題 2：25 歲的張小姐身高 160 公分、體重 77 公斤，請問張小姐至少要減重多少公斤才能讓 BMI 值達到正常範圍呢？

四、數學核心素養的思維與評量

在 TIMSS 或 PISA 這一類國際評量中，我國學生雖然在數學知識的測試上表現優異，但是在關於喜好數學程度、對數學的信心、以及數學是否有用的認知上，都呈現相當負面的態度。這種現象反映出我國的數學教育並未把數學當作「人格發展的基礎」之一環，從而造成學生學習數學時的偏差態度，也無法由數學以簡馭繁的嚴密精神中，獲得精神美感的提升。

在培養數學核心素養時，應先重視數學思維，再追求數學知識，而數學思維以下列三種特色最值得彰顯：

1. 走進抽象思考

   在真實世界的情境脈絡中，用「以簡馭繁」來處理事情；而在數學世界裡，數學的抽象性讓我們得以充分發揮「化繁為簡」的解題功能。

2. 進行邏輯推理

   在日常生活裡，以理性的思考作為個人思想的陶冶；而在數學世界裡，合乎「邏輯的思維」是演繹數學不可缺的要素。

3. 讓所學的數學是活的

   在真實世界中，數學知識的活用往往是創造力的泉源。

在數學素養的知識內容層面上，PISA 梳理出四大領域來評量學生的數學核心素養，現分述四大數學知識素養領域如下：

1. 變化與關係

   「關係」是日常生活裡經常使用到的詞語。發生關係的兩端主體，有的是恆常穩定的，譬如親子關係；也有是變動的，譬如油料與油價之間的關係。「變化」則在其前與其後的主體間搭建起一定的關係。生活及科學裡充斥著各式各樣為人所在意的變化與關係，在處理事物時，想要達成有效的成果，常需掌握其間的各種變化與關係。數學的訓練是了解變化與關係本質的極佳途徑。

數學裡的關係，有些是物件先存在，而後人意識到其間的精微關係，例如二次方程式根與係數的關係，兩者知其一便知其二。有些關係是人為賦予定義，然後在物件間以此關係加以聯繫，例如各種等價關係、對稱關係等。有兩種關係在數學裡特別受到關注：函數關係與邏輯因果關係。簡言之，函數就是一種對應關係，將指定物件唯一對應到另一物件；雖然在國民教育階段裡，函數多以某種 $y = f(x)$ 的形式表現出來，但是從數學素養的觀點來看，更應培養學生能從對應中去理解函數。至於邏輯因果關係，則是指在某假設或前提下，必然導致某結論成立；有些邏輯因果關係較明顯，如任一偶數的平方仍為偶數，有些則須經歷證明的過程而後得知，例如若某整數各個數字的和為 3 的倍數必可被 3 整除。數學裡由於經常在檢驗邏輯因果關係是否成立，因此使人熟練數學思維方法，也有助於了解生活及科學裡的種種變化與關係。

2. 空間與形狀

處理空間與形狀資訊需有良好的空間感。空間感是個人對生活中各種幾何形狀的基本性質、組成、結構，以及形狀間相對關係的一般性理解與認知，從而發展彈性靈活的方法去使用這種理解。與空間感相關的有效解題策略，是處理生活中所遭遇的圖形和視覺表徵問題的要素。例如地圖的解讀，汽車導航器的使用，在陌生街道裡的自我定位與辨識目標方向，居住空間的規劃，甚至環境的美化，都與良好的空間感息息相關。處理空間與形狀的知識主要依賴幾何，幾何經常在其他科學學門中，也發生重要的作用，最明顯的例子是力學，但是即使是生命科學裡，生物的樣態或蛋白質的空間形狀，也都是值得研究的對象。因此，良好的空間感與處理形狀的能力，是現代國民應具備的基本素養。

3. 數與量

對於數的認識，不僅僅是一種量化的符號，而是生活中經常與度量單位結合產生的數感。數感是個人對數字（帶單位或不帶單位）、運算，以及兩者間產生的情境的一般性理解與認知，與能夠以彈性靈活的方法去使用這種理解和發展有效的解題策略（包括心算、估算），來處理日常生活中所遭遇與數量有關的問題。在科技快速進步，資訊複雜且多變化的時代裡，一般國民更應具備良好的數感以解決現實生活中所遭遇的數量問題。例如，一般人生活中常會面對定存與年利率問題，如目前一年期定存最高是某銀行之 1.41%，存一年期定存一百萬，一年可以領多少利息？一個月又是多少利息？具良好數感者，可以立刻反應一年利息是 14100 元，那麼一個月的利息大約是多少呢？具良好數感者，透過心算與估算，知道 14400 除以 12 是 1200，所以一個月的利息比 1200 元少一些。再如 A 銀行開辦人民幣定存，宣稱年利率是 3.2%，另一家 B 銀行宣稱定存人民幣一百萬一個月可以領利息 2500 元，請問哪家銀行的利息較高？具良好數感者，可以立刻心算

$2500 \times 12 = 25000 + 5000 = 30000$ 元，所以存 A 銀行較划算。

4. 不確定性與數據分析

宇宙的運轉，有必然性及隨機性。當銅板以自由落體方式落下時，若給定高度，則落地所需時間為定值，這是必然性；但哪一面朝上卻未可知，此便屬隨機性。但是隨機性並非全然混亂，隨機性的規律建立在機率理論上。由於生活中充滿著隨機性，使得人們對很多事物常感不確定，因此需做各種預測。有些預測方式，雖然缺乏科學依據，但是即使胡亂猜測，獲得正確答案的機率仍有可能不為零，致使人們難以放棄擲爻算命、求神拜佛等手段。

為了做有科學根據的預測，也就是所謂讓數據說話，可利用統計方法，先蒐集資料、加以整理及分析，然後給出推論。由於預測常不可能百分之百精準，因此在給出預測值之外，通常也要給出誤差大小。對於隨機現象，並無法保證預測的誤差必有多大，只能給出誤差不超過某定值的機率。統計的運用，通常不像數學證明那樣獲取必然的結論，而是給出允許誤差下的機率式保證，並且所能保證的機率，不但不是百分之百，還附帶有誤差。在隨機世界中，人們常面臨抉擇，或對現況做推測，或對未來做預測。因此充分了解隨機性，以及具備基本的處理數據的能力，確實有其必要性。

五、數學素養評量試題的格式與樣本

我們以《臺灣 2011 數學素養評量樣本試題》中，新北市五峰國中鄧家駿所設計的〈世足賽〉問題為例，給出學員將來要提交的素養試題樣本。因為〈世足賽〉這道題目在數學素養分類裡，情境脈絡是社會（公民）（C），數學知識是不確定性（U）；而根據我國國中數學課綱的能力指標是在第 6 冊第 3 章第 2 節，所以我們把試題的 WORD 檔名取為

632CU 世足賽（鄧家駿）.doc

並建議用標楷體 12 或 13 號字形當題目內文字體。

世足賽

設計者：鄧家駿

世界盃足球賽每四年舉行一次，在剛開始 32 強分成 8 組（A 至 H）的分組賽採積分制：勝隊得到 3 分積分，打平則各得 1 分，輸隊獲得 0 分。小組賽的排名方法為依據積分高低順序，每組晉級前兩名。若積分相同，以「淨球數」來決定；所謂淨球數就是進球數減掉失球數的結果。若淨球數又相同，就直接比「總進球數」；倘若總進球數又相同，就比雙方對戰的戰績，若還是相持不下，最後就只能憑運氣抽籤來決定。

資料來源：2014.01.02 取自 http://sports.hinet.net/2010fifa/standings.html

問題 1：新聞報導說：「號外！！目前日本隊積分 8 分，已經在分組晉級！！」

請判斷此新聞報導是正確或錯誤，並舉出理由說明。

問題 2：以下是 A 組的賽程及比賽結果：

比賽日期	比賽時間	球隊 1	比賽結果	球隊 2	比賽場地
2010/06/11	22:00	南非	1：1	墨西哥	約翰尼斯堡
2010/06/12	02:30	烏拉圭	0：0	法國	開普敦
2010/06/17	02:30	南非	0：3	烏拉圭	比勒陀利亞
2010/06/18	02:30	法國	0：2	墨西哥	波羅克瓦尼
2010/06/22	22:00	墨西哥	0：1	烏拉圭	勒斯滕堡
2010/06/22	22:00	法國	1：2	南非	布隆泉

請問這個分組晉級的隊伍是哪兩隊？請分別寫出國名以及晉級的原因。

問題 3：以下新聞報導公布 C 組目前的比賽結果積分表：

隊　伍	勝場數	和場數	敗場數	積　分
斯洛維尼亞	1	1	1	4
美國	1	2	0	5

阿爾及利亞	0	2	1	2
英格蘭	1	2	0	5

但是其中有不合理的地方，請指出不合理之處。

計分說明：

<table>
<tr><td colspan="3">問題 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">滿分（1 分）
代碼 1A：
分組只比賽 3 場，積分不可能為 8 分。</td><td>零分
代碼 0A：其他答案。
代碼 0B：沒有作答。</td></tr>
<tr><td colspan="3">問題 2</td></tr>
<tr><td>滿分（2 分）
代碼 2A：
積分表完全正確，且計算出淨勝球數。並寫出第一、二名。</td><td>部分給分（1 分）
代碼 1A：
積分表完全正確，但未考慮到淨勝球數，因此只寫出第一名。
代碼 1B：
積分表完全正確，但未考慮到淨勝球數，因此除寫出第一名，第二名的理由錯誤。
代碼 1C：
積分表填寫不完全正確，但正確依據規則判別名次。</td><td>零分
代碼 0A：其他答案。
代碼 0B：沒有作答。</td></tr>
<tr><td colspan="3">問題 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">滿分（1 分）
代碼 1A：勝場數與敗場數不合。
代碼 1B：和場數應該是偶數。
代碼 1C：兩個理由均寫出。</td><td>零分
代碼 0A：指出積分算錯。
代碼 0B：其他答案。
代碼 0C：沒有作答。</td></tr>
</table>

六、國內中學教師所命的優良素養試題

最後我們列舉一些國內素養工作坊上所命的優良試題：

1. 體感溫度（321SF）

根據國際民航組織（ICAO）的數據指出，高山上的氣溫會低於平地的氣溫，且每上升一千公尺氣溫便會降低 6℃。在高地上，因為地形缺乏屏障，因此會帶來強風，而風所引起的空氣流動也會不斷把熱量由體表移走，稱為「風寒效應」，這會使人體所感受的溫度（即體感溫度）比溫度計上所測量的溫度來得低，美國的科學家 Paul Siple 曾簡化出關係式：

$$\text{體感溫度}(°\text{C}) = \text{當地氣溫}(°\text{C}) - 2\times\sqrt{\text{風速}(\text{公尺/秒})}\ .$$

問題 1：陽明山國家公園平均高度為 500 公尺，與平地氣溫相差多少度？

問題 2：臺灣第一高山—玉山，主峰海拔將近 4000 公尺，若某日小明從 37℃的平地前往玉山登山，抵達主峰時，當時的氣溫為多少度？

問題 3：途中小明拿出風速器，測得風速為 9 公尺/秒，當地氣溫 13℃，則當時他所感受到的體感溫度為何？

2. 身分證（113PQ）

以 A123456789 為例。

◎身分證字號（連同英文字母共 10 碼）中的每碼代表的意義如下：

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
號碼配賦時所屬的縣市 （未必為出生地） A：臺北市、B：臺中市、…	性 別 1：男性 2：女性	流水編號 依照配賦順序累加							檢驗碼

◎檢查碼產生的規則：

(1)將第一個英文字母轉換成數字，轉換規則如下：

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
10	11	12	13	14	15	16	17	34	18	19	20	21
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
22	35	23	24	25	26	27	28	29	32	30	31	33

(2)轉換後的 2 位數字連同性別代碼和流水編號共有 10 個位數，將每個位數由左至右依照 $\times1,\times9,\times8,\times7,\times6,\times5,\times4,\times3,\times2,\times1$ 的順序相乘。

<table>
<tr><th colspan="10">每個位數由左而右依序乘上固定數字</th><th>檢查碼</th></tr>
<tr><td colspan="2">A</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">7</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="3">9</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>×1</td><td>×9</td><td>×8</td><td>×7</td><td>×6</td><td>×5</td><td>×4</td><td>×3</td><td>×2</td><td>×1</td></tr>
</table>

(3)將步驟 2 的 10 個乘積相加後除以 10 並取其餘數。

$1\times1+0\times9+1\times8+2\times7+\cdots+8\times1=121$， $121\div10=12\ldots1$

(4)利用 10 減去該餘數後即得檢查碼（若餘數為 0 時，則設定其檢查碼為 0），若驗證碼與身分證相符，則該身分證字號即為有效證號。

$10-1=9$ ，則 A123456789 為有效之證號

問題 1：試問有效之身分證字號 C12345678□的檢查碼為何？請寫出你的計算過程。

問題 2：試問身分證字號 Q202020202 是否為一有效之證號？請寫出你的計算過程。

問題 3：若身分證字號 X112233445 為無效的身分證字號，試問在「只修改一個數字號碼」的前提下要如何將此號碼修正為一個有效證號？請寫出至少兩種不同的做法。

3. 標準身材（113PQ）

標準身材的定義是

$$\frac{\text{肚臍高度}}{\text{身高}}=\frac{\text{肚臍與頭頂距離}}{\text{肚臍高度}}\text{（單位：公分）}$$

問題 1：有一身高 150 公分，肚臍高度 90 公分的女孩，欲藉由穿高跟鞋來提高身高與肚臍高度來滿足標準身材的定義，試問該女孩穿多少公分的高跟鞋較恰當？（取最接近的整數）

4. 標準體重（233SF）

身材是否過胖、標準或過瘦？不過體重是否標準，更要考慮美麗、自信、個人本身的主觀價值。由於每個人的骨架、體型不同，所以可採用身體質量指數 BMI 為檢視標準或利用理想體重計算公式，來推算個人的理想體重。根據衛生福利部公布，臺灣地區成年人理想體重計算方法如下：

男性：$(身高-80)\times 0.7=理想體重$ ；女性：$(身高-70)\times 0.6=理想體重$ ，

其中身高的單位為公分。

※ 在理想體重的正負 10%為正常體重。

問題 1：假定成人男性的身高 x 公分，依據衛生福利部公布的理想體重計算方法，寫出計算成人男性正常體重的範圍公式。

問題 2：小善是一位成年女性，其身高為 180 公分，請問小善的理想體重為多少公斤？

問題 3：某家雜誌社報導：「由衛生福利部公布之臺灣區成年人理想體重計算方法可以發現，一般來說，成人女性其理想體重較同樣身高的成人男性要略為減少。」依據理想體重計算方法來考慮，身高超過多少公分的女性，較同樣身高的男性其理想體重會降低。寫出你的計算過程。

5. 最老的狗（241SF）

2006 年英國週日電訊報（Sunday Telegraph）報導：「住在英國紐澤西 Bridgewater 的狗狗—黑莓（Bramble）剛剛歡度 27 歲生日，這可能使牠成為英國有史以來還活著最老的狗，也將有機會競選全球最老的狗。」而根據美國賓州州立大學獸醫學系 Dr. Fred L. Metzger 博士之研究報告指出，9 公斤以下狗狗的人狗年齡概略對照表如下：

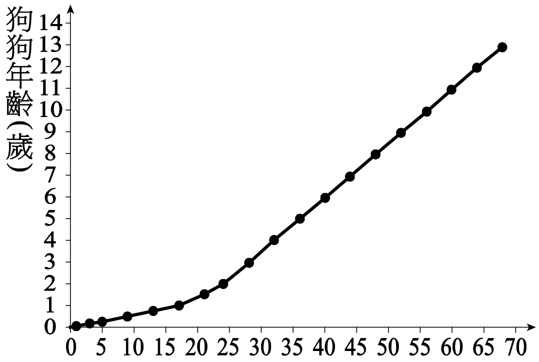
狗狗年齡	1 個月大	2 個月大	3 個月大	6 個月大	9 個月大	1 歲	1 歲半	2 歲	3 歲	4 歲
人類年齡	1 歲	3 歲	5 歲	9 歲	13 歲	17 歲	21 歲	24 歲	28 歲	32 歲
狗狗年齡	5 歲	6 歲	7 歲	8 歲	9 歲	10 歲	11 歲	12 歲	13 歲	…
人類年齡	36 歲	40 歲	44 歲	48 歲	52 歲	56 歲	60 歲	64 歲	68 歲	…

◎資料來源：(最老的狗）2014.01.03 取自 http://www.suiis.com/info/InfoArticle.asp?no=146#axzz2Mjoy0RSQ

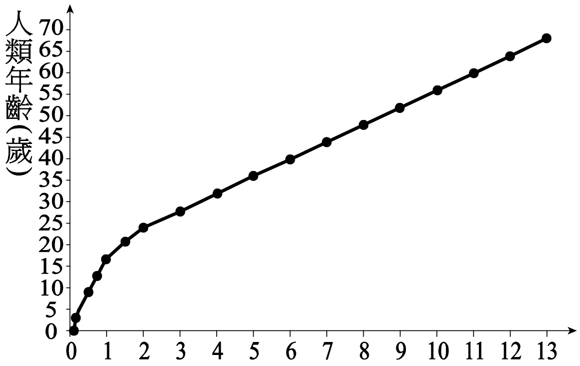
問題 1：如果新聞中的狗狗—黑莓（Bramble）體重是在 9 公斤以下，試問狗齡 27 歲的牠換算成人類的年齡應該已經幾歲了？請寫出你的計算方法。

問題 2：假設人類年齡為 H，狗狗年齡為 D，試利用上表資料寫出「狗齡 2 歲後（ $D\geq 2$ ）」H 與 D 的關係式。

問題 3：圖表甲、乙是利用人狗年齡概略對照表所繪製出的函數關係圖，請從兩個圖表中選出一個較適合表示「狗狗成長速度趨勢」的關係圖，並且寫出你挑選的理由。



〈圖表甲〉



〈圖表乙〉

6. 煞車距離（241SF）

設汽車駕駛踩煞車後所走的距離（煞車距離）s 公尺，踩煞車瞬間的速度是每小時 v 公里與汽車的總重量 w 公噸三者會滿足關係式

$$s = kv^2w \text{ ，k 為一常數。}$$

現有一輛空貨車，它在每小時 60 公里的速度下行駛的煞車距離為 10 公尺。又知一般司機從發現情況到踩煞車操作之間需 0.6 秒的反應時間。

問題 1：試問此空貨車在每小時 80 公里的速度下行駛的煞車距離為幾公尺？請寫出你的計算過程。

問題 2：試問此空貨車在每小時 60 公里的速度下行駛時，該車必須與前車保持至少幾公尺的距離才安全（安全距離）？請寫出你的計算過程。

問題 3：如果這輛貨車載有等於自身重的貨物行駛時，試問當行駛車速為每小時 90 公里時，該車必須與前車保持至少幾公尺的距離才安全（安全距離）？請寫出你的計算過程。

7. 液晶電視最佳觀賞距離（252EF）

新聞報導，電子業龍頭集團跨足液晶電視的市場，以 60 吋的大螢幕，低於四萬塊的價錢進軍消費市場，造成消費者及電視製造廠商不小震撼。現實生活中，對液晶電視來說，家中空間的「觀賞距離」才是決定家中螢幕尺寸的最大關鍵因素。

以下是目前歐美國家針對最佳觀賞距離的計算公式與目前市面上的螢幕畫面尺寸對照表：

$$\text{最佳觀賞距離} = \text{螢幕高度} \div \text{垂直解析度} \times \text{常數} \text{ ，}$$

其中最佳觀賞距離的單位為公分、畫面高度單位為公分，常數值為 3400。

垂直解析度依液晶電視的種類分為「非 Full HD 機種」，其解析度為 720 i/p 之液晶電視；「Full HD 機種」，其解析度為 1080 i/p 之液晶電視。以下是目前螢幕尺寸與高度的對照表：

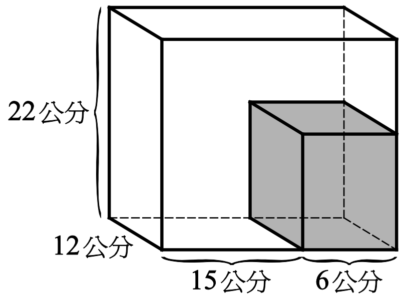
螢幕對角線尺寸（吋） **1 吋為 2.54 公分**	**螢幕高度（公分）**
22	26.7
32	39.84
37	46.07
40	49.80
42	52.29

46	57.27
47	58.52
50	62.25
60	74.70
100	124.50
103	128.24

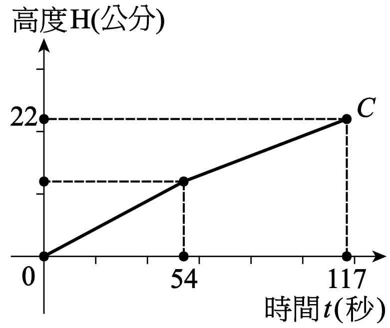
問題 1：小文家購買了一台 60 吋「Full HD 機種」的液晶電視，請問最佳觀賞距離為多少公尺？

8. 省水馬桶（422PQ）

為了達到環保省水的目標，在長方體馬桶水箱的角落放入一塊長方體磚頭，如下圖所示：



當馬桶沖水之後，會以 40 立方公分／秒的速率注水入馬桶內，下圖表示當馬桶沖水完畢後，開始注水時馬桶水面高度 H（公分）對時間 t（秒）的關係圖：

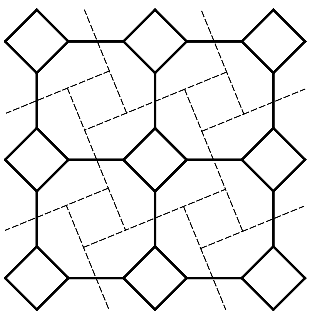


問題 1：當馬桶注滿水時，此裝置可以省水__________立方公分。

問題 2：設水面尚未淹沒磚塊時，水位上升的速度為 v_1 公分／秒；淹沒磚塊後，水位上升的速度為 v_2 公分／秒，請問 v_1、v_2 是否相等？並說明造成 v_1、v_2 相等或不相等的理由。

9. 鑲嵌（442SS）

鑲嵌就是用幾類不同形狀的磁磚來鋪滿整個平面，例如下圖的實線分割就是用正方形與正八邊形鑲嵌整個平面，而虛線則是用兩個大小正方形來鋪滿整個平面：



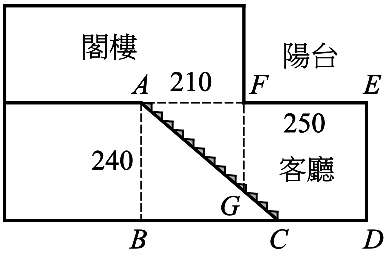
這是 1933 年崔弗斯的兩種巧妙切割法，而且崔弗斯讓實線正方形與虛線小正方形的邊長都是 1，關於同一平面上的這兩種鑲嵌，虛線的切割把實線正八邊形分割成四個全等五邊形外加一個邊長為 1 的正方形，實線的切割把虛線大正方形分割成四個全等五邊形外加一個邊長為 1 的正方形。

問題 1：邊長為 1 的正八邊形面積為何？

問題 2：虛線大正方形的面積為何？

10. 室內設計（512CS）

下圖為樓中樓的剖面圖，在建造客廳到閣樓的樓梯 $\overline{AC}$ 時，實際測量施工現場得到以下數據：客廳高 $\overline{AB}=\overline{DE}=240$ 公分，樓梯洞口寬 $\overline{AF}=210$ 公分，閣樓陽台寬 $\overline{EF}=250$ 公分。

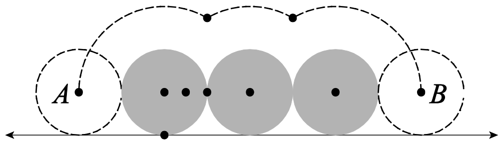


問題 1：為了避免上樓時，頭會碰到牆角 F，規劃預留牆角 F 到樓梯的高度 $\overline{FG}$ 為 180 公分，則樓梯底端 C 到牆角 D 的距離應為多少公分？

問題 2：已知客廳高度 $\overline{AB}=\overline{DE}=240$ 公分，$\overline{AE}=460$ 公分，屋主希望客廳寬敞些，要求 $\overline{CD}$ 至少為 180 公分；以及讓樓梯能平緩些而要求樓梯的傾斜角 $\angle ACB$ 介於 $30°$ 與 $45°$ 之間，根據上述條件，請求出 $\overline{CD}$ 的範圍。

11. 滾動硬幣（521PS）

有若干個半徑為 1 的硬幣（皆為半徑相同的等圓）按下圖的形式固定排列著，有一個半徑也是 1 的 A 硬幣沿著這些等圓的上方無滑動地滾動到圓 B 的位置。



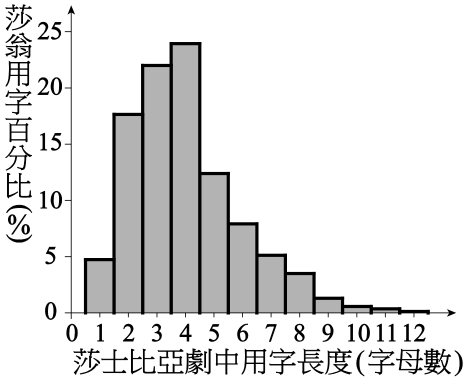
問題 1：當硬幣 A 沿著 3 個等圓的上方無滑動地滾動到圓 B 的位置時，請問圓心 A 共走過多長的距離？

問題 2：設 N 表示灰色固定等圓的個數，K 表示硬幣 A 滾動的圈數，請完成下表的空格：

N（固定等圓的個數）	***K***（動圓 ***A*** 滾動的圈數）
3	
4	
8	

12. 莎翁用字（622CU）

統計莎士比亞（或稱莎翁）戲劇中所用英文單字的長度，繪製長條圖如下：



這個分布有一個尖峰，而且大致左偏。顯示劇中用了許多短字及少數很長的字，使得直方圖的右尾延伸得比左尾遠。

問題 1：莎士比亞的戲劇中最常用到幾個字母數的單字（即眾數為何）？

問題 2:「莎士比亞的戲劇中至少有 60%的單字字母數不超過 4 個字母數」,這個說法正確嗎？

問題 3：下表是某篇文章所用英文單字長度為 1~15 個字母的字所占百分比：

字母數	百分比
1	3.6
2	13.8
3	18.7
4	15
5	12.5
6	8.2
7	8.1
8	6.9
9	4.4
10	3.6
11	3.1
12	0.9
13	0.6
14	0.4
15	0.2

寫這篇文章的作者跟莎士比亞用字長度的習慣相符嗎？請舉出兩個理由做佐證。

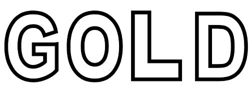
七、附錄：PISA 數學試題命題須知

本附錄的資料來源為臺南大學林素微教授「數學素養評量設計」投影片：

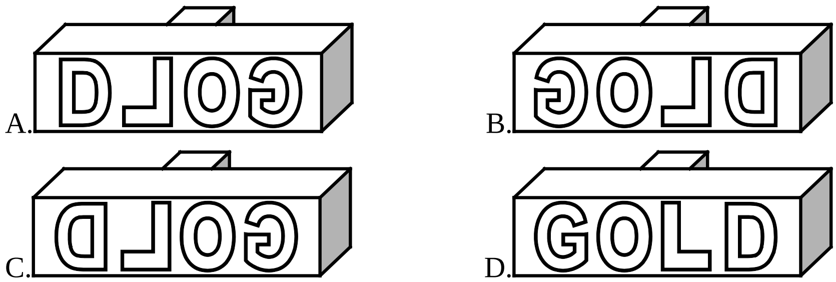
1. PISA 是一個以 15 歲學生為對象的國際素養技能測驗，所有的試題應能適合每一個國家的 15 歲學生。

2. 試題不可從教科書或參考書中擷取。
3. 試題開發以單元（Unit）為單位，每個單元包含 3~5 個問題（Question），每個問題盡可能相互獨立。
4. 每個試題的內容必須包含：題目、題幹、試題說明（題旨、數學歷程、內容領域、情境脈絡）、問題、編碼方式。
5. 需包含學生實際作答版本和一組學生進行測試，這些結果可用來修正試題，且學生作答反應可置入計分規範。
6. 試題必須符合四種數學內容領域（數量、空間與形狀、改變與關係、不確定性）之一。
7. 試題類型比例：1/3 選擇題、1/3 封閉式建構反應題、1/3 開放式建構反應題。
8. 能以常用文具（尺、橡皮擦、計算機、圓規）答題。
9. 試題的閱讀層次需詳加考量，試題的用字盡可能簡單且方向容易掌握，避免會造成文化偏誤的試題。
   (1) 使用主動式，避免被動式句子。
   (2) 避免使用艱澀難懂的字詞。
   (3) 避免選用可能會有性別差異的試題。
10. 建議每一個問題完成作答時間不應超過 2 分鐘（for the “average” student）。
11. 每一個單元不應超過 15 分鐘。
12. 費時的試題（time-consuming items）應該避免。
13. 避免不當的問題設計。
   (1) 試題的計分太過於開放。
   (2) 假設你要設計一個體積為 80 公升的玻璃水族箱。請你建議一些合適的長、寬、高尺寸，並描述你如何得到這些結果，最後，再依據你得到的值描繪出此水族箱。
   (3) 從課堂活動來看，此題目是測試真實生活問題解決的好問題，但評分架構太複雜，且在跨國、跨評分者之間可能會有困難來確認其一致性。
14. 翻譯問題：因為施測語言超過 25 種，故試題中包含特定語言可能不太適合，如下：

You are making a stamp to print the word “GOLD” as follows：

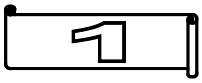


Which of the following stamps will correctly print the word “GOLD”？

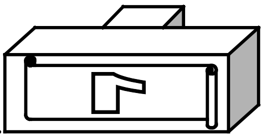


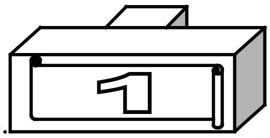
改成如下會較佳：

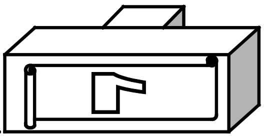
You are making a stamp to print the following picture：

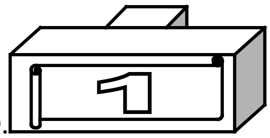


Which of the following stamps will correctly print that picture？

A. 

B. 

C. 

D. 

15.避免不完整的敘述。

Line X is shorter than

A. Line Y

B. Line Z

C. Line W

D. Line T

Instead, write “Which line is longer than Line X？”

16.真實的情境：

「農夫約翰養了許多雞和兔子。約翰計算得到共有 65 個頭、180 隻腳。請問約翰有多少隻雞？」(較人為化)

可改寫成

「學校音樂會的成人票每張 4 元，學生票每張 2 元。今天共賣出 65 張票，共得 180 元。請問今天賣了多少張學生票？」(較為真實)

17.數學化：

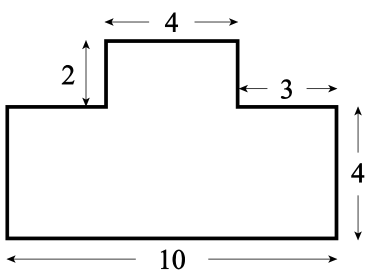
(1) 例題：超市 A 和超市 B 賣的森森牛奶糖本週都在特價。超市 A 的優惠方式為「買二條送一條」，超市 B 的優惠方式為「打七折」。

① 如果兩間超市的森森牛奶糖的售價相同，哪一間超市提供的優惠方式較佳？提供理由支持你的答案。

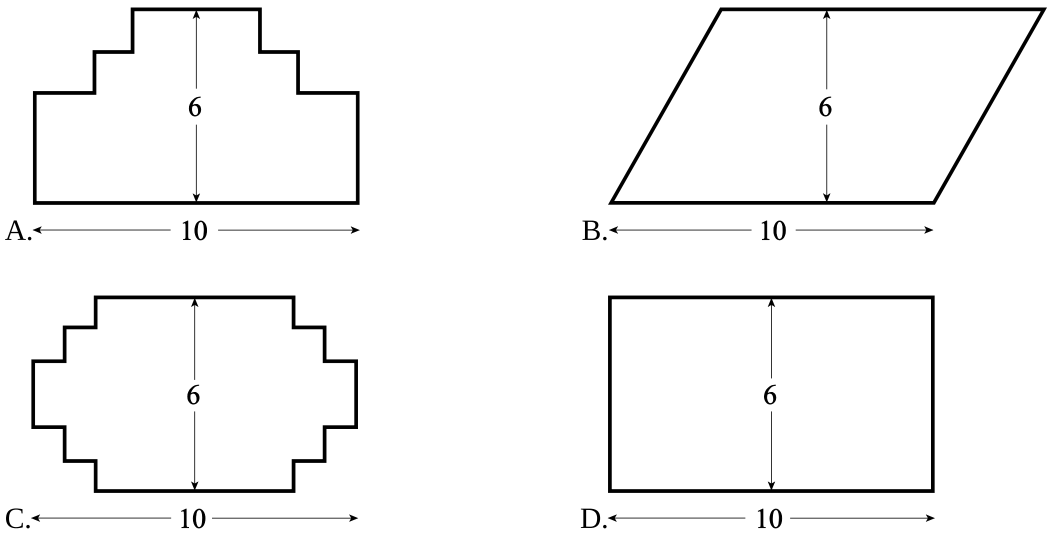
② 如果超市 A 的森森牛奶糖售價為 7 元，小明在超市 A 買了 6 條，根據優惠方式為「買二條送一條」，他要付多少錢？

(2) 例題：

① 有一位木匠要為花圃建圍欄，圍欄長度的單位為公尺。這位木匠要買多長的圍欄？



② 木匠有 32 公尺的木材，他想要在花圃周圍做圍欄。他考慮將花圃設計成以下的造型。哪一個造型可以用 32 公尺的木材圍成？（需要數學化）



18.非數學情境脈絡的試題：

OECD/PISA 強調真實的情境但並未排除重要和／或有趣的數學（有時這些情境可能會是比較虛擬性）。

例：列出 496 的因數（標準化的教科書問題）:

數字 6 是一個完全數（perfect number），因為它（除了本身之外）的因數 1、2、3 的加總，剛好等於 6。下一個完全數是 28，因為它的因數有 1、2、4、7、14。再下一個完全數是 496。請證明 496 是完全數（較佳）。

參考文獻：

1. PISA 2006 數學樣本試題，數學素養評量，經濟合作暨發展組織（OECD）著，國立臺南大學譯。
2. 臺灣 2011 數學素養評量樣本試題(上)、(下)，林福來教授主編。
3. 臺北市 101 學年度提升教學與評量效能，第一學期國中數學素養評量工作坊甲、丙班，臺北市政府教育局。
4. 臺灣 PISA 國家研究中心，http://pisa.nutn.edu.tw。

藝術上的密鋪平面…艾薛爾的跨界之旅

有稜有角的正三角形，四平八穩的正方形與圓融肚量大的正六邊形是鑲嵌平面的不二人選。

許志農／臺灣師大數學系

俄羅斯出身的學者蓋姆（Andre Geim）與諾伏西羅夫（Konstantin Novoselov）共同獲得 2010 年諾貝爾物理學獎，他們是研究石墨烯（Graphene）的先驅，而這種薄膜號稱是 21 世紀的神奇材料。瑞典皇家科學院讚揚石墨烯是「完美的原子晶格」，因為這種材料在電腦、家用裝置和運輸方面都有很大的發展潛力。石墨烯的厚度只有一個原子，是世界最薄卻也是最堅強的奈米材料，幾乎透明，特性是電阻極低，電子跑的速度極快，幾乎是沒有質量的粒子才能有的特性，速度只比光子慢了三百倍，比現行的半導體矽材料快了至少十倍，是非常好的導體。因此，石墨烯被看好是可能取代矽半導體的材料。瑞典皇家科學院讚許蓋姆和諾伏西羅夫說，他們「證明了碳以如此平面形式呈現時，擁有卓越的特性，這種特性源自量子物理學的奇異世界」。

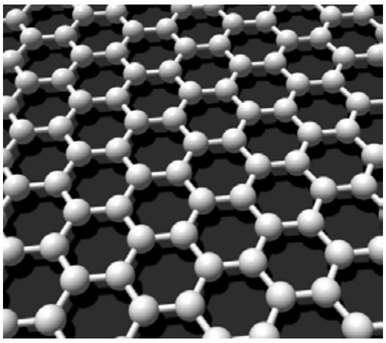


圖 1

圖 2

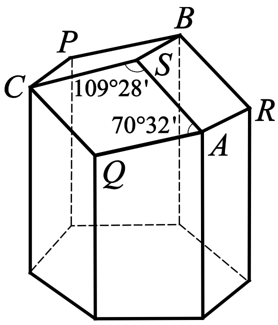


圖 3

從圖 1 可以看出石墨烯是正六邊形的網格構造，而圖 2 的蜜蜂蜂巢截面圖也有同樣的六邊形幾何結構。蜂巢的基本結構，是由一個個正六邊形單房、房口全朝向同一邊、緊密排列組合而成的建築物，而蜂巢的材料正是公蜂所分泌的蜂蠟。圖 3 是將單一個蜂巢倒過來看的結構圖，從圖中可以發現巢底並不是平的或半球形的結構，而是由三個全等的菱形拼成。事實上，蜂巢造型奇特、結構巧妙，可謂巧奪天工，很早就引起了科學家們的濃厚興趣，天文學家克卜勒指出：「這種充滿空間對稱蜂巢的角度，應該和菱形十二面體的角度一樣。每個正六稜柱狀蜂巢的底部，都是由三個全等的菱形拼成的，而且每個菱形的鈍角都等於109°28'，銳角都等於 70°32'。」

據估計，工蜂分泌一公斤的蜂蠟需要消耗 16 公斤的花蜜；而採集一公斤的花蜜，蜜蜂們必須飛行 32 萬公里才得以完成；相當於繞行地球八圈的距離。因此，蜂蠟對蜜蜂而言，是寶貝珍貴的，而且數學家已經證實蜂巢的結構是最省材料的建築物，所以說蜜蜂是世上最會節能省料的建築師。

正六邊形不僅在科技材料、蜜蜂蜂巢結構上出現，也是中國估算圓周率 π 的初始圖形；三國時代的劉徽就是從六邊形出發，提出一個十分精彩的「π 演算法」，稱為割圓術。劉徽從圓內接正六邊形開始，先分割成十二邊形，再細分為 24 邊形、48 邊形、96 邊形，直到圓內接正 192 邊形止。

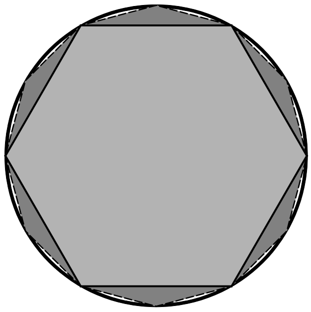


圖 4

劉徽發現分割愈細多邊形的邊數愈多，多邊形的面積就會和圓面積沒有差別了，透過這樣的過程，劉徽算得圓周率 π 介於 3.141024 與 3.142704 之間。《九章算術》註文寫著：「割之彌細，所失彌少；割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。」這段註文充分說明了劉徽對極限概念，已經具有了相當程度的認識了，也是對割圓術的精彩註解。

南北朝的祖沖之繼承劉徽割圓術的衣缽，同樣從圓內接（外切）正六邊形開始，經過 12 次的分割，計算至正 $24576 = 6 \times 2^{12}$ 邊形與圓周的細微差異，得到了有名的祖沖之圓周率不等式

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927 .$$

祖沖之這一精確到小數點後第七位的結果，直到一千年後才被 15 世紀的阿拉伯數學家以十七位有效數字的紀錄打破。為了紀念祖沖之的貢獻，人們將月球背面的一座環形山命名為「祖沖之環形山」，也將小行星 1888 命名為「祖沖之小行星」。

兩千多年來，π 的計算只能使用多邊形，但是到了 17 世紀微積分發明之後，開啟了增值 π 的新紀元，例如 1844 年，德國數學家利用以下的展開式

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{1}{8}\right)^1}{1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{5}\right)^5 + \left(\frac{1}{8}\right)^5}{5} - \cdots ,$$

將 π 算到兩百位的準確值，師大數學系的洪萬生教授懷疑這個展開式有可能是高斯建議的。

正六邊形在祖沖之的妙算之下與圓相融、在蜂巢的巧妙構造下與簡約為鄰、在碳原子的圍繞之下達到善導電的效果，它可說是自然界的妙圖形。想想看，自然界還有哪些這樣的美妙圖形呢？這類圖形的一大特色就是他們可以蓋滿整個平面，不會留下任何空隙。從「蜜蜂以正六邊形的形狀構築他們的房子，設計師以方形磁磚裝飾室內地板，工人用三角形地磚美化人行道」知道正三角形、正方形與正六邊形是可以蓋滿平面而不留下任何空隙的圖形，而透過角度的計算，也可以證明「想要採用同一種形狀的正多邊形來蓋滿大地，唯有正三角形、正方形與正六邊形三者而已。」

國際數學家大會（簡稱 ICM）是由國際數學聯盟主辦的全球性數學學術會議。會議的主要內容是進行學術交流，並在開幕式上頒發菲爾茲獎（1936 年起）、奈望林納獎（1982 年起）、高斯獎（2006 年起）。首屆國際數學家大會 1897 年在瑞士蘇黎世舉行，1900 年巴黎大會之後每四年舉行一次，進入 20 世紀的這次大會以希爾伯特在歷史與教育兩組聯席會上的講演《未來的數學問題》（在刊印的講稿中，他共列出 23 道問題，但他在實際講演中，因時間關係只講了其中十道問題，即1, 2, 6, 7, 8,13,16,19, 21 及 22），確立了這次巴黎國際數學家大會在數學史上的地位，希爾伯特認為「通過對這些問題的研討，可以期待科學的進步。」解決這 23 道難題也成為今後所有數學家的共同夢想。

第十二屆國際數學家大會在荷蘭阿姆斯特丹舉行，主辦單位也為當地的版畫家艾薛爾（M. C.

Escher, 1898~1972）在國立博物館（荷蘭最大的博物館）舉行一次個人畫展，作為大會文化活動的一部分，這個展覽得到了《時代》雜誌的好評。艾薛爾展覽了多幅龐加萊圓盤上的鑲嵌圖案，讓原本只有少數數學家喜愛的龐加萊圓盤在這次展覽之後成為家喻戶曉的數學美術。在國際數學家大會之後，艾薛爾結識當代最優秀的幾位數學家，從他們那裡攝取養分，轉換成版畫藝術。他真的讀過一些頂尖數學家的最新論文，雖然他自稱看不懂，但是他其實已經領悟其中的微妙結構，並且將其精髓用藝術形式呈現出來了。雖然他的呈現方式不是方程式、也不是定理和證明，而是圖畫，但是有數學家認為，他的作品在精神和意義上「就是數學沒錯」。

就學歷而言，艾薛爾連一張正式的大學文憑都沒有，而且他的中學成績很差，幾乎所有科目都被當掉了，所以不能讀大學。他的父親把他送去建築與室內設計專科學校，希望他學習成為一個建築師。他在第一所學校的功課也是差不多能當的都當了，轉到第二所學校之後遇到恩師，發現他的繪圖天分，建議他改學藝術而不是建築。他只考慮了一個星期就決定通知父親說他要改行了，從此跟著老師學木刻和版畫。

畢業後，艾薛爾在西班牙進行旅行時，對格拉納達的阿爾罕布拉宮印象深刻，這宮殿是 14 世紀的穆斯林建築，宮殿裡的地板、牆壁、天花板都用許多的複雜幾何圖案和反覆性圖案來裝飾，其圖案之豐富，實令人歎為觀止。這些鑲嵌圖案讓艾薛爾對密鋪平面產生了興趣，並且嘗試應用在作品中。此後他一生中共創作了 137 幅平面鑲嵌畫。圖 5 是艾薛爾在平面上的一幅鑲嵌圖案，只用一隻蜥蜴就蓋滿整個平面，而圖 6 是龐加萊圓盤上的另一幅鑲嵌圖案，當圖案愈靠近圓盤邊緣時，圖形就愈小，但是他們並不知道他們變小了，因為他們的測量尺度也變小了，這是非歐幾里得原理所產生的一種深奧現象。

圖 5

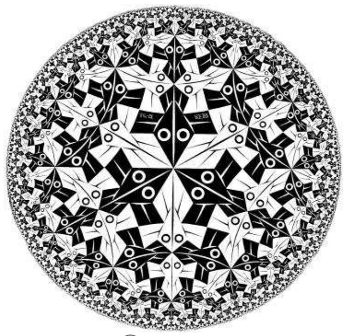


圖 6

艾薛爾把自己稱為一個「圖形藝術家」，他專門從事於木版畫和平版畫，而數學家稱他為藝術家中的數學家。艾薛爾與畢卡索屬同時代的人，畢卡索作品中那些變形的物體，既有對新畫風的探索，也有藝術家對眼前扭曲世界的感悟。艾薛爾的後期作品雖然多以建築或幾何圖形等抽象為主題，但其所揭示的規則、合理表像下的矛盾與荒謬，還有那天使與魔鬼互為背景的拼圖，誰能說不是艾薛爾對這個世界的思考呢？或許正是由於他對數學、建築學和哲學的過深理解，阻礙了他與同道的交流，他在藝術界幾乎總是特立獨行，後無來者。他甚至至今無法被歸入二十世紀藝術的任何一個流派。但是，他卻被眾多的科學家視為知己。他的版畫曾被許多科學著作和雜誌用作封面，1954 年的「國際數學協會」在阿姆斯特丹專門為他舉辦了個人畫展，這是現代藝術史上罕見的。

鑲嵌或密鋪（Tessellation）是指「將具有獨立封閉外形的圖形以連續、反覆且不重疊，也不留空隙的形式在平面上展開」的意思，艾薛爾在他的論文中，將鑲嵌圖案或密鋪平面稱為「平

面規則分割」，並解釋為「一塊平面或龐加萊圓盤，它應是被想成有無限的邊際，可將之填滿或被分割成無數類似的幾何圖案，不留任何虛的空間。」艾薛爾以手繪的方式，創作了許多豐富且極具創意的鑲嵌圖案。在數學上，我們可以用平移、旋轉與對稱及加減遞補的方式來詮釋艾薛爾的繪圖方法，讓我們來欣賞一幅艾薛爾在密鋪平面上的數學藝術〈蜥蜴〉；以正六邊形當骨架，從正六邊形內部剪下六小塊，貼到外部適當的位置，以拼出蜥蜴的外形，其中頭及兩隻後腳是透過固定點順時針旋轉而成，而尾巴及兩隻前腳是透過旋轉之後再移位補上的，如圖 7。

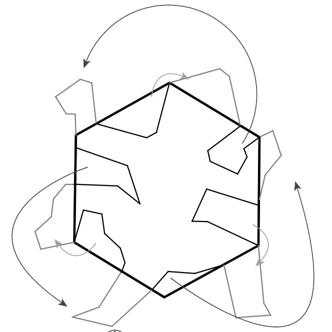


圖 7

圖 8

圖 8 則是艾薛爾以三種顏色不同但形狀一樣的蜥蜴，讓牠們相親相愛的團聚在一起，這都要歸功於以正六邊形密鋪整個平面的一個性質「每個正六邊形的頂點都恰被三個正六邊形圍繞著」，從石墨烯或蜂巢結構圖就可以看出來。很多玩具公司將艾薛爾密鋪平面的圖片設計成拼圖遊戲，由於艾薛爾賦予具象造型的趣味，他們融合美感形式與數理概念的雙重特性，應用在激盪腦力、啟發創意的益智拼圖遊戲，啟迪孩子的智慧。

傳統拼圖遊戲的概念是將一張圖片分割成形狀、面積皆不同的數塊，在打亂秩序的條件下，讓玩家再將這些散落的拼圖塊，以外形互相嵌合及相鄰邊界的圖案必須連貫為依據，以不重疊及不留下空隙的方式填滿指定的區域。然而艾薛爾的創意數學拼圖，拼圖塊的面積、形狀完全相同，頓時失去相鄰邊界的圖案必須連貫的線索，純粹以拼圖塊的外形是否互相嵌合的依據來判斷，相較於傳統拼圖遊戲，困難度提高許多。

除了從正六邊形出發外，艾薛爾的許多鑲嵌圖案是從正方形與正三角形演化而來的，例圖 9 的〈飛魚〉就是從正三角形加工拼湊而成，而〈鴨子〉則是由正方形透過左右及上下各一次的加減遞補出來的。

圖 9

圖 10

由於艾薛爾所思考的問題，以及他思考問題的方式，更接近於科學家而不是藝術家；所以毫不奇怪，他的作品首先為科學家所接受，是科學家發現了艾薛爾作品的價值和意義。數學家、物理學家以及心理學家如侯世達⋯等，各自從自己的角度解釋艾薛爾，或者用艾薛爾說明自己的理論。楊振寧的一本小書《基本粒子發現簡史》就是以艾薛爾的〈騎士〉作為封面的。在近

年來中國出版的所謂科學文化類譯著中，也不時會有對艾薛爾的討論。如彭羅斯的《皇帝新腦》。

從目前的大眾語境看，一位藝術家表達了「科學的思想」，並能為科學家所欣賞，是藝術家的榮耀。但是，這樣的理解恰恰忽視了艾薛爾作為一位獨立思想者的價值。儘管艾薛爾有很多科學家朋友，並且有幾位對他的作品產生了影響。但是，艾薛爾並沒有試圖表達「科學家」的思想，而只是要表達他自己的思想。

做個實驗吧！圖 11 中的〈飛馬〉是從哪種正多邊形拼湊而成。

圖 11

從這些例子，我們可以知道：艾薛爾透過平移、旋轉與對稱的加減拼湊方法，將一個簡單可以填滿平面的幾何圖形，透過他豐富的想像力及熟練的手畫技巧，幻化為生動、有趣且一樣可以密鋪平面的數學美學圖案。

正三角形磁磚會讓人產生有稜有角的感受，比較適合當人行道上的地磚，可以達到提醒路人小心的目的；正方形磁磚給人有四平八穩的氣氛，適宜當居家室內的磁磚，隨時散發出居住舒適安穩的氛圍；而正六邊形磁磚讓人有圓融肚量大的感受，是寺院廟宇地磚的不二選擇，充分散播出人生的圓融與和諧。艾薛爾則柔化了稜與角，美化了邊成為弧線，幻化出生動活潑的各種動物造型磁磚。

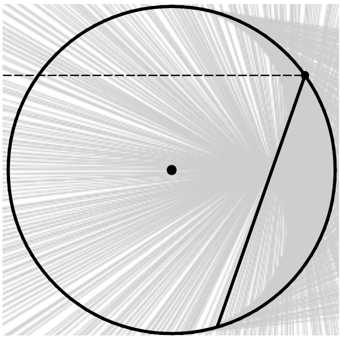
最後要感謝兩位老師促成我寫這篇文章的動機，廖惠儀老師在臺南的演講會場提供我艾薛爾〈飛馬〉的影片；洪萬生教授推薦我閱讀時報出版的科普書籍《數字奇航》，艾利克斯・貝洛斯著，胡守仁譯。

◎圖片出處：
圖 1、2：shutterstock 提供。
圖 5、6、8、9、10、11：Doris Schattschneider(2004)，M.C. Escher：Visions of Symmetry，New York：H.N. Abrams。

曲線族與包絡線

江慶昱／衛道中學退休教師

一、楔子 》



早上 10 點左右，在臺中鬧區的老樹咖啡屋。陽光在溫馴中又有點亮眼，讓咖啡杯轉向陽光，取了一個適當的角度，於是，在咖啡上出現一個漂亮的金黃色愛心線。10 幾年前，我在衛道中學聽一位同事說，他要帶學生作一篇關於包絡線的科展，那時候 GSP 還沒有引進臺灣，我想：到底什麼是包絡線？後來 GSP 出現江湖，我覺得 GSP 真是表現包絡線的一個很好的工具，所謂工欲善其事，必先利其器，GSP 的動態表現（由視覺上）讓我們能充分理解何謂包絡線。

二、曲線族 》

在高中課程中，曲線族是一個重要概念。試舉一例：

兩直線 $L: a_1x+b_1y+c_1=0, M: a_2x+b_2y+c_2=0$ 交於點 A，
則對任意實數 k， $L_k: \left(a_1x+b_1y+c_1\right)+k\left(a_2x+b_2y+c_2\right)=0$ 表示通過點 A 的直線族。
反之，通過 L，M 兩線交點的直線一定能表為 L_k 的形式。

最近在科學教育月刊上看到一篇不錯的文章（參考書目 1，證明的部分請看文章內容），我把它稱為「同軸曲線族」。過其上任一點 P 的切點的弦會被「直徑」平分。

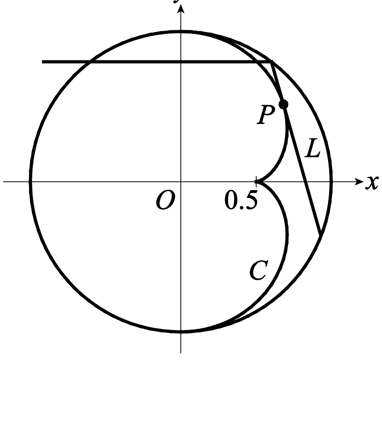
例： $25x^2+4y^2=100, P(-1,4)$ ，求以 P 為中點的弦方程式。

因為 $25x^2+4y^2=100$ 的同軸曲線族 $25x^2+4y^2=k$ 通過 P，所以 $k=25+64=89$ ，過 $25x^2+4y^2=89$ 上的點 $P(-1,4)$ 的切線為 $25x-16y=-89$ 即為所求。

註： $y=2x^2-3x+2$ 的同軸曲線族為 $y=2x^2-3x+k; xy=4$ 的同軸曲線族為 $xy=k$ 。

三、包絡線的理論 》

假設一曲線族的方程式為 $f(x,y,c)=0$，在平面上某區域內每一點至少有一曲線族的曲線通過。如果有一曲線 C，使得 C 上的每一點都與 $f(x,y,c)=0$ 的某一曲線相切，則稱為此曲線族包絡出曲線 C，C 稱為曲線族 $f(x,y,c)=0$ 的包絡線。若 P 是 C 上一點，則曲線 C 與曲線族 $f(x,y,c)=0$ 提供 P 點的曲線（右圖中的 L）在 P 點相切。



把 y，c 看成 x 的函數， $f(x,y,c)=0$ 對 x 微分，得

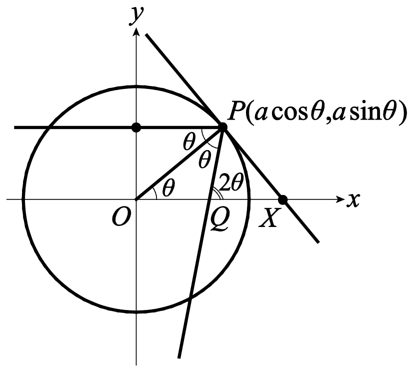
$\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial c}\dfrac{dc}{dx}=0$ ，其中 $\dfrac{dy}{dx}$ 是包絡線上的切線方向。

從另一方面看，對某固定的參數 c， L_c 是曲線族 $f(x,y,c)=0$ 中經過 $P(x,y)$ 的一特定曲線，滿足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}=0$ ，其中 $\dfrac{dy}{dx}$ 是曲線

L_c 的切線方向，這兩個切線方向是一致的，所以 $\dfrac{\partial f}{\partial c}\dfrac{dc}{dx}=0$ ，且包絡線滿足 $\begin{cases} f(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial c}(x,y,c)=0 \end{cases}$ 。

註：Leibniz（1646~1715）在 1692 年確立了包絡線理論。

四、計算 》



假設杯子是一半徑為 a 的圓，圓心在原點。

入射光線平行 x 軸，交圓於 P 點，反射光線交 x 軸於 Q 點，

假設 $\angle POX=\theta$ ，由反射定律，知 $\angle PQX=2\theta$ ，

直線 $\overline{PQ}$ 的方程式為 $\dfrac{y-a\sin\theta}{x-a\cos\theta}=\tan 2\theta$ ，

即 $f(x,y,\theta)=x\sin 2\theta-y\cos 2\theta-a\sin\theta=0,-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，

是一以 θ 為參數的直線族。

這些直線族包絡出的曲線稱為此曲線族的包絡線。此包絡線上任一點的切線就是一條反射線。

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=2x\cos 2\theta+2y\sin 2\theta-a\cos\theta=0\ ,$$

解 $\begin{cases} f(x,y,\theta)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(x,y,\theta)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sin 2\theta-y\cos 2\theta=a\sin\theta \\ x\cos 2\theta+y\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}a\cos\theta \end{cases}$,

$$\Delta=\begin{vmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{vmatrix}=1\ ,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} a\sin\theta & -\cos 2\theta \\ \dfrac{1}{2}a\cos\theta & \sin 2\theta \end{vmatrix}=a\left(\sin\theta\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\cos 2\theta\right),$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} \sin 2\theta & a\sin\theta \\ \cos 2\theta & \dfrac{1}{2}a\cos\theta \end{vmatrix}=a\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta-\sin\theta\cos 2\theta\right),$$

因此，此包絡線方程式為 $\begin{cases} x=a\left(\sin\theta\sin 2\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta\cos 2\theta\right) \\ y=a\left(\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta-\sin\theta\cos 2\theta\right) \end{cases}$ 。

$$\frac{1}{a^2}\left(x^2+y^2\right)=\left(\sin 2\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\cos\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta\right)^2$$

$$=\sin^2\theta\left(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta\right)+\frac{1}{4}\cos^2\theta\left(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta\right)$$（中間有兩項正負消掉了）

$$=\sin^2\theta+\frac{1}{4}\cos^2\theta=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\sin^2\theta\ ,$$

$$y=a\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta-\sin\theta\cos 2\theta\right)$$

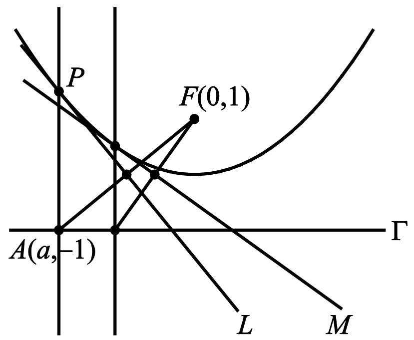
$$=a\left[\sin\theta\cos^2\theta-\sin\theta\left(1-2\sin^2\theta\right)\right]$$

$$=a\left[\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right)-\sin\theta\left(1-2\sin^2\theta\right)\right]$$

$$=a\sin^3\theta,$$

消掉θ，得$\frac{1}{a^2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$。

五、另一個例子，另一種作法 》



$F(0,1)$是一定點；動點$A(a,-1)$在直線$\Gamma: y=-1$上動，
過 A 作Γ的垂線與 AF 的中垂線 L，
當 A 在Γ上動時，L 包絡出一條曲線 C。

$L:(x-a)^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2$,

$f(x,y,a)=2ax-4y-a^2=0$ ……①
另一條直線$M: f(x,y,a_1)=2a_1x-4y-a_1^{\ 2}=0$，
設 P 是 L，M 的交點，滿足

$f(x,y,a)-f(x,y,a_1)=0\Rightarrow 2\left(a-a_1\right)x-\left(a^2-a_1^{\ 2}\right)=0$。

讓$a_1\to a$，則$x-a=0$……②
①②消去 a，得到$x^2=4y$，即為包絡線 C 的方程式。

六、習作 》

1. 直線$L_0: ax+by+c=0$與圓$C_0: x^2+y^2+dx+ey+f=0$相交於P_1,P_2兩相異點。若 k 為一實數，則顯然$x^2+y^2+dx+ey+f+k\left(ax+by+c\right)=0$通過$P_1,P_2$兩點。試證：任一通過$P_1,P_2$兩點的圓必為$x^2+y^2+dx+ey+f+k\left(ax+by+c\right)=0$，其中 k 為某一實數。（1988 年臺大數學系推甄）

2. 圓心$A(0,0)$，半徑為 6，點$B(-3,0)$。設 P 是圓上之動點，$L_P=\left\{\text{線段 }\overline{BP}\text{ 的垂直平分線}\right\}$，

   求L_P的包絡線。

3. 求直線族$F(a,b)=\left\{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,\middle|\,a^2+b^2=1, ab\neq 0\right\}$的包絡線。

解答

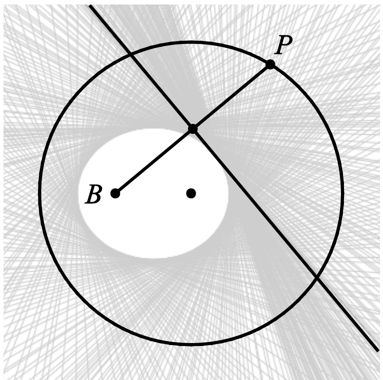
1. 假設通過P_1,P_2的圓為$x^2+y^2+d'x+e'y+f'=0$，

   則$\left(x^2+y^2+d'x+e'y+f'\right)-\left(x^2+y^2+dx+ey+f\right)=0$顯然表示通過$P_1,P_2$的直線；

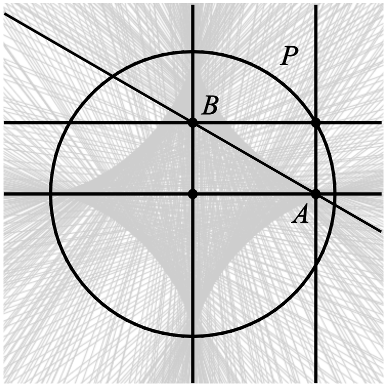
所以$(d'-d)x+(e'-e)y+(f'-f)=0$即直線$ax+by+c=0$，

故存在一實數 k，使得$d'-d=ka, e'-e=kb, f'-f=kc \Rightarrow d'=d+ka, e'=e+kb, f'=f+kc$，得證。

2. $12x^2+16y^2+36x-81=0$ 為一橢圓。



3. 取一單位圓，P 是圓上一動點，過 P 作 x,y 軸的垂線，垂足為 A,B，則直線 $\overline{AB}:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 就是直線族的一直線，即包絡線的切線，讓 P 點在圓上動，則動線 $\overline{AB}$ 的包絡線即為所求，其方程式是 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$。



七、後記》

臺中，新光三越前，噴泉隨著重金屬的樂音揮灑，時而高亢，時而低迹，幾個小孩在旁邊玩水，衣褲盡濕。噴泉的水柱構成完美的包絡面，聰明的你請告訴我，什麼是時間。

參考書目與註：

1. 楊健民（1976），科學教育月刊，第 221 期，P.15。
2. 康明昌（1990），牛頓雜誌。
3. Heinrich Dorrie（1965），100 Great Problems of Elementary Mathematics，New York：Dover Publications，P.220。
4. 華羅庚（1999），微積分（數學分析引導上冊），新竹：凡異出版社，P.90。
5. 華羅庚（1999），微積分（數學分析引導下冊），新竹：凡異出版社，P.134。
6. 蕭欣忠、呂素齡（譯）（1988），P. T. Saunders，劇變論入門，臺北：曉園出版社，P.102。
7. 包絡線：http://210.60.224.4/ct/content/1990/00060246/0017.htm

8. 註：對一些 GeoGebra 的愛用者，腎臟線的指令如下：

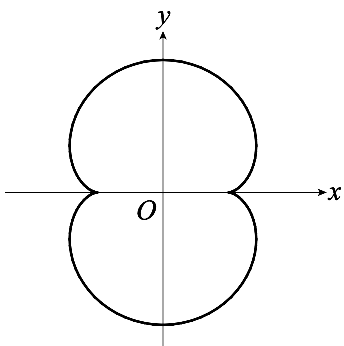
   curve[sin(t)*sin(2t)+1/2cos(t)*cos(2t),

   1/2sin(2t)*cos(t)－sin(t)*cos(2t),t,$-\pi,\pi$]

   或

   curve[(3/2)cos(t)－(cos(t))^3,(sin(t))^3,t,$-\pi,\pi$]

   可以得到右圖。



拉格朗日插值多項式的教學與速解法

羅國少／國立苗栗高中

一、前言 》

在事隔多年後，今年又再度有機會任教高一的課程，但是物換星移，高中數學的課綱已從 95 暫綱變成了 99 課綱。而首次接觸這個新的課綱，課程內容有了許多改變，一個全新的課程「拉格朗日插值多項式」被納入高中教材，這是之前 88 課綱和 95 暫綱都沒有的新單元。在這個單元教學過程中，下面例子是這個單元中的常見例題：

> 設 $f(x)$ 是三次多項式，已知 $f(1)=5, f(2)=6, f(3)=11, f(4)=8$ ，求 $f(5)=$__________。

若要解決上述的例題，課本的解法在這邊就不再贅述，但是學生卻在補習班學得一速解法如下：設 $f(5)=k$ ，則

$$
\begin{aligned}
&1\times f(1)-4\times f(2)+6\times f(3)-4\times f(4)+1\times f(5)=0\\
&\Rightarrow 1\times 5-4\times 6+6\times 11-4\times 8+1\times k=0\\
&\Rightarrow 5-24+66-32+k=0\\
&\Rightarrow k=-15\ .
\end{aligned}
$$

即可快速無誤的解出正確答案，而非使用課本上的正規作法，在機緣巧合之下，得知有這種作法，便趁空閒之餘，認真思考是否任何題目都可以用這種方式解決，故而催生了這篇文章，若有不足之處，還望各位先進能給予指正。

二、推論與證明 》

開始思考這個作法，發現速解法中的係數恰是二項式定理中的係數，且多項式 $f(x)$ 是三次多項式，搭配的係數是 $(x-y)^4$ 展開式的係數，故又再隨便找了幾個例題嘗試之後，發現並非每一題都可以用此速解法。故而推想此一類型題目中給的函數值其自變數是等差數列，才可以使用這個作法。有此一想法後，便嘗試能證明符合所述，茲證明如下：

設 $f(x)$ 為 n 次多項式，則由插值多項式公式得

$$
\begin{aligned}
f(x)=&f(x_1)\times\frac{(x-x_2)\times(x-x_3)\times\cdots\times(x-x_i)\times\cdots\times(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)\times(x_1-x_3)\times\cdots\times(x_1-x_i)\times\cdots\times(x_1-x_{n+1})}\\
&+\sum_{i=2}^{n} f(x_i)\times\frac{(x-x_1)\times(x-x_2)\times\cdots\times(x-x_{i-1})\times(x-x_{i+1})\times(x-x_{i+2})\times\cdots\times(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\times(x_i-x_2)\times\cdots\times(x_i-x_{i-1})\times(x_i-x_{i+1})\times(x_i-x_{i+2})\times\cdots\times(x_i-x_{n+1})}\\
&+f(x_{n+1})\times\frac{(x-x_1)\times(x-x_2)\times\cdots\times(x-x_i)\times\cdots\times(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)\times(x_{n+1}-x_2)\times\cdots\times(x_{n+1}-x_i)\times\cdots\times(x_{n+1}-x_n)}\ ,
\end{aligned}
$$

其中 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}, x_{n+2}$ 是等差數列，則

$$
f(x_{n+2})=f(x_1)\times\frac{(x_{n+2}-x_2)\times(x_{n+2}-x_3)\times\cdots\times(x_{n+2}-x_i)\times\cdots\times(x_{n+2}-x_{n+1})}{(x_1-x_2)\times(x_1-x_3)\times\cdots\times(x_1-x_i)\times\cdots\times(x_1-x_{n+1})}
$$

$$+\sum_{i=2}^{n} f(x_i)\times\frac{(x_{n+2}-x_1)\times(x_{n+2}-x_2)\times\cdots\times(x_{n+2}-x_{i-1})\times(x_{n+2}-x_{i+1})\times(x_{n+2}-x_{i+2})\times\cdots\times(x_{n+2}-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\times(x_i-x_2)\times\cdots\times(x_i-x_{i-1})\times(x_i-x_{i+1})\times(x_i-x_{i+2})\times\cdots\times(x_i-x_{n+1})}$$

$$+f(x_{n+1})\times\frac{(x_{n+2}-x_1)\times(x_{n+2}-x_2)\times\cdots\times(x_{n+2}-x_i)\times\cdots\times(x_{n+2}-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)\times(x_{n+1}-x_2)\times\cdots\times(x_{n+1}-x_i)\times\cdots\times(x_{n+1}-x_n)}$$

$$\Rightarrow f(x_{n+2})=f(x_1)\times\frac{[nd]\left[(n-1)d\right]\left[(n-2)d\right]\cdots[d]}{[-d]\left[(-2)d\right]\left[(-3)d\right]\cdots\left[(-n)d\right]}$$

$$+\sum_{i=2}^{n} f(x_i)\times\frac{\left[(n+1)d\right][nd]\cdots\left[(n-i+3)d\right]\left[(n-i+1)d\right]\left[(n-i)d\right]\cdots[d]}{\left[(i-1)d\right]\left[(i-2)d\right]\cdots[d][-d][-2d]\cdots\left[-(n-i+1)d\right]}$$

$$+f(x_{n+1})\times\frac{\left[(n+1)d\right][nd]\left[(n-1)d\right]\cdots[2d]}{[nd]\left[(n-1)d\right]\left[(n-2)d\right]\cdots[d]}$$ ，其中 d 為公差

$$\Rightarrow f(x_{n+2})=f(x_1)\times\frac{n!}{(-1)^n\cdot n!}+\sum_{i=2}^{n} f(x_i)\times\frac{\frac{(n+1)!}{(n-i+2)}}{(i-1)!\cdot(-1)^{n-i+1}\cdot(n-i+1)!}+f(x_{n+1})\times\frac{\frac{(n+1)!}{1!}}{n!}\ \ldots\ldots(*)$$

$\because i=1$時，$\dfrac{\frac{(n+1)!}{(n-i+2)}}{(i-1)!\cdot(-1)^{n-i+1}\cdot(n-i+1)!}=\dfrac{\frac{(n+1)!}{(n+1)}}{0!\cdot(-1)^n\cdot n!}=\dfrac{n!}{(-1)^n\cdot n!}$，

$i=n+1$時，$\dfrac{\frac{(n+1)!}{(n-i+2)}}{(i-1)!\cdot(-1)^{n-i+1}\cdot(n-i+1)!}=\dfrac{\frac{(n+1)!}{1}}{n!\cdot(-1)^0\cdot 0!}=\dfrac{\frac{(n+1)!}{1}}{n!}$，

$\therefore$(*)式中的 $f(x_{n+2})$ 可合併成 $f(x_{n+2})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\cdot\frac{\frac{(n+1)!}{(n-i+2)}}{(i-1)!\cdot(-1)^{n-i+1}\cdot(n-i+1)!}$

$$\Rightarrow f(x_{n+2})=\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\cdot\frac{(n+1)!}{(i-1)!\cdot(-1)^{n-i+1}\cdot(n-i+1)!\cdot(n-i+2)}$$

$$\Rightarrow f(x_{n+2})=\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\cdot\frac{(n+1)!}{(i-1)!\cdot(n-i+2)!}\cdot(-1)^{i-n-1}$$

$$\Rightarrow f(x_{n+2})=\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\cdot C_{i-1}^{n+1}\cdot(-1)^{i-n-1},$$

兩邊同乘$(-1)^n$

$$\Rightarrow(-1)^n\cdot f(x_{n+2})=(-1)^n\cdot\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\cdot C_{i-1}^{n+1}\cdot(-1)^{i-n-1}$$

$$\Rightarrow(-1)^n\cdot f(x_{n+2})=\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\cdot C_{i-1}^{n+1}\cdot(-1)^{i-1}$$

$$\Rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\cdot C_{i-1}^{n+1}\cdot(-1)^{i-1}-(-1)^{n}\cdot f(x_{n+2})$$

$$\Rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\cdot C_{i-1}^{n+1}\cdot(-1)^{i-1}+(-1)^{n+1}\cdot f(x_{n+2})$$

$$\Rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\cdot C_{i-1}^{n+1}\cdot(-1)^{i-1}+(-1)^{n+1}\cdot f(x_{n+2})\cdot C_{n+1}^{n+1}$$

$$\Rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n+2} f(x_i)\cdot C_{i-1}^{n+1}\cdot(-1)^{i-1},$$

故得證。

三、結論 》

由前述的證明，在自變數為等差數列，而且欲求的函數值的自變數也恰和條件中的自變數為等差時，確實有符合速解法的解法過程。行文至此，難免有所疏漏，還望各位先進不吝給予指正。

算幾不等式的教學經驗分享

曾國維／國立武陵高中

在高一、高二範圍內涉及到求極值問題，很多情形下會考慮使用算幾不等式，但學生用此概念解決問題時，容易將「產生極值」與「等號成立」視為同一件事。當然，對於一些典型的例題來說，將此兩概念混為一談並不會影響所做出的答案；但對某些情況而言，確實會產生困擾，以下就個人的教學經驗與各位老師分享。

學生拿一個關於算幾不等式的題目問我：

設 a、b 均為正數，滿足 $a+2b+ab=30$ ，試求 ab 的最大值為何？

提供給他們的兩種參考作法有：

方法一

$$(a+2)(b+1)=32\Rightarrow AB=32\ ,$$

其中 $A=a+2$ 且 $B=b+1$ 亦為兩正數，則所求為

$$(A-2)(B-1)=AB-(A+2B)+2=34-(A+2B)\ .$$

故由算幾不等式知

$$34-(A+2B)\le 34-2\sqrt{2AB}=18\ ,$$

當 $A=2B$ ，即 $a=2b$ 時，等號成立，故 ab 有最大值為 18。

方法二

由算幾不等式可知

$$\frac{a+2b}{2}\ge\sqrt{2ab}\Rightarrow\frac{30-ab}{2}\ge\sqrt{2ab}\Rightarrow\left(\sqrt{ab}\right)^2+2\sqrt{2}\sqrt{ab}-30\le 0\Rightarrow -5\sqrt{2}\le\sqrt{ab}\le 3\sqrt{2}\ .$$

又 $\sqrt{ab}>0$ ，所以 $ab\le\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ ，故當 $a=2b$ 時，等號成立，恰可得 ab 有最大值為 18。

但是，有一部分的學生困惑為何需如此麻煩，依據他們作算幾不等式的「經驗」，知道有一種更快速的作法為：

由算幾不等式可知

$$\frac{a+2b}{2}\ge\sqrt{2ab}\ ,$$

且 $a=2b$ 時，ab 有最大值，將此關係代入已知條件可得

$$2b+2b+2b^2=30\Rightarrow b=3\ ,$$

所以 ab 有最大值為 18。

此作法似乎有效而快速，當然破綻也相當明顯，因為能製造出 ab 項的算幾不等式亦可用

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ .$$

然而此不等式等號成立之際是在 $a=b$ 時，但無法幫我們在此題作出 ab 的最大值。以此方式反

問時，雖能產生提醒的效果，但困惑的學生們仍無法具體感受到為何要「小心地」使用算幾不等式求極值。

事實上，我們知道問題並非在「不等式」本身，只要 a、b 是兩正數，無論是

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ 或 } \frac{a+2b}{2} \geq \sqrt{2ab}$$

毫無疑問都是正確的，換句話說這兩個不等式都提供 ab 的一種「上界」。只是當「上界是一個固定常數」時，算幾不等式中的等號成立恰好使得 ab 產生最大值；但若「上界不固定而是一個函數」時，等號成立只是說明何時 ab 恰好與上界函數的某個函數值相等，並不保證此時 ab 會產生最大值。

然而對學生而言，這是最難以理解的部分，因為他們從所作範例的經驗中，較少去探究這個細微的部分。為了讓他們能體會何以需要「小心地」使用算幾不等式求極值，便試著找出兩個範例，並以函數圖形的方式說明，所找的範例如下：

例 1：設 $0 < x < 4, v = 2\sqrt{x} - x$ ，試求 xv 的最大值。
例 2：設 $a = 1$ 且 $b = x^2$ ，其中 x 為任意實數，試求 $a + b$ 的最小值。

在例 1 中，對於高一、高二的學生，可以嘗試用 GeoGebra 畫出兩函數

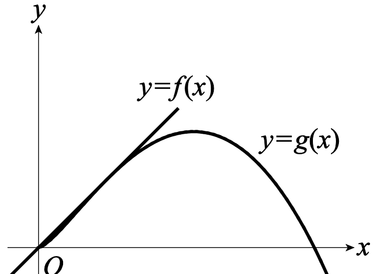
$$f(x) = \left(\frac{x+v}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \text{ 與 } g(x) = xv = 2x^{\frac{3}{2}} - x^2$$

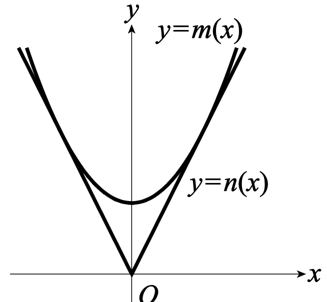
在 $(0,4)$ 的圖形，並可明顯觀察出算幾不等式確實會成立，且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的函數值確實在 $x = v$ 時相等，但此時無法使得 $g(x)$ 產生最大值。至於高三下學期學過微積分的學生，可用微分判斷出當 $0 < x < 4$ 時， $f(x) - g(x)$ 在 $x = 1$ 處有最小值為 0，且 $g(x)$ 在 $x = \frac{9}{4}$ 有最大值為 $\frac{27}{16}$ 。

另外，在例 2 中，可設

$$m(x) = a + b = 1 + x^2 \text{ 與 } n(x) = 2\sqrt{ab} = 2|x| \ .$$

由圖形可以觀察出算幾不等式在 $x = \pm 1$ 時等號成立，但 $m(x)$ 卻是在 $x = 0$ 有最小值。





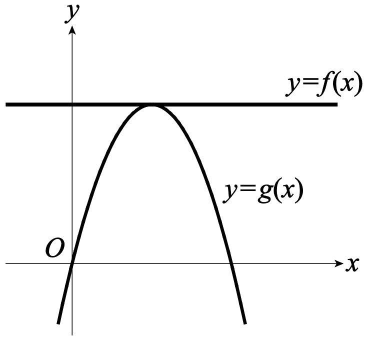
用函數圖形的方式亦可解釋為何在「 $x + v$ 為定值」時沒有上述的困擾。設兩正數 x 與 v 滿足

$$\frac{x+v}{2} = k \text{ ，其中 } k \text{ 是一個定值，}$$

則可得

$$xv = 2kx - x^2 \ .$$

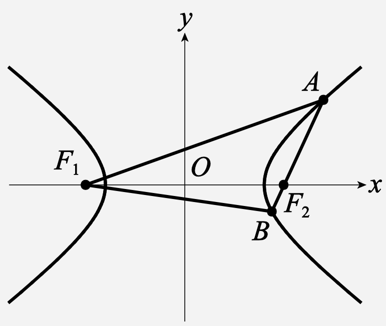
故假設兩函數 $f(x)=k^2$ 且 $g(x)=2kx-x^2=-\left(x-k\right)^2+k^2$ ，其圖形如下：



由圖形可觀察出在 $(0,2k)$ 的範圍內恆有 $f(x)\geq g(x)$ ，且 $g(x)$ 有最大值時，恰滿足 $f(x)=g(x)$ ；透過計算可進一步找出二次函數 $g(x)$ 在 $x=k$ 有最大值 k^2 ，而此時滿足 $x=v$ 。因此，由上述討論可歸納出**當 $f(x)$ 是常數函數時， $g(x)$ 產生最大值之處，恰為 $f(x)=g(x)$ 之處，但 $f(x)$ 不是常數函數時，例 1 提醒我們不一定可得到相同的結論。**

當然，提醒學生在 $x+y$ 不為定值時，需「小心地」使用算幾不等式求 xy 的極值，但這並非意味著就一定不能用，只是要多留意求極值的「過程」即可。舉下題為例：

設 $F_1(-5,0),F_2(5,0)$ 為 $\Gamma:\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的兩焦點，若 $\overline{AB}$ 為過 F_2 的任一焦弦，則△ ABF_1 面積的最小值為何？



有一種參考作法是如圖假設 A、B 兩點坐標分別為 (α_1,β_1) 與 (α_2,β_2) ，且另設 $\overleftrightarrow{AB}:x=ky+5$ ，聯立

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1\\ x=ky+5\end{cases},$$

可得

$$\left(9k^2-16\right)y^2+90ky+81=0\ ,$$

由根與係數關係可知

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2=\dfrac{-90k}{9k^2-16}\\ \beta_1\beta_2=\dfrac{81}{9k^2-16}\end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}\right)^2=\dfrac{1296\left(k^2+1\right)}{\left(9k^2-16\right)^2}\ .$$

然而所求

$$\triangle ABF_1\text{面積}=\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}\left[\beta_1+\left(-\beta_2\right)\right]$$

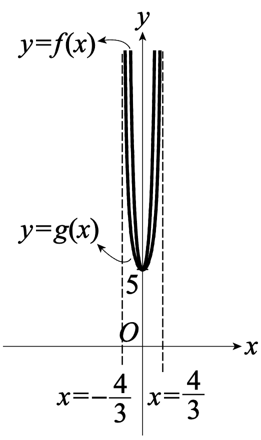
$$\geq 10\sqrt{-\beta_1\beta_2}$$

$$=10\sqrt{\frac{81}{16-9k^2}}$$

$$\geq\frac{45}{2}\ .$$

因為兩不等式等號成立的條件均為 $k=0$，故$\triangle ABF_1$有最小面積$\dfrac{45}{2}$。

觀察兩函數 $f(x)=\dfrac{1296\left(x^2+1\right)}{\left(9x^2-16\right)^2}$ 與 $g(x)=\dfrac{-81}{9x^2-16}$ 在 $-\dfrac{4}{3}\leq x\leq\dfrac{4}{3}$ 的圖形後，很明顯 $\beta_1-\beta_2$ 的最小值恰好發生在算幾不等式等號成立時。



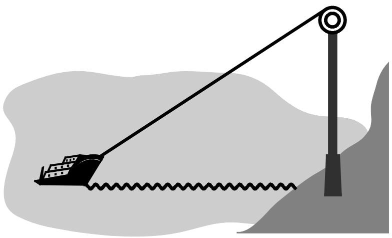
專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 89

☆☆

如下圖所示，滑輪拖著輪船，讓船靠近岸邊。問：滑輪捲動的繩子長度與輪船前進的距離何者較大？請證明之。



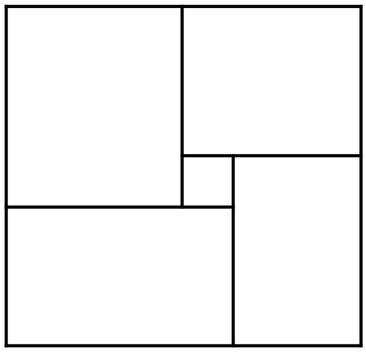
〔玩鎖・玩索〕

「兩邊之和大於第三邊」是大家在日常生活中與數學課程裡非常熟悉的三角不等式。這個概念的使用有時候很容易、很明顯，但有時卻不容易發覺。

遊戲 90

☆☆☆☆

在下圖中，五個小矩形圍成一個大矩形。



如果相關位置不改變（即只允許調整小矩形的邊長大小），那麼可否將五個小矩形調整成五個正方形，但仍然圍成一個大矩形呢？

〔玩鎖・玩索〕

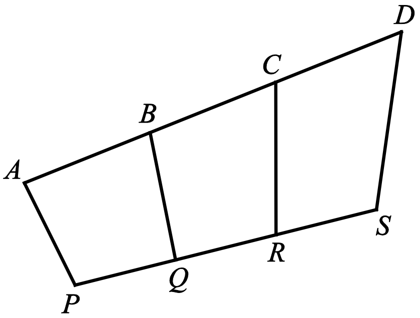
米開朗基羅正在做一座耶穌的塑像，有人跟他說：「你的創造是偉大的。」他說：「我什麼也沒有做，耶穌藏在這塊大理石裡面，我只是幫助他被釋放出來，他已經在那兒了，只是有超過了需要的大理石。有無關緊要的…我把那無關緊要的鑿去，我只是發現了他，我沒有創造他。」

畫家直接畫出人像或物體，就像直接推論出要證明的結果一樣，但是雕刻師傅採取相反的策略，他只是把不必要的大理石鑿開而已，就像去除所有錯誤的選項，正確的推論就呼之欲出了。因此直接證法由畫家的畫筆來擔綱，而反證法就委託雕刻師傅的刻刀演出了。

遊戲 91

☆☆☆☆☆

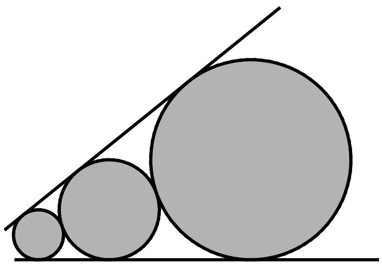
如下圖所示，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}, \overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}$，求證四邊形 $APQB, BQRC, CRSD$ 的面積構成等差數列。



〔玩鎖・玩索〕

這是九十七學年度教育部數學能力競賽決賽的口試試題。有趣又好玩的等差數列很難碰到，這道與面積相關的幾何題是很有意思的等差數列問題，而且有一定的難度。

在這裡順便提一道等比數列的幾何問題：如下圖所示，小中大三圓依序相切，且都與上下兩條線相切，



證明：小中大三圓的半徑構成等比數列。

遊戲 92

☆☆☆

這裡我們要介紹一道中位數與平均數的遊戲。給定三個已知數，例如：

$$a_1=53, a_2=13, a_3=41 \ .$$

這三個數 53,13,41 的中位數是 41。如果想要讓 $53,13,41,a_4$ 這四個數的平均數等於前三個數的中位數 41，那麼 a_4 必須滿足

$$\frac{53+13+41+a_4}{4}=41 \Rightarrow a_4=57 \ .$$

如果繼續想要讓 53,13,41,57 的中位數 $\frac{41+53}{2}=47$ 與 $53,13,41,57,a_5$ 的平均數相等，那麼 a_5 必須滿足

$$\frac{53+13+41+57+a_5}{5}=47 \Rightarrow a_5=71 \ .$$

如果這樣繼續下去，讓前 k 項 $53,13,41,57,\cdots,a_k$ 的中位數與前 $k+1$ 項 $53,13,41,57,\cdots,a_k,a_{k+1}$ 的平均數相等，那麼就可以得到一個數列 $\langle a_n \rangle$。根據上述規則，求

(1) a_6, a_7 與 a_8 的值。

(2) a_{12}, a_{13} 與 a_{14} 的值。

(3) 當 $n \geq 15$ 時，對 a_n 的值有何發現？

〔玩鎖・玩索〕

數學家把這樣的數列 $\langle a_n \rangle$ 稱為 M&m 數列，當前三項 a_1, a_2, a_3 恰有兩數相等時，例如：$a_1=a_2=3, a_3=2$，可以得到

$$a_4=4, a_5=a_6=\cdots=3 \ ,$$

也就是說，第五項之後就穩定在同一個值。數學家猜測：無論 a_1, a_2, a_3 為何，數列 $\langle a_n \rangle$ 最後都會穩定下來。

動手玩數學~破解秘笈 第22期

遊戲 85

(1) 顯然知道

$$\overline{AC}=2,\overline{BC}=\sqrt{3}\ .$$

因為△ACD 為等腰三角形，所以

$$\overline{CD}=\overline{AC}=2\ .$$

由直角△ABD 知

$$\overline{AD}=\sqrt{1^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{2}\ .$$

(2) 因為△ADE 為等腰三角形，所以

$$\overline{DE}=\overline{AD}=\sqrt{6}+\sqrt{2}\ .$$

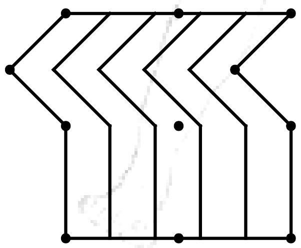
由直角△AEB 知

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+2+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{1}$$

$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\ .$$

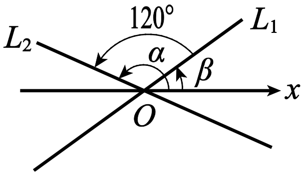
遊戲 86



遊戲 87

三角函數解法（正切函數的合成）：

將 O 設為原點，令 x 軸逆時針旋轉 β 後與直線 L_1 重合，逆時針旋轉 α 後與直線 L_2 重合，如下圖所示：



因為直線 L_1 的斜率 m 與 $\tan\beta$ 相同，直線 L_2 的斜率與 $\tan\alpha$ 相同，又 $\alpha-\beta=120°$ ，所以由正切函數的合成公式

$$\tan\left(\alpha-\beta\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

得

$$-\sqrt{3}=\tan 120°=\frac{\tan\alpha-m}{1+m\tan\alpha},$$

解得

$$\tan\alpha=\frac{m-\sqrt{3}}{\sqrt{3}m+1}\ .$$

故直線 L_2 的斜率為

$$\frac{m-\sqrt{3}}{\sqrt{3}m+1}\ .$$

複數解法：

將 O 設為原點，因為直線 L_1 的斜率為 m，所以點 $(1,m)$ 在直線 L_1 上。另逆時針旋轉 $120°$ 之後，點 $(1,m)$ 旋轉到點 (x,y) ，根據複數極式的乘法公式，得知

$$x+yi=\left(1+mi\right)\left(\cos 120°+i\sin 120°\right)$$

$$=\left(1+mi\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

即

$$x=\frac{-\sqrt{3}m-1}{2},y=\frac{-m+\sqrt{3}}{2}\ .$$

因此，直線 L_2 的斜率為

$$\frac{\frac{-m+\sqrt{3}}{2}}{\frac{-\sqrt{3}m-1}{2}}=\frac{m-\sqrt{3}}{\sqrt{3}m+1},$$

得證。

遊戲 88

設第 n 天的開機密碼為 p_n，根據題意，數列 $\langle p_n \rangle$ 具有遞迴關係式

$$p_1 = \sqrt{2} - 1, p_{n+1} = \frac{1 + p_n}{1 - p_n} \ (\ n \ge 1\ ).$$

經過計算，得

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{2} - 1, \\ p_2 &= \sqrt{2} + 1, \\ p_3 &= -\sqrt{2} - 1, \\ p_4 &= -\sqrt{2} + 1, \\ p_5 &= \sqrt{2} - 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

因為 $p_5 = p_1 = \sqrt{2} - 1$，根據遞迴關係式，之後的項會循環，所以數列 $\langle p_n \rangle$ 是每 4 項一循環的週期數列。因此，第 500 天跟第 4 天的開機密碼一樣，也就是說，第 500 天的開機密碼為 $-\sqrt{2} + 1$。

註：更改第一天的開機密碼仍然會被快速破解，想想看！