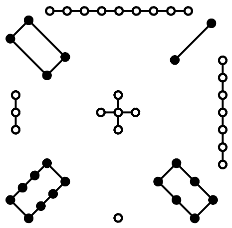
休閒數學的濫觴…中國的洛書

九宮者，二四為肩，六八為足，左三右七，戴九履一，五居中央。

許志農／臺灣師大數學系

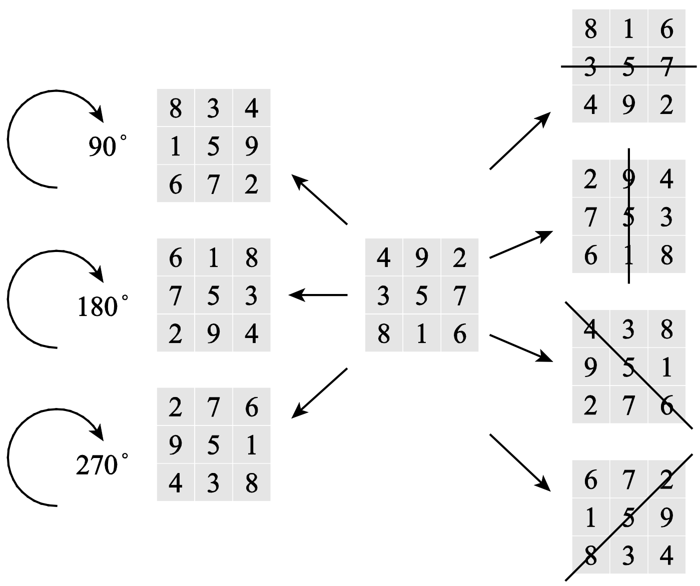
數學謎語，兒歌與遊戲，現在統稱為休閒數學，而休閒數學的一個里程碑係發生在公元前 2000 年的黃河岸邊。據說大禹治水的時候，看到一隻烏龜爬出洛水水面，這是一隻神龜，龜甲上有黑白點的圖案，代表 1 到 9，排成格狀，如下圖：



4	9	2
3	5	7
8	1	6

像這樣一個正方形，裡面的數字是由 1 開始的連續整數，每一行，每一列及兩條對角線的和都相等，稱之為「幻方」、「魔方陣」或「縱橫圖」，而中國人稱這個正方形為「洛書」（任意一行、任意一列以及兩條對角線的數字之和都是 15），歐洲人直到十四世紀才開始研究幻方，比中國人遲了近兩千年。南宋數學家楊輝在 1275 年所著的《續古摘奇算法》書中提到幻方的要訣為「戴九履一，左三右七，二四為肩，六八為足」。

我們有八種方式排列 1 到 9 的數字，使得所形成的3×3方塊成為幻方，但是這八個幻方經過旋轉或鏡射後，事實上都是同一個，如圖所示。因此，三階的幻方只有洛書這一個而已。



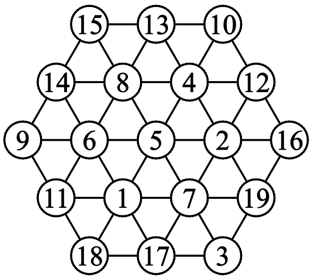
幻方不必限定是3×3的格子，下圖是 1957 年於陝西西安市元代安西王府遺址出土的「幻方鐵板」，出土地點在今天西安火車站東北三公里處，是元代安西王府的遺址，而安西王府是忽必烈的三兒子忙哥剌的王宮。

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

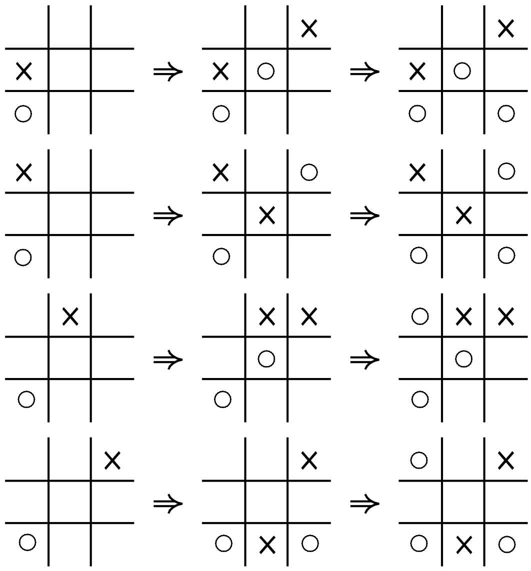
元代幻方鐵板

幻方鐵板上每行均由六個數字排列，組成方陣，不論縱行或橫行，或對角線上的數字，相加之和都是 111。這個蘊含著數學原理的六六幻方，在古代被視為奇妙的神秘之物。人們把它鄭重地裝進石函，埋入房基中，用作鎮宅和防災避邪的吉祥物。

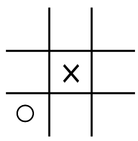
雖然幻方的歷史已很悠久，但由於幻方中出現的一種變幻莫測的神奇數字之美，人們往往花上幾小時把玩幻方而樂此不疲。在 1910 年，美國有一位鐵路公司職員阿當斯是一名幻方的業餘愛好者，他渴望能造出一個三階的六角幻方。歷經 47 個寒暑，經過無數次的挫折與失敗，終於找到了下圖的六角幻方，在今日，可以用電子計算機證明六角幻方也只有阿當斯構造的這個而已。



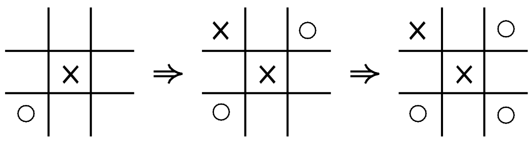
洛書可以看成在九宮格裡填上 1 到 9 的數字，而且行、列、對角線的和都是 15 的休閒數學。在九宮格上玩得膾炙人口的遊戲大概就是圈叉遊戲了，這遊戲有兩位玩家，先玩者打「○」，而後玩者打「╳」，輪流在九宮格打自己的符號，最先以橫、直或斜連成一線者獲勝。玩過此遊戲的人都知道，這是一道先玩者控制，後玩者防守的遊戲，只要雙方沒犯錯，最後都會以平手收場。先玩者經常誤以為「將第一個圓圈畫在正中央」是最佳的策略，事實上並非如此，而是應該將第一個圓圈畫在角落才有最大的勝算。例如以下四種開局，先玩者都可以製造出雙頭蛇而取勝：



因此，在這種開局之下（含另外三種對稱性的開局），後玩者只能以下列方式（將「╳」落在正中央）來對應



即使是這樣的對應，先玩者還是可以在下一手誘導對手犯錯，下圖就是最常見的犯錯模式：

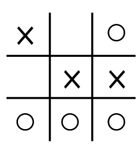


將「╳」落在左上角是合乎直覺的想法，但這樣反讓先玩者取得雙頭蛇。

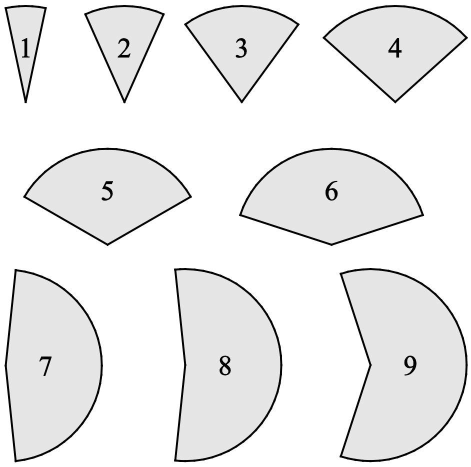
由上述分析知道「圈叉遊戲雖然容易平手，但是先玩者若從角落出發，反而容易誘導對手犯錯，取得雙頭蛇，進而得勝；反之若由正中央出發，反而容易平手收場，原因在對手提高了警覺性。」圈叉遊戲是第一個製作在電腦上的益智遊戲，在 1952 年，EDSAC 電腦就有圈叉遊戲了。

將洛書的邊去掉就成為井字上填有 1 到 9 數字的圖形，且行、列與對角線的和總是 15。當我們將這個圖形與一盤圈叉遊戲對照時，不難發現：連線的三個「○」所對應的數字和 8+1+6 等於 15。因此，可以將圈叉遊戲想成從 1、2、3、4、5、6、7、8、9 的九個數字中輪流取數，誰先取到有三個數字的和為 15 者勝（和為 15 代表連線的意思）。

4	9	2
3	5	7
8	1	6



有了這種洛書與圈叉遊戲的對照，該是科學家的餘興節目登場的時候了，這裡要介紹一道乍看難以捉摸，但從另一個方向切入變得容易得多的遊戲。有編號 1、2、3、⋯、9 的九塊扇形蛋糕，如下圖所示，1 號蛋糕的頂角為 24 度，2 號有 48 度，3 號是 72 度，依此類推，也就是說，最小的 1 號蛋糕只包含 1 片蛋糕，⋯，而最大的 9 號蛋糕由 9 片蛋糕組成：



現在甲、乙兩人各擁有一個空的圓形蛋糕拼盤，其半徑與每塊蛋糕半徑一致，如下圖所示：

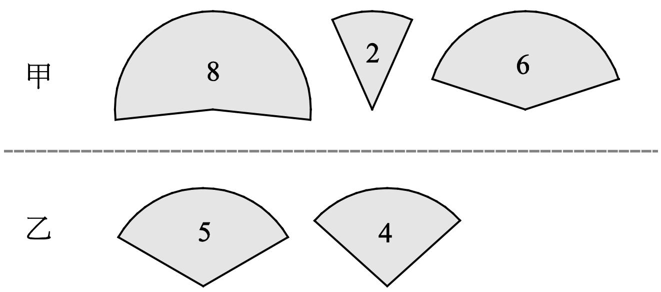
填蛋糕圓盤遊戲的規則為

(1) 甲、乙輪流從九塊蛋糕中挑選蛋糕，每次挑選一塊，挑過的不能再挑。

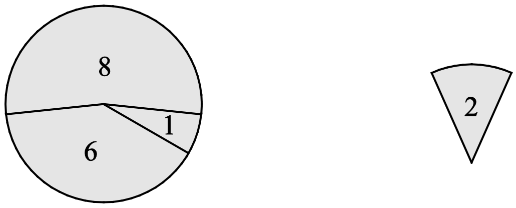
(2) 遊戲至多進行四回合，在此情形下，每人各選了四塊蛋糕，僅剩一塊蛋糕沒被選中。

(3) 當某人所挑選的蛋糕中，可以拿出三塊，而且剛好填滿他的空圓盤，此人就是勝利者。

三塊蛋糕剛好可以填滿空圓盤是指「這三塊蛋糕總共有 15 片」的意思。讓我們舉例說明一下，下圖是甲、乙玩填蛋糕圓盤遊戲的前三回合：



遊戲進行到第三輪，當甲選了 6 片蛋糕時，雖然甲的三塊蛋糕和8＋2＋6不是 15 片，無法拼進空的圓盤，但是甲已經勝券在握了。原因是乙無法選 6 片的蛋糕（甲剛剛選走）來湊成 15 片，而進入第四輪後，甲可以選 1 片或 7 片都可以湊成三塊共 15 片的圓形蛋糕盤。舉例來說，如果乙在第三輪選 7 片的蛋糕，那麼甲在接下來選 1 片蛋糕，這樣 8、6 及 1 片這三塊蛋糕剛好是 15 片，甲就是勝利者，他的拼盤如下圖所示，其中 2 片蛋糕是剩下的：



在輪流拿取蛋糕塊的過程中，如果你想要的蛋糕塊已經被拿走，必須找到另一種組合方式，用你已經選擇的蛋糕塊和剩下的蛋糕塊，湊成 15 片。但一定要用正好三塊來填滿蛋糕盤，用 8 片及 7 片的兩塊蛋糕來填不算贏，也不能用 1、2、4、8 片的四塊來組合。

從不同的角度看問題，原來難解的填蛋糕圓盤遊戲或許有可能突然迎刃而解，想想看，洛書與圈叉遊戲可以幫上忙嗎？將洛書上的九個數字想成九塊蛋糕的片數，並填在井字的九個位置上，如下圖的左圖所示，再將前面甲、乙兩人拿取蛋糕塊的過程以畫圈叉的形式呈現在這個綜合的圖形上，如下圖的右圖所示：

4	9	2
3	5	7
8	1	6

~~4~~	9	2
3	~~5~~	7
8	1	6

從圖形中發現，乙在第二輪選取角落的 4 片蛋糕是失敗關鍵，這時甲僅需在第三輪選 6 片蛋糕就製造出雙頭蛇，並在第四輪連線取勝，完成三塊拼盤。

在圈叉遊戲中，占正中央的戰術並不高明，對手只需從角落防守就會平手；但是，於填蛋糕圓盤遊戲中，先拿 5 片蛋糕，只要對手沒拿 2、4、6、8 片蛋糕，可就輸了。這說明「填蛋糕圓盤遊戲」是包裝得比較密不透風的遊戲。當然，只要雙方都推敲無誤，填蛋糕圓盤遊戲最終還是會平手的，也就是說，無人可以拿出三塊蛋糕來填滿圓盤。

心中有「井字」，腦裡有「洛書」，是玩「填蛋糕圓盤遊戲」最大勝算的依靠。這遊戲的原始來源是臉譜出版的科普書籍《桑老師的瘋狂數學課》，並經過本人適當的取捨、修改、增補與串連。原書著者馬庫斯．杜．桑托伊是牛津大學數學教授，《週日獨立報》評選為當今英國最重要的科學家之一，有「數學界的莫札特」之譽。桑托伊的科普講座不僅在英國，甚至於全世界都是赫赫有名。最後，感謝洪萬生老師（師大數學系退休教授）推薦本人閱讀此書，學生陳昱達對圈叉遊戲戰術的指導及陳裕錫老師完成填蛋糕圓盤遊戲的 Flash 版。

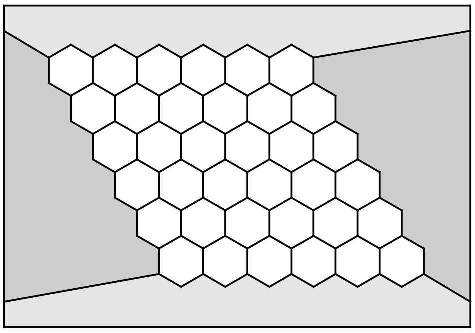
納許棋…諾貝爾獎得主的遊戲

在你了解它之前，它是魔術；了解它之後，它就是數學了

許志農／臺灣師大數學系

納許（John Nash）是一位不折不扣的數學家，他在就讀普林斯頓研究所時，發明了「納許棋」，曾流行了一段時間，正值人生璀璨的三十歲之時，納許陷入失心與幻想，在 1960 至 1990 這漫長的三十年間，納許鬼魅似的出現在普林斯頓校園，又於 1990 年傳奇的甦醒，並旋於 1994 年獲頒諾貝爾經濟學獎。國內影音出租店就可以租到的片子《美麗境界》就是在描述納許傳奇性的一生，有一幕是納許拿著紅色簽字筆在透明玻璃上畫正六邊形的情景，應該是在敘說他發明過「納許棋」這道遊戲吧！

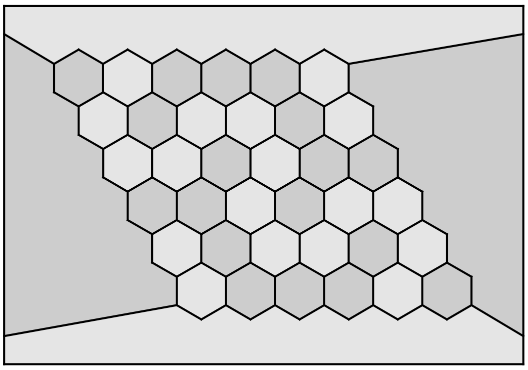
1942 年，丹麥哥本哈根大學數學系教授海恩（Piet Hein）在上課的講義裡介紹過納許棋，而當地報紙也在同年的 12 月 26 日刊載了這道遊戲的玩法，而且這道遊戲在丹麥很受歡迎。至於納許重新發明這道遊戲的時間點則在 1949 年就讀普林斯頓高等數學研究所的時候。馬丁‧加德納是美國有名的業餘數學大師，從 1956 到 1986 這三十年間，在《科學人》雜誌上開設一個數學遊戲專欄，在 1957 年的專欄中提到「海恩是納許棋的第一位發明者，不過納許的重新發現及對納許棋的理論有相當重要的貢獻。」將納許棋與五子棋、象棋、圍棋及西洋棋相比，他們的共同點都是兩個人玩的遊戲，而不同的地方在棋盤的形狀，納許棋盤是由正六邊形的格子所構成。我認識納許是從他的納許棋盤開始的，棋盤的樣子如下（這是 6 階的棋盤，共由$6\times6=36$塊正六邊形土地密鋪而成）：



納許棋盤

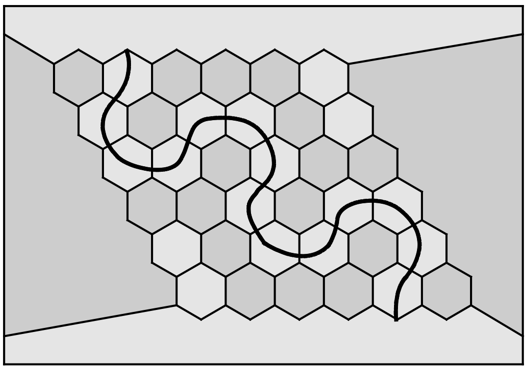
有了棋盤，接下來就是「怎麼玩？勝負該如何判定呢？」我們把棋盤內正六邊形土地以外的區域著色，讓它涇渭分明，上、下兩塊塗成紅色，是紅方的基本領土；而左、右兩側則塗成藍色，為藍方的基本領土。玩法就是讓紅、藍雙方輪流占領正六邊形的土地，每次只能占一塊，並將占領的土地塗成紅色（紅方的領土）或畫成藍色（藍方的土地）。顯然地，在十八回合後，紅方與藍方將分別占領三十六塊土地的一半。

至於遊戲的勝負如何判定呢？那要看哪一方可以將他的兩塊基本領土，用所占領的正六邊形土地連接起來。也就是說，紅方從上方紅色領土出發，在只能經過他占領的正六邊形土地的情況下，可以到達下方紅色領土時，紅方就獲勝；同樣的，若藍方從左側的藍色領土出發，利用他所占領的正六邊形土地，可以抵達右側的藍色領土，則藍方得勝。舉例來說，下圖是紅方與藍方在纏鬥十八回合後的交戰紀錄（紅色正六邊形為紅方所占，藍色正六邊形為藍方所有）：



納許棋盤

從這交戰紀錄圖，能一眼看出誰獲勝，或者平手嗎（雙方都無法將他們的兩塊基本領土連接起來）？從下圖中，因為粗黑線是貫穿紅方兩塊基本領土的一條路徑，所以這盤棋由紅方得勝：



納許棋盤

至此，相信讀者容易理解納許棋是一道規則簡單，好玩又有趣的遊戲，但是也會發現這道遊戲的一些特性，例如，至多十八回合遊戲就會結束，而且不可能兩人都獲勝，這是因為當一方可以串連他的基本領土時，另一方的土地肯定被這串連的路徑所阻隔。也就是說，至多僅有一方可以把他的領土串連起來。有沒有可能發生雙方都無法串連他們的基本領土之情形呢？知道這個答案後，肯定讓你對納許棋更愛不釋手，同時這也是納許的兩個重要結論之一：

無論雙方如何占領正六邊形土地，最後一定有一方會得到勝利，也就是說，納許棋是一種不會平手的遊戲。

我們可以將納許棋盤設計成電路，當一方將兩片土地串連起來時，電就通了，會亮燈，從亮燈的顏色就可以知道誰獲勝。想把這道遊戲設計成電腦可以玩的遊戲，就需要從電路這個方向來寫程式。幸運的是，師大數學系的林俊吉同事跟我推薦一個網路上可以下載的程式，透過這個程式就可以在電腦上玩納許棋遊戲了，這程式是前蘇聯的一位數學家寫的，可以從以下的網址下載程式：

http://home.earthlink.net/~vanshel/

這程式的功力不錯，可以跟電腦玩，也可以兩人玩（電腦只做輸贏判定），甚至可以改變棋盤的大小。

兩人玩的遊戲有許多，如象棋、五子棋、圍棋、西洋棋，猜拳（剪刀、石頭、布）等，但是它們都可能和棋。然而，納許棋這道遊戲不可能和棋，一定可以分出勝負，而且是在十八回合內分出勝負，有點不可思議。要如何證明「不會和棋」呢？這似乎超過我們的能力，或者說，截至目前為止，所學的數學沒辦法克服這樣的問題。真的如此嗎？讓我們用數學課堂外的想法來了解它吧！

剪紙是中國最為流行的民間藝術之一，根據考古其歷史可追溯到公元六世紀。唐朝有位詩人曾經有著「欲剪宜春字，春寒入剪刀」的詩句，可見剪紙這項技藝在當時社會中，已經是十分普遍的一項民間技藝了。

使用屬於右腦的剪紙藝術來處理左腦領域的納許棋遊戲看似詭異，其實是一種跨界的思考，也是一種普遍的現象。一個明顯的例子就是心算，心算可以透過快速的左腦運作來進行演算，但是日本的心算高手都是在腦海裡讓算盤浮現的方法來運算的，這種不需要思考，只讓影像浮現的珠算式心算，會更快且更準，而它使用的卻是右腦。

我已經忘了將納許棋跟剪紙技藝牽扯在一起的思維是怎麼產生的，甚至是什麼時候，在哪裡，也記不得了。但是，他們的操作方法倒是寫得蠻詳細，以下是我記錄下來的說明「納許棋會跟剪紙技藝有關嗎？有的，因為它們都在紙上操作，想想看，把其中一方的領土剪掉，剩下的紙張會是什麼模樣呢？」

(1) 利用剪刀將藍方的左、右兩塊基本領土給剪掉。

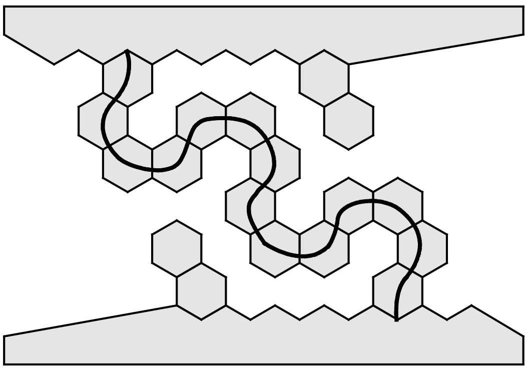
(2) 再利用剪刀將藍方占領的十八塊正六邊形土地也剪掉。

(3) 此時棋盤剩下紅方的上、下兩塊基本領土及它所占領的十八塊正六邊形紅色土地。

(4) 將右手抓住紅方上方紅色基本領土，左手捏著紅方下方的基本領土，看看是否可以將它們拉開。

(5) 若不能拉開，則表示紅方的上、下兩塊基本領土被它占領的正六邊形灰色土地串連起來。這種情形就像下圖所示的一樣，紅方勝。

(6) 若可以拉開，則所拉開右手（或左手）邊緣的藍色土地，是條可以貫穿藍方左、右兩塊基本領土的路徑，這樣代表藍方勝。



納許棋盤

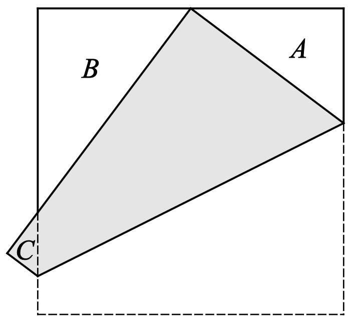
簡單說，拿出剪刀將藍方的基本領土及它所占的六邊形土地都剪掉，紅方的兩塊基本領土若相連，紅方勝，不相連，藍方勝。

從剪紙的這項技藝，我們已經知道納許棋是一種不會平手的遊戲，這真是有夠怪的說明。接下來的問題就是「哪方有必勝的策略呢？」這是一道更困難的問題，它的解法也超玄的，想知道結果可以參考《算術講義》那本書。不過還是把納許的第二個結論寫下來：

> 先玩的紅方只要沒犯錯，應該會獲勝。

從「不會平手」到「先玩有優勢」是納許對該遊戲的兩個貢獻，問題是沒犯錯講得太籠統了，納許也沒有把贏的策略寫下來，他只用抽象的方法證明先玩有優勢而已。直到今日，找尋贏的具體策略仍然是納許棋遊戲的一大難題。

剪紙給人的刻板印象就是一種藝術，沒想到它也可以跨界幫忙解決數學問題，同樣的情況也發生在摺紙這項技藝上。日本摺紙大師芳賀和夫說：「大多數的日本人都熱衷於創造新的摺紙形狀，我的目的是跳脫在實際上創造新東西，反而是發現數學現象。這就是為什麼我會這麼感興趣。就算在極其簡單的世界，一樣能夠發現令人著迷的東西。」從這段話可以理解，芳賀傾向於將摺紙跨界來發現或解決數學問題，而不是將它僅看成一項藝術。在芳賀的心中，摺紙是沒有算式的數學，他以細膩的巧手取代抽象又難懂的數學式子，現在就讓我們來欣賞一道芳賀的摺紙術，在 1978 年，芳賀將正方形紙的一角摺往一邊的中點，結果製造出三個埃及直角三角形 A 、 B 及 C （三邊比例為 $3:4:5$ 的三角形），如下圖所示：



「尺規作圖」與「摺紙」都是在紙張上工作，但是他們卻有極大的不同限制，尺規作圖只能貼在平面上操作，而摺紙卻可以在空間中翻轉與運行。所以利用摺紙跨界來解決古希臘尺規作圖難題也是一種合理的想法。在 1936 年，義大利數學家利用摺紙可以摺出長度為 $\sqrt[3]{2}$ 的線段，這也證明了，在容許摺紙的情形下，古希臘的「倍立方問題」是有解的。同樣，在容許摺紙的情形下，「三等分角問題」也是成立的，甚至連無法尺規作圖的正七邊形也可以透過摺紙的技術摺出來。

讓我們跳回納許的棋盤吧！納許棋盤是由正六邊形的幾何圖形所構成，據說普林斯頓高等研究所當時的磁磚就是正六邊形，而這也是啟發納許發明此遊戲的動機之一。去過澎湖的人一定會到有名的天后宮參觀，仔細觀察其地磚，將會發現也用了正六邊形的磁磚。事實上，金門的洋樓或廟宇、鹿港的天后宮與龍山寺也使用正六邊形的磁磚，正六邊形是很好用的幾何圖形，特別是在鑲嵌平面上。

科普好書推薦專欄

洪萬生／臺灣師範大學數學系退休教授

推薦 01

書名：《數學女孩：哥德爾不完備定理》
作者：結城浩
譯者：鍾霓
出版社：世茂出版社
出版日期：2012 年 4 月
ISBN：9789866097416
關鍵詞：哥德爾不完備定理、數理邏輯、皮亞諾公設、
　　　　對角線論證法

本書是結城浩《數學女孩》三部曲中的最後一部，主題是哥德爾不完備定理。儘管這個定理完成於二十世紀上半葉的 1931 年，但卻是數理邏輯學（mathematical logic）與數學基礎（foundations of mathematics）研究的封頂之作。

在《數學女孩》的第一部曲（臺譯書名「數學少女」）中，作者將基本且深刻的數學知識，簡化到一般高中生可以理解的程度，足以顯示他不只受過非常嚴格的數學訓練，因而對於數學思維的掌握非常得心應手，同時，也對如何普及他的數學經驗深具信心。不過，更值得注意的，正如結城浩在《數學女孩：費馬最後定理》（第二部曲）所呈現，他總是適時地從高觀點來歸納或提示一些數學（抽象）結構，讓讀者不至於迷失在徒然解題的迷魂陣中，而無法自拔。此外，他在這三部曲的「旅行地圖」中所進行的連結與對比，也一再地提醒我們數學是一個「有機的整體」，因此，數學史上的一些重大突破，往往需要「跨界」的思維。

另一方面，從小說敘事的觀點來看，作者在這三部曲所採取的「比喻」，都是高中男生對於數學世界 vs.感情世界的一種未來憧憬：「我對數學的『憧憬』和男孩對女孩抱持的情感，在某些地方有點相似」。因此，在本書中，數學作為一種文學比喻就出現了另類風貌，值得數學小說的愛好者特別注意。

現在，我們針對這三部曲所處理的主題，提供一點簡要的說明，俾便讀者閱讀時有所參考與借鑒。《數學少女》的主題是生成函數，作者的連結與跨界分享，相當令人感動：「我和米爾迦使用生成函數求得斐波那契數列一般項，就像原本捧在手上快要散落的數列，被名為生成函

數的一條線串起來，那真是一次難以言喻的經驗。」此外，他還利用生成函數處理摺積與分折數等問題，甚至還提及黎曼 ζ 函數，尤其是 $\zeta(2)$ 與歐拉發現平方倒數無窮和之公式的關係。在該書中，生成函數是一種概念工具，它大大地有助於我們解決許多數學問題，離散型或連續型都包括在內。

這種主題式的敘事，到了《數學女孩：費馬最後定理》與《數學女孩：哥德爾不完備定理》，就變成了偉大的定理。顧名思義，《數學女孩：費馬最後定理》的主題就是費馬最後定理。作者在該書中，為了讓讀者多少掌握有關此一偉大證明的輪廓，特別提供了一個概略的說明。基於此，他還進一步介紹橢圓函數、模曲線與自守形式。最後，懷爾斯（Andrew Wiles）在橢圓曲線與自守形式之間成功地搭起一座橋樑，而完成了費馬最後定理的證明。由於這些相關數學知識都極其抽象，一般讀者難以「一睹芳澤」，因此，作者的「旅行地圖」仿效類似網路「超連結」資訊的手法，鼓勵讀者進行形式推論，即使無從理解個別命題（或定理）之內容為何。而這，當然也呼應了這三部曲所強調的數學知識的結構面向（structural aspects）意義。

顯然，在第二部曲中，結城浩無法邀請（也不期待！）讀者參與費馬最後定理的證明過程，這一形同登天的任務，當然受限於目前數學教育與普及水準的力有未逮。相形之下，在這三部曲的終曲中，結城浩的野心卻是哥德爾不完備定理之解說。這個普及的願景並非不可企及，因為作者所訴求的正是讀者的數學成熟度。這種成熟度與高等數學的背景知識並不具有必然關係，因此，集合論、數理邏輯以及數學基礎等數學分支之學習，通常只要預設高中數學背景知識即可。事實上，這幾門學問在二十世紀下半葉，也一直吸引英美兩國哲學家的興趣。基於此一考量，在本書中，作者就使盡了渾身解數，希望讀者分享他對不完備定理的理解。

總之，不完備定理之證明所涉及的形式系統（formal system）之相容與不完備之相關固然有其難度，但是，對於充滿好奇心的讀者來說，這卻是可以親近的一個智力遊戲或挑戰。任何人（無論有無高等數學之經驗）想要測試數學思維的成熟度，本書的形式證明正是最好的指標。更何況，如果不深入探討此一定理，那麼，物理學家歐本海默（Robert Oppenheimer）如何稱頌不完備定理為「理性的極限」，我們大概就不知從何說起了。

推薦 02

書名：《上帝是數學家？》Is God a Mathematician?

作者：馬里歐．李維歐（Mario Livio）

譯者：洪世民

出版社：繁星多媒體

出版日期：2012 年 6 月

ISBN：9789866194924

關鍵詞：數學知識本質、數學家、發現、發明、柏拉圖主義、上帝、不合理的有效性

本書書名雖然是《上帝是數學家？》但是，其核心問題卻是數學知識本質為何：數學知識究竟是被發現的？還是被發明或被創造的？作者馬里歐．李維歐（Mario Livio）利用本書八章（第二至九章）的篇幅，說明此一提問在西方科學史／數學史脈絡中的意義，最後，在第九章（本書最後一章）總結他自己的一家之言。

馬里歐．李維歐是一位資深的太空物理科學家，對於科普寫作也不遺餘力，他在臺灣出版的中譯作品有《黃金比例：1.61803……的秘密》和《無解的方程式：數學天才與對稱性之謎的鬥智之旅》，都頗受歡迎，可見他對敘事（narrative）相當得心應手。事實上，在本書中，作者的書寫也是敘事多於論述（discourse），因此，從數學史實或科學史實舉例比喻，顯然就是他的主要進路了。當然，由於西方科學／數學發展無法切割它們與哲學、宗教的對話，所以，他儘可能透過原始文獻（primary sources）說明畢達哥拉斯的命數論（numerology）與柏拉圖數學哲學，乃至十七世紀的科學 vs.宗教議題，特別是十七世紀伽利略與笛卡兒的案例，也不令我們感到意外。這種在歷史文化脈絡中尋求數學與科學發展的價值與意義之進路，對於他的科普敘事，的確是一大利多，值得科普寫作者省思與借鏡。

數學知識的永恆性之觀點始自古希臘的畢達哥拉斯，後來經由柏拉圖的系統論述而底定。在十七世紀，這種觀點隨著科學革命的巨大成就，而成為西方世界的主流思想，例如伽利略、克卜勒與牛頓在天文與物理方面的貢獻，就是最好的見證。為了對抗基督教的宗教權威，「上帝是數學家」的說法逐漸在此時成為科學家的護身符。到了十八世紀，西方數學家為了擴充數學的威力，將其應用範圍從已經大力開拓的自然界轉向人文世界，於是，機率論與統計學遂應運而生。現在，數學（特別是微積分）竟連不確定的人文社會現象，似乎都可以放手處理了。

這種理性時代（Age of Reason）的樂觀，似乎在十九世紀非歐幾何（non-Euclidean geometry）問世之後，遭遇了前所未有的挑戰。不過，數學家面對這種全新的、且與歐氏幾何相對一致（relative consistent）的幾何系統，他們所修正的，卻是有關幾何真理（geometric truth）的更基進概念，亦即，正如集合論的締造者康托爾（Georg Cantor）所指出：數學的本質在於它的完全自由，不需要與自然世界建立任何的對應關係。不過，呼應柏拉圖主義，數學家相信「數學是一個獨立的真理世界，它的存在與物理宇宙的存在同樣真實」。

無論如何，由於新的數學知識系統都涉及邏輯一致性（consistency）問題，因此，數學與邏輯成了無法切斷的臍帶。在本書第七章，作者追溯邏輯的發展史，止於哥德爾（Kurt Godel）不完備定理（incompleteness theorem）的劃時代意義。現在，如果所有存在的數學都是不完備的形式（主義）遊戲（formalistic game），那麼，以這種「靠不住」的系統為模型，我們又如何期待它引導出有關宇宙及其運作的深刻見解呢，從而發揮它的「不合理的有效性」（unreasonable effectiveness）？

數學何以擁有這麼多非常成功的「不合理的有效性」（unreasonable effectiveness）？這是本書第八章的主題，也是無論主張數學是被發現的還是人類所創造的，都必須面對的議題。作者特別以結理論（knot theory）為例，指出在 1860 年湯姆森（William Thomson，即凱爾文爵士 Lord Kelvin, 1824～1907）之後，有關結的研究原來已經不具有實用意義，然而，在 1970 年代之後，物理學家發現弦理論（一種萬有理論 theory of everything）和結理論可以和諧共生。一方面，弦（string）理論得益於結（knot）理論的研究成果，另一方面，弦理論也啟示了結理論的新見解。因此，結理論的故事，又再一次漂亮地證明了數學出人意表的力量。

結理論的研究大大地受惠於十九世紀英國物理學家湯姆森的原子模型之研究。根據湯姆森的想像與推論，原子是「打了結的」以太之管子，如此，自然界所以會出現各種化學元素，正是因為有各式各樣的結的緣故。針對這段科學史插曲，作者提供十分深刻的評論：

> 如果湯姆森的猜測在今天聽來頗為瘋狂，那只是因為我們有一整個世紀習慣和實驗性地測試正確的原子模型—電子繞著原子核旋轉。但當時是 1860 年的英格蘭，而湯姆森為繁複煙環的穩定性和振動能力深深打動—這兩種特性在當時被認為是塑造原子模型不可或缺之物。為發展與元素週期表等價的結，湯姆森必須將結分類—找出可能有哪些不同的結，而這正是這種將繩結分類的需求，激發了世人對繩結數學的強烈興趣。

換言之，這是一個後來被淘汰的科學假說如何引導數學研究的一個極為有趣的歷史案例。正如前述，自然科學理論會被汰舊更新，亦即，自然科學的進展出自它的革命（revolution），然而，數學理論卻可永恆不朽。

這種不朽性（eternity）即使在數學不是先驗（a priori）存在，而是被創造時，仍然可以成立。這種情況不只適用於人類世界，如果深海水母也有智慧，那麼，正如作者引述二十世紀偉大數學家艾提雅（Michael Atiyah）所比喻的「水母數學」，也一定可以在水母世界不朽才是：

> 讓我們想像那種「可以數數的」智慧並非存在於人類，而是在某隻離群索居，深埋於太平洋深淵的巨大水母身上。除了周遭的水，沒有個別物體的體驗。運動、溫度和壓力為它提供基本感知資料。在這麼一個純連續統（continuum）中，離散不會發生，也就沒有東西可以數了。

顯然，艾提雅的觀點呼應了認知科學家有關人類大腦演化的看法：「如果我們觀察大腦的演化脈絡，那麼數學在物理科學的神秘成就，就至少有一部分可以說明了。大腦演化是為了處理物理世界，因此為達成這個目的而發展出數學這種語言，應不是太驚人之事。」更甚者，此一觀點也批判了數學哲學的柏拉圖主義（Platonism）：數學是存在於我們之外的客觀真理（objective truth）。在這一點上，作者提供了非常簡單但精彩的論述。他以哥德巴赫猜想（Goldbach's conjecture）與卡塔朗猜想（Catalan's conjecture）為例，說明數學是一種客觀真理的難題之一。如果前一猜想可以在 2016 年前解決，那麼，我們是否可以說那個命題在笛卡兒率先想到時就真實了？

這樣的詰問當然有一點過分刁難。不過，請再看卡塔朗猜想。這個在 1844 年由比利時數學家卡塔朗所提出來的猜測，早在 1342 年就曾引起數學家李維・班・吉爾森（Levi Ben Gerson）的注意，並且提供了部分解答。同樣地，在 1976 年，數學家羅伯特・提得曼（Robert Tijdeman）也邁進了一步。最後，在 2002 年，由羅馬尼亞數學家普瑞達・米哈雷斯庫（Preda Mihailescu）完成證明，並在 2004 年獲得確認。如此一來，卡塔朗猜想是什麼時候便正確的？是 1342 年？1844 年？1976 年？2002 年？還是 2004 年？「難道那句敘述（按：指卡塔朗猜想）不是恆為真，只是我們先前不知道而已？」

顯然基於數學與自然科學的不可須臾分離，作者也在多處場合強調科學家的數學素養之不可或缺。比如說吧，牛頓同時代的胡克（Robert Hooke, 1635～1703）儘管已經察覺到平方反比定律的重要性，但是，由於他無法以數學的語言闡述他的理念，以致於讓牛頓獨占鼇頭，而發現不朽的萬有引力定律。事實上，這個定律必須「連結」克卜勒三大行星定律，才能真正成為名符其實的「萬有」（universal）。正如牛頓自己所說的，在 1666 年，「我開始想像將重力延伸至月球軌道，也找出如何評估環繞甲星球運轉的乙星球，會對甲星球表面施加多大的力量，我從克卜勒的『行星軌道週期的平方與其距軌道中心的立方成正比』的定律推斷，使行星繞既定軌道運行的力，必定與它們和軌道中心距離平方成反比：依此我比較了使用月球繞其軌道的力量，與地球表面的重力，結果發現答案相當接近。」

最後，我們也必須稍加評論本書有關數學史本身的一些論述，尤其是三位最偉大數學家的提法。阿基米德、牛頓與高斯誠然是最偉大級的數學家，甚至他們的進路之神奇堪稱魔術師而無愧。同時，他們的成就也不僅限於數學方面。不過，除了他們三位之外，至少還有歐拉（Euler）可以相提並論。其實，目前數學通史論述早已超越這種過度簡化歷史的說法，只是一般科普書籍仍然喜歡「三大」或「幾大」提法，我們也就不必過分在意了。儘管如此，作者對於本書所提及之主要人物之行止與著述，都有相當深入的說明，其特點則是從他的充分引述原始文獻可以看得出來，譬如說吧，他尋求參訪「阿基米德失落羊皮書」的報導，就不只是出自博雅的動機而已。當然，在許多敘事的細微之處，比方說，牛頓自認為「站在巨人的肩上」，是不是針對胡克的挑戰而意有所指，作者也多方援引，足見他對於現代科學史家的相關論述，花了相當的時間與心力，這些都可以見證他的忠於科普敘事之品質。

總之，無論數學知識是被發現的、被發明的，或是如同本書作者所主張的，是被發現加被發明的，都可以部分說明數學在實用上這種「不合理的有效性」。基於多重宇宙的假說，也許數學不是只有一種，不過，如果人類或水母的心智都是上帝的創造物，那麼，針對（多重）宇宙的現象之說明，上帝是數學家就是一個十分簡單、但卻強而有力的比喻了。

附記：這是為了本書中譯版（由繁星多媒體股份有限公司出版）而寫的推薦文。

新北市101學年度市立高中職數學科競賽試題

填充題（共有 6 題，除第 1 題 5 分外，其餘每題都是 7 分，總計 40 分）

1. 若數列$\langle a_n \rangle$滿足遞迴關係式

$$a_1 = 102\text{，}a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n - 1}\text{（}n \geq 1\text{），}$$

則 $a_{99} =$____________。

2. 在$\triangle ABC$中，$\angle A = 30°$，$\angle B = 45°$，且其周長為$3+\sqrt{2}+\sqrt{3}$，則$\triangle ABC$的外接圓半徑為____________。

3. 一次擲 4 個公正的骰子，若出現的點數中最大為M，最小為m，則$M-m>1$的機率為____________。

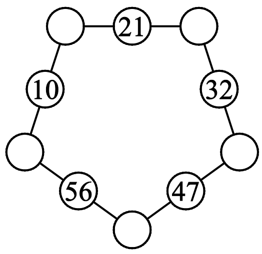
4. 將分數

$$\frac{\sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{2}+\sqrt{46-9\sqrt{11}}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

盡可能化簡成最簡單的形式。

5. 對於任意實數x而言，$2x^2+2(k-4)x+k$恆為正數，則k的範圍為____________。

6. 在下圖的五邊形中，每邊的數字和都是100：



最下方的數字為____________。

參考答案

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$\frac{99}{100}$	$\sqrt{2}$	$\frac{305}{324}$	$\frac{\sqrt{11}}{11}$	$2<k<8$	9

計算證明題（共有 4 題，總計 50 分）

1. 設 r 為正實數，且 1、r、r^2 剛好是三角形的三邊邊長。

   (1) 求 r 的範圍。

   (2) 已知此三角形的邊長和為 $\dfrac{11}{4}$，求 r 的值。（需化為最簡單的形式）（12 分）

2. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的每一項之值都是實數，且滿足遞迴關係式

$$a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}\text{，}(\ n\geq 1\ )\text{。}$$

   (1) 證明：對任何正整數 n，等式

$$a_{n+2}=-\frac{1}{a_n}$$

   恆成立。

   (2) 證明數列 $\langle a_n \rangle$ 為週期數列，並求其週期。（12 分）

3. 已知正數 a、A、b、B、c、C 滿足

$$a+A=b+B=c+C=l\text{，}$$

   證明

$$aB+bC+cA<l^2\text{。}$$

   （14 分）

4. 甲、乙、丙三個隊伍在運動會的獎牌榜上共得 186 塊獎牌！甲隊贏得了最多的金牌，乙隊贏得的金牌和銅牌數相等；甲隊和乙隊贏得的銀牌數相等。丙隊的銀牌比銅牌多了 2 塊；而丙隊的金牌數比甲隊的銅牌數多了 1 塊。甲隊的金牌數和乙、丙兩隊的銅牌數之和相等，也剛好是乙隊獎牌數的四分之三。三隊所贏得的總金牌數比甲隊獎牌數少 1 塊。問甲、乙、丙三隊各贏得金、銀與銅牌各幾塊？（12 分）

參考解答

1. (1) 當$r\ge 1$時，因為$1\le r\le r^2$，所以只需三角形的不等式「$1+r>r^2$」成立，就可以知道：1、r、r^2是三角形的三邊邊長。由$1+r>r^2$得$r^2-r-1>0$，即

$$\left(r-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(r-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)，$$

解得

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}。$$

因為$r\ge 1$，所以

$$1\le r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}。$$

當$0<r<1$時，同理可得，1、r、r^2是三角形的三邊邊長的條件為三角形的不等式「$r^2+r>1$」成立。解得

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<r<1。$$

綜合得到

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}。$$

(2) 由題意知

$$r^2+r+1=\frac{11}{4}\Rightarrow r^2+r-\frac{7}{4}=0，$$

解得

$$r=\frac{-1+\sqrt{8}}{2}\text{或}\frac{-1-\sqrt{8}}{2}\text{（不合），}$$

即

$$r=\sqrt{2}-\frac{1}{2}。$$

2. (1) 利用遞迴關係式知道

$$a_{n+2}=\frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\frac{1+\frac{1+a_n}{1-a_n}}{1-\frac{1+a_n}{1-a_n}}=-\frac{1}{a_n}，$$

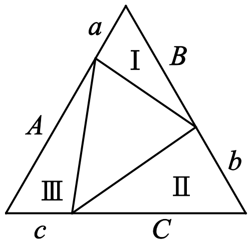
得證。

(2) 利用(1)知道

$$a_{n+4}=-\frac{1}{a_{n+2}}=-\frac{1}{-\frac{1}{a_n}}=a_n \text{ ，}$$

即數列$\langle a_n\rangle$每 4 項一循環，為週期 4 的數列。

3. 下圖是邊長為l的正三角形



I 所在區域的小三角形面積為

$$\frac{1}{2}aB\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}aB \text{ ；}$$

II 所在區域的小三角形面積為

$$\frac{1}{2}bC\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}bC \text{ ；}$$

III 所在區域的小三角形面積為

$$\frac{1}{2}cA\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}cA \text{ 。}$$

三個小三角形面積和

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(aB+bC+cA)$$

小於邊長為l的正三角形面積

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot l^2=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \text{ 。}$$

故

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(aB+bC+cA)<\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \text{ ，}$$

即

$$aB+bC+cA<l^2 \text{ 。}$$

4. 設甲隊得 a 塊銀牌、乙隊得 b 塊金牌、丙隊得 c 塊銅牌及甲隊得 d 塊銅牌。根據題意可以整理各隊獎牌數如下表：

	金牌	銀牌	銅牌
甲隊	$b+c$	a	d
乙隊	b	a	b
丙隊	$d+1$	$c+2$	c

又根據題意，得

$$\begin{cases} \text{總獎牌數} & =186 \\ b+c & =\dfrac{3(a+2b)}{4} \\ (b+c)+(d+1)+b & =(b+c)+a+d-1 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 2a+3b+3c+2d & =183 \\ 4c & =3a+2b \\ b & =a-2 \end{cases}$$

可以解得 c 、 d 為

$$c=\frac{5a}{4}-1 \text{，} d=96-\frac{35a}{8} \text{。}$$

因為 d 必須是非負整數，所以 a 是 8 的倍數，而且 $a<22$ ，即

$$a=8 \text{ 或 } a=16 \text{。}$$

因此

$$(a,b,c,d)=(8,6,9,61) \text{ 或 } (16,14,19,26) \text{。}$$

因為甲隊得最多金牌數，所以 $b+c>d+1$ ，所以前者不合，故各隊獎牌數如下表：

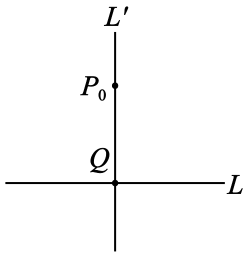
	金牌	銀牌	銅牌
甲隊	33	16	26
乙隊	14	16	14
丙隊	27	21	19

點到直線的距離

黃傳紘／嘉義高中退休教師

現行的 99 數學科課程綱要，第三冊第二章談到圓的時候有一個困擾，即沒有講點到直線的距離這個公式。因此學生在解圓與直線的關係時，全部都要用判別式的觀念，解題非常複雜，因此想到用這個方法證明這個公式，減輕學生的負擔。

若直線 L：$ax+by+c=0$，$P_0(x_0,y_0)$，則點 P_0 到直線 L 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。



證明：如圖，直線 L：$ax+by+c=0$，$P_0(x_0,y_0)$，

若過 P_0 的直線 L' 垂直 L，則直線 L' 上的點 $P(x,y)$

滿足 $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{b}{a}$（因為 L 的斜率為 $-\dfrac{a}{b}$ 且 L' 垂直 L）

$\Rightarrow \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=t$

即 L'：$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$

將 L' 上的點 $P(x_0+at,y_0+bt)$ 代入 L：$ax+by+c=0$

$\Rightarrow a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0$ 得到 $t=-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}=-M$

$\Rightarrow L$ 與 L' 的交點 $Q(x_0-aM,y_0-bM)$

$\Rightarrow P_0$ 到直線 L 的距離 $=\overline{P_0Q}=\sqrt{(x_0-x_0+aM)^2+(y_0-y_0+bM)^2}=|M|\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow \overline{P_0Q}=\left|\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right|\times\sqrt{a^2+b^2}=\left|\dfrac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

內接直角三角形

李維昌／宜蘭高中

一、研究目的 》

試圖以斜率概念解釋拋物線的內接直角三角形，直角頂點固定，斜邊恆過定點的原因，並利用此通過定點的概念來解決軌跡問題。

二、研究過程 》

已知平面直角坐標系中，$\Gamma: y^2=4cx$，$A\left(ct_0{}^2,2ct_0\right)$、$B\left(ct_1{}^2,2ct_1\right)$、$C\left(ct_2{}^2,2ct_2\right)$為$\Gamma$上的相異三點，若$A$點坐標固定且$\angle BAC=90°$，則直線$BC$恆過定點$D\left(ct_0{}^2+4c,-2ct_0\right)$。

三、證明 》

1. $\Gamma: y^2=4cx$圖形上相異兩點$\left(c\alpha^2,2c\alpha\right)$、$\left(c\beta^2,2c\beta\right)$，若$\alpha+\beta\neq 0$，則這兩點形成的直線斜率$=\dfrac{2}{\alpha+\beta}$。

證明：直線斜率$=\dfrac{2c\alpha-2c\beta}{c\alpha^2-c\beta^2}=\dfrac{2c\left(\alpha-\beta\right)}{c\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha+\beta\right)}=\dfrac{2}{\alpha+\beta}$。

(1) $m_{\overline{AB}}=\dfrac{2}{t_1+t_0}$。

(2) $m_{\overline{AC}}=\dfrac{2}{t_2+t_0}$。

(3) $\because \angle BAC=90°$

$\therefore m_{\overline{AB}}\cdot m_{\overline{AC}}=-1$

$\Rightarrow \dfrac{2}{t_1+t_0}\cdot\dfrac{2}{t_2+t_0}=-1$

$\Rightarrow \left(t_1+t_0\right)\left(t_2+t_0\right)=-4 \cdots\cdots (a)$

2. 分成$t_1+t_2\neq 0$與$t_1+t_2=0$兩種情況來討論：

(1) $t_1+t_2\neq 0$：

將 1 的(a)式……$(t_1+t_0)(t_2+t_0)=-4$代入底下的等式，

$$m_{\overline{BC}}=\frac{2}{t_1+t_2}=\frac{2}{\left[(t_1-t_0)+(t_2+t_0)\right]}$$

$$=\frac{2(t_1+t_0)}{(t_1+t_0)\left[(t_1-t_0)+(t_2+t_0)\right]}$$

$$=\frac{2(t_1+t_0)}{(t_1+t_0)(t_1-t_0)+(t_1+t_0)(t_2+t_0)}$$

$$=\frac{2(t_1+t_0)}{\left(t_1^{\ 2}-t_0^{\ 2}\right)+(-4)}$$

$$=\frac{2ct_1-(-2ct_0)}{ct_1^{\ 2}-\left(ct_0^{\ 2}+4c\right)}=m_{\overline{BD}}$$

$\Rightarrow$直線BC恆過定點$D\left(ct_0^{\ 2}+4c,-2ct_0\right)$

(2) $t_1+t_2=0$：

$\because t_1+t_2=0$

$\therefore t_2=-t_1$代入 1.的(a)式……$(t_1+t_0)(t_2+t_0)=-4$，

$\Rightarrow(t_1+t_0)(-t_1+t_0)=-4$

$\Rightarrow t_1^{\ 2}=t_0^{\ 2}+4$

$\Rightarrow ct_1^{\ 2}=ct_2^{\ 2}=ct_0^{\ 2}+4c$

$\Rightarrow B\left(ct_0^{\ 2}+4c,2ct_1\right)$，$C\left(ct_0^{\ 2}+4c,-2ct_1\right)$

$\Rightarrow$直線BC垂直x軸

$\Rightarrow$直線BC恆過定點$D\left(ct_0^{\ 2}+4c,-2ct_0\right)$

3. 結論：

由 1、2 的討論，得知以下的結論：

已知平面直角坐標系中，$\Gamma: y^2=4cx$，$A\left(ct_0^{\ 2},2ct_0\right)$、$B\left(ct_1^{\ 2},2ct_1\right)$、$C\left(ct_2^{\ 2},2ct_2\right)$為$\Gamma$上的相異三點，若點$A$坐標固定且$\angle BAC=90°$，不論$(t_1+t_2)$是否等於 0，則直線$BC$恆過定點$D\left(ct_0^{\ 2}+4c,-2ct_0\right)$。

4. 應用：

已知平面直角坐標系中，$\Gamma: y^2 = 4cx$ ，$A\left(ct_0^{\ 2}, 2ct_0\right)$ 、$B\left(ct_1^{\ 2}, 2ct_1\right)$ 、$C\left(ct_2^{\ 2}, 2ct_2\right)$ 為 Γ 上的相異三點，若點 A 坐標固定且 $\angle BAC = 90°$，試求點 A 投影到直線 BC 的投影點 P 的軌跡方程式。

解法：設投影點 $P(x, y)$ ，利用 3.的結論，直線 BC 恆過定點 $D\left(ct_0^{\ 2} + 4c, -2ct_0\right)$ ，

可得 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DP} = 0$

$\Rightarrow \left(x - ct_0^{\ 2}, y - 2ct_0\right) \cdot \left(x - ct_0^{\ 2} - 4c, y + 2ct_0\right) = 0$

$\Rightarrow \left(x - ct_0^{\ 2}\right)\left(x - ct_0^{\ 2} - 4c\right) + \left(y - 2ct_0\right)\left(y + 2ct_0\right) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2c\left(t_0^{\ 2} + 2\right)x + c^2 t_0^{\ 2}\left(t_0^{\ 2} + 4\right) - 4c^2 t_0^{\ 2} = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2c\left(t_0^{\ 2} + 2\right)x + c^2 t_0^{\ 4} = 0$

所求投影點 P 的軌跡方程式為

$$x^2 + y^2 - 2c\left(t_0^{\ 2} + 2\right)x + c^2 t_0^{\ 4} = 0 \text{ ，但不包含點 } A\left(ct_0^{\ 2}, 2ct_0\right) \text{ 。}$$

一題多解

江慶昱／衛道中學退休教師

一、楔子 》

1974 年，午後，我在臺大數學系圖書館準備還書。前面有一位少我半個頭的小朋友在還書，靈秀白皙。我偷瞄了一下，四本書中有兩本是類比計算機原理、何謂實數。臺灣的數學資優教育前輩當推楊維哲先生，這位小朋友就是楊柏因，如今在中央研究院資訊研究所，已經比我高一個頭，威猛英俊。

楊維哲先生常說：「我今天要刮鬍子，因為要見　蔣經國先生。」楊先生是臺灣數學資優生制度的催生者。

二、遇見資優生 》

2002 年左右，上午，衛道中學。上課中偶然心血來潮，想到 $3^2+4^2+12^2=13^2$ ，要學生多找幾個例子，使滿足 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 。

下課後，桌上擺了兩張紙，一張上面寫著：

$$y=x+1\text{ ，}z=x\left(x+1\right)\text{ ，}t=x\left(x+1\right)+1$$

另一張紙上寫著：

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144,

169, 196, 225, 289, 324, 361, 400, 441, 484,

529, 576, 625,

所以有

$$2^2+10^2+11^2=15^2\text{ ，}$$
$$8^2+9^2+12^2=17^2\text{ ，}$$
$$1^2+4^2+8^2=9^2\text{ ，}$$
$$4^2+5^2+20^2=21^2\text{ 。}$$

前者由例子找出有規律的部分解，後者由演算直接找到一些解，對國三學生而言，實屬難得。這是 10 多年前的舊事，這兩位學生後來都進入一中資優班，然後進入醫學系。

三、資優數學教育 》

1990 年代，數學資優教育也算如火如荼地展開一陣子了。這一天，大陸數學奧林匹克教練裘宗滬先生在臺中一中開講「如何做奧林匹克訓練」(我禮貌地問了一個問題：請問算幾不等式與柯西不等式等價嗎？裘先生似乎沒有會意過來，所以沒有回答)。

黃呈明老師也有一堂課，講一中如何訓練資優生，其中有一個辦法就是訓練學生「一題多解」，以訓練學生開放性思考與邏輯推理，我印象深刻。如何推行數學資優教育？大家看法殊異，基本上，「資優生不是教出來的」是一個共識。

2012 年 4 月號《科學美國人》中文版中，張海潮先生認為「資優教育的重點不在於教材，而是培養學生自學的能力」。我不完全贊同，好的演員當然需要好的劇本。

四、一題多解 》

我前幾天大致做完武陵高中 101 年科學班試題，覺得還蠻平易的。最近開始做一中科學班 101 年試題，有一個題目是這樣子的：

$$f\left(x\right)=\sqrt{\frac{1}{3}-x}+\sqrt{x-\frac{1}{5}}\text{ 的最大值為 } a \text{ ，最小值為 } b \text{ ，則 } \left(a,b\right)=\underline{\qquad\qquad}\text{。}$$

第一個反應是，天啊！考科學班要用到微積分？接著，我找到第 1 個解法，然後解法 2、解法 3。

解法 1

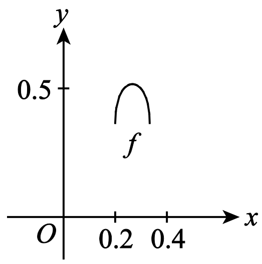
算幾不等式

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{3}-x}+\sqrt{x-\frac{1}{5}}}{2}\geq\sqrt{\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)}$$

其中，$\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)=-x^2+\frac{8}{15}x-\frac{1}{15}=-\left(x-\frac{4}{15}\right)^2+\frac{1}{225}$，在 $x=\frac{4}{15}$ 有最大值，算幾不等式在 $\sqrt{\frac{1}{3}-x}=\sqrt{x-\frac{1}{5}}$ 時等號成立，此時 x 也等於 $\frac{4}{15}$，所以在 $x=\frac{4}{15}$ 時，$f\left(x\right)$ 有最大值 $M=\frac{2}{\sqrt{15}}$。在 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=\frac{1}{5}$ 時，產生最小值 $m=\sqrt{\frac{2}{15}}$。

解法 2

我用 GeoGebra 作 $y=\sqrt{\frac{1}{3}-x}+\sqrt{x-\frac{1}{5}}$ 的圖形，發現它有對稱軸，應該是在 $x=\frac{4}{15}$ 的地方。驗算一下：



$$f\left(\frac{8}{15}-x\right)=\sqrt{\frac{5}{15}-\left(\frac{8}{15}-x\right)}+\sqrt{\left(\frac{8}{15}-x\right)-\frac{3}{15}}=\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{\frac{1}{3}-x}=f(x)$$

果然如此，因此 $y=f(x)$ 在 $x=\frac{4}{15}$ 有最大值。最小值在 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=\frac{1}{5}$ 時產生。

解法 3

考慮 $f(x)^2=\frac{1}{3}-x+x-\frac{1}{5}+2\sqrt{\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)}=\frac{2}{15}+2\sqrt{\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)}$，

$\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)=-x^2+\frac{8}{15}x-\frac{1}{15}$ 在 $x=\frac{4}{15}$ 時產生最大值，所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{4}{15}$ 時產生最大值

$f\left(\frac{4}{15}\right)=\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{4}{15}}+\sqrt{\frac{4}{15}-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{15}}$。

解法 4

用微積分，是一般性的方法，就省略了。

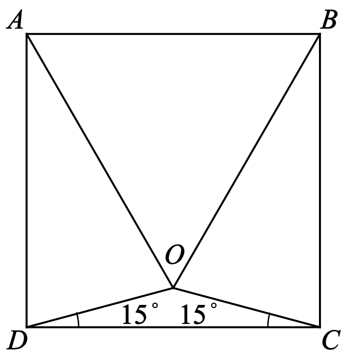
五、後記 》

1975 年，我與朱樺、林長壽先生上施拱星教授的「高等數論」，用的是蘇聯教材的英文版，施教授每個習題都自己做過，然後學生輪流上臺解說。有一天，一個習題似乎條件不夠，做了很久，教授翻遍各種版本。最後發現日文版把習題的條件更正了。共產國家的高等數學課教材質量並重與日本人的翻譯功夫令我印象深刻。施先生的親力親為也讓我深受感動。

我認為資優生與自學能力等價，而好的教材是點燃其潛力的火種。那麼，我們的資優數學教材在哪裡？

參考資料：

1. O 是正方形 $ABCD$ 內一點，已知 $\angle ODC = \angle OCD = 15°$，試證 $\triangle OAB$ 是正三角形。以下網頁有非常多的證法。
   http://www.fed.cuhk.edu.hk/~fllee/mathfor/edumath /9912/6.htm。



2. 蔡聰明，$\sqrt{2}$ 是無理數的 28 種證明，數學傳播季刊第 23 卷第 1 期。
3. 國立高雄大學應用數學系資優數學講義 http://www.math.nuk.edu.tw/senior/sindex.htm。
4. 許志農，算術講義 http://math.ntnu.edu.tw/~maco/arith.htm。

專欄　動手玩數學

許志農／臺灣師大數學系

遊戲 77

☆☆

找實數 a 與 b 使得

$$a+b\text{，}a-b\text{，}ab\text{，}\frac{a}{b}$$

四個實數中，其中三個有相同的數值。

〔玩鎖・玩索〕

這是 1991 年大陸全國初中數學聯賽試題。

遊戲 78

☆☆☆☆☆

給定長度為 a 與 b 的兩線段，利用直尺與圓規作出長度為

$$\sqrt{a^2-\sqrt{2}ab+b^2}$$

的線段，並寫出作圖過程。

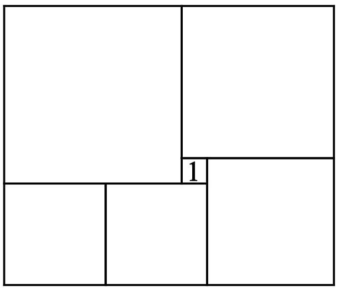
〔玩鎖・玩索〕

這是一道尺規作圖問題，如果善用三角學的定理，可以很快且美妙的作出所求的線段。

遊戲 79

☆

用六塊正方形拼出如下的長方形：



已知中央那塊的邊長為1，求長方形面積。

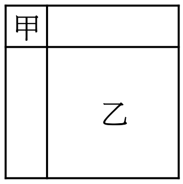
〔**玩鎖・玩索**〕

這是一道簡單的測智遊戲題，善用未知數的話，會更快得到答案。

遊戲 80

☆☆☆

如圖所示，甲、乙兩個正方形的面積剛好是二次多項式 x^2-7x+4 的兩個根：



求剛好包住甲、乙兩個正方形的正方形之面積。

〔**玩鎖・玩索**〕

這是一道將多項式的根與幾何面積連結在一起的趣題，想想看，有哪個公式可以快速的幫我們解題。

動手玩數學~破解秘笈 第19期

遊戲 73

因為 n 項數列的和為 $7\sqrt{5}-2\sqrt{2}$，所以 $-\sqrt{2}$ 的項比 $\sqrt{2}$ 多 2 項，而恰有 7 項為 $\sqrt{5}$。因此可設 $\sqrt{2}$ 有 k 項，$-\sqrt{2}$ 有 $k+2$ 項，$\sqrt{5}$ 有 7 項，即 $n=2k+9$。由 n 項數列的積為 $-32000\sqrt{5}$，得

$$(-1)^{k+2}\left(\sqrt{2}\right)^{2k+2}\left(\sqrt{5}\right)^{7}=-32000\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (-1)^{k+2}2^{k+1}=-256，$$

解得 $k=7$，故項數 $n=2k+9=23$。

遊戲 74

可以利用數學歸納法同時證明三個欲證的式子都成立：

(1) 當 $n=1$ 時，顯然 $a_1=d_1$，$b_1=c_1$ 及 $a_1+b_1=1$ 都成立。

(2) 當 $n=k$ 時，$a_k=d_k$，$b_k=c_k$ 及 $a_k+b_k=1$ 都成立。

當 $n=k+1$ 時，因為

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} & c_{k+1} \\ b_{k+1} & d_{k+1} \end{bmatrix}=A^{k+1}=A^kA$$

$$=\begin{bmatrix} a_k & c_k \\ b_k & d_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} aa_k+(1-a)c_k & (1-a)a_k+ac_k \\ ab_k+(1-a)d_k & (1-a)b_k+ad_k \end{bmatrix},$$

所以

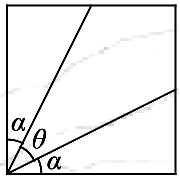
$$\begin{cases} a_{k+1}=aa_k+(1-a)c_k \\ b_{k+1}=ab_k+(1-a)d_k \\ c_{k+1}=(1-a)a_k+ac_k \\ d_{k+1}=(1-a)b_k+ad_k \end{cases}。$$

利用 $a_k=d_k$，$b_k=c_k$ 及 $a_k+b_k=1$ 可以推得

$a_{k+1}=d_{k+1}$，$b_{k+1}=c_{k+1}$，$a_{k+1}+b_{k+1}=1$，得證。

遊戲 75

因為對稱的關係，令角 α 如下圖所示：



因為 $2\alpha+\theta=90^\circ$，所以 $\theta=90^\circ-2\alpha$，即

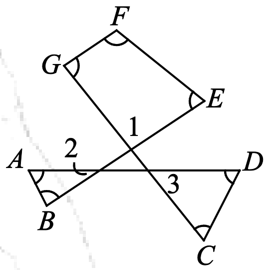
$$\sin\theta=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1。$$

又由 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 得

$$\sin\theta=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}。$$

遊戲 76

考慮下圖：



由多邊形的內角和公式知道：

$$\angle 1+\angle E+\angle F+\angle G=(4-2)\cdot 180^\circ；$$

$$\angle 2+\angle A+\angle B=(3-2)\cdot 180^\circ；$$

$$\angle 3+\angle C+\angle D=(3-2)\cdot 180^\circ。$$

將他們相加，得到

$$(\angle 1+\angle 2+\angle 3)+(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D$$
$$+\angle E+\angle F+\angle G)=4\cdot 180^\circ。$$

因為 $\angle 1+\angle 2+\angle 3$是上圖中央三角形的三內角，所以

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ，$$

因此

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$

$=3\cdot 180^\circ=540^\circ$。