

數學素養評量試題

許志農／臺灣師大數學系

8 大陸面積

下圖為 南極洲 地圖：



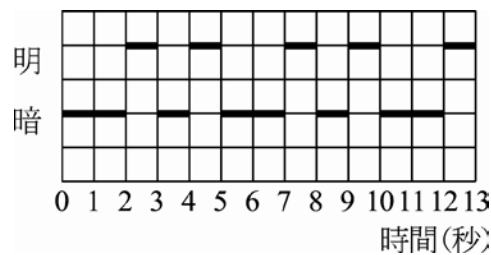
利用地圖的比例尺，估算出 南極洲 的面積，需寫出你的作法並解釋你是如何估計的。（若利用作圖能幫助你估計的話，可直接畫在地圖上）

9 燈塔

燈塔是一座頂端有燈的塔。當船隻要靠岸的時候，燈塔在夜間可以幫助船找到他們的航道：



燈塔以固定規律的方式發出光亮，每座燈塔有它自己的規律。下圖你可以看到某座燈塔亮光的規律，燈號的亮和暗相互交錯：



這是一個固定的規律，一段時間後規律會再次重複。在開始重複之前的一個完整規律循環所用的時間，稱之為週期。當你找出一個規律的週期，便很容易延伸上圖來找出下一個、或者數分鐘、甚至數小時後燈塔的亮、暗情形。

- (1) 下列哪一個是這個燈塔亮、暗的週期？
(A) 2 秒 (B) 3 秒 (C) 5 秒 (D) 12 秒
- (2) 在這一分鐘內這座燈塔有幾秒是亮的？
(A) 4 秒 (B) 12 秒 (C) 20 秒 (D) 24 秒

10 地震

地震是一種無法有效預測的天然災害，下圖是國際媒體報導 日本 外海發生 8.9 超級強震，引發海嘯的圖片，這場地震也導致 福島縣（Fukushima）南相馬市（Soma）海邊的一座核能電廠的反應爐熔毀，引發輻射外洩：

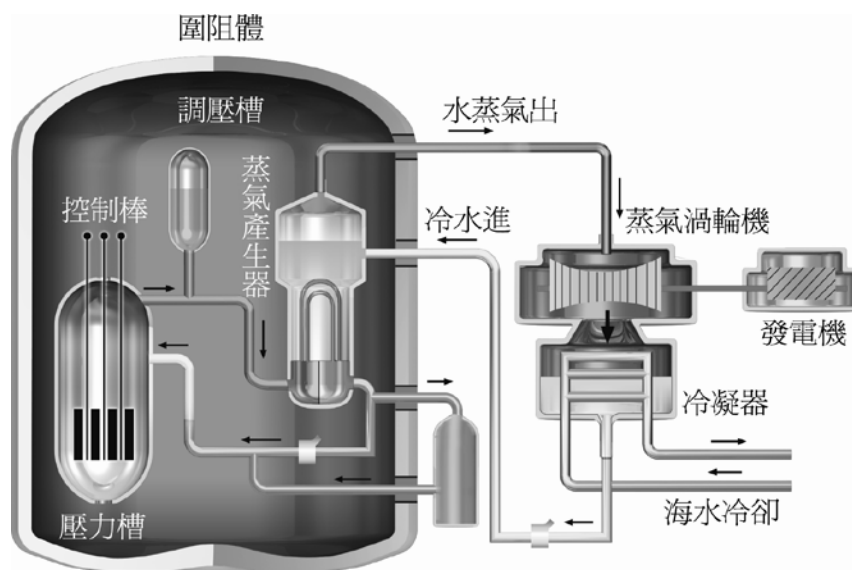


日本 政府發布緊急命令，疏散核電廠半徑 10 公里內的所有民眾，稍後更疏散核電廠半徑 20 公里內的所有民眾。

- (1) 日本 政府第一次疏散民眾的陸地面積（平方公里）最可能是下列哪一個？
(A) 50 (B) 100 (C) 157 (D) 314
- (2) 日本 政府第二次疏散民眾的陸地面積約為第一次疏散民眾陸地面積的幾倍？
(A) 2 倍 (B) 4 倍 (C) 8 倍 (D) 16 倍

11 輻射外洩

核反應器附近的放射性物質—碘 131 殘留量是用來評估核反應器是否輻射外洩的重要指標。碘 131 半衰期僅八天（每八天輻射強度衰減一半），政府規定：碘 131 殘留量的基準值是每公斤 37 貝克：



原子能委員會於 3 月 25 日採樣分析某大學研究用核反應器周圍環境的碘 131 殘留量，偵測到碘 131 含量每公斤 148 貝克，懷疑與輻射外洩有關。經此採樣分析後，該大學才承認匿報輻射外洩，並承認該校核反應器在 3 月 1 日發生輻射外洩事件。

- (1) 原子能委員會採樣分析後幾天，核反應器周圍環境的碘 131 殘留才會下降至政府規定內？
(A) 2 天 (B) 8 天 (C) 14 天 (D) 21 天
- (2) 該校核反應器發生輻射外洩時，碘 131 殘留量為每公斤幾貝克？
(A) 148 (B) 296 (C) 444 (D) 592

12 自動鉛筆

型號為 Sharbo-X 的自動鉛筆 ①是 日本 斑馬公司所開發，可以在「自動鉛筆」和「原子筆」間自由轉換使用的複合筆。這種筆可以從「筆身」、「自動鉛筆機械」與「原子筆備用筆心」中挑選您最喜歡的款式，組合成新筆。我們可以從 9 種筆身中選取 1 種，從 3 種自動鉛筆機械中選取 1 種，再從 17 種原子筆備用筆心中選取 2 種，最多可以達到 3672 種組合！



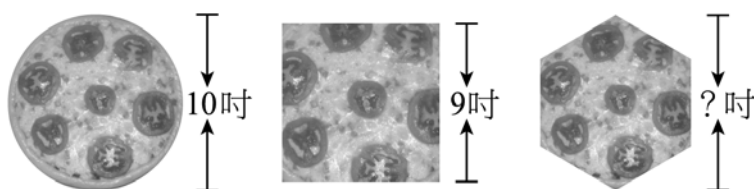
▲圖片來源：<http://www.sharbo-x.com/#information>

上述文字中並沒有提到「原子筆備用筆心是否可以重複選取」，在該段文字的 3672 種組合沒有算錯情形下，試著推敲原子筆備用筆心是否可以重複選取？並將組合數 3672 用組合學的乘法寫出來。

註 1：這裡的 X 是算術裡的相乘之意思，也就是說，這種筆是可以組合的，而組合的方法可利用乘法原理得到。

13 披薩

曉明生日到了，爸爸想買曉明最愛吃的披薩回家慶祝。爸爸走進一家「創意披薩」店，發現這家店除了有傳統的圓形披薩之外，竟然還有正方形披薩跟正六邊形披薩。



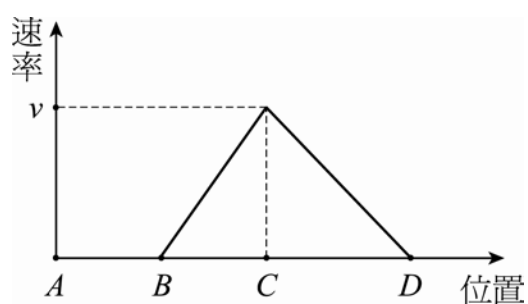
- (1) 爸爸到櫃檯點了一個 10 吋（直徑）大的圓形披薩，店員卻跟爸爸推薦另一個價錢相同的 9 吋（邊長）正方形披薩。請你說說看，爸爸買這兩種披薩中的哪一種比較划算？
- (2) 有一個客人告訴店員，他想要買一個與 16 吋圓形披薩份量最接近的正六邊形披薩。請問這個店員應該幫這位客人點幾吋的正六邊形披薩呢？（取最接近的整數值）
(A) 8 吋 (B) 9 吋 (C) 16 吋 (D) 18 吋

14 滾球

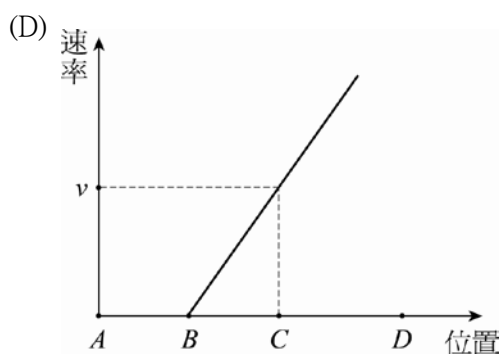
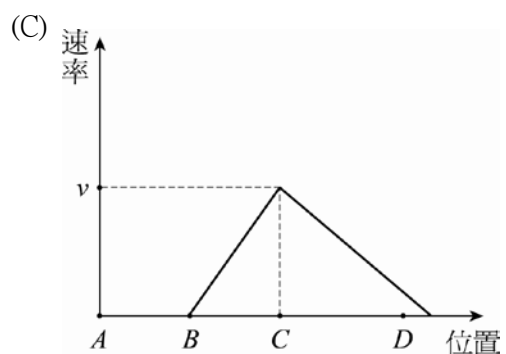
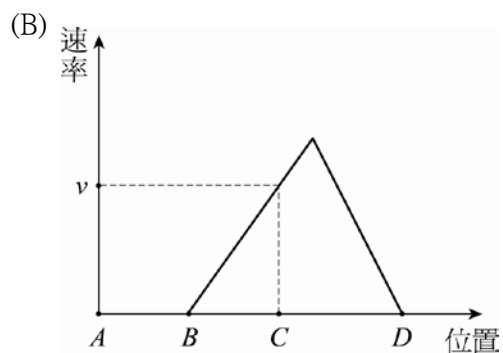
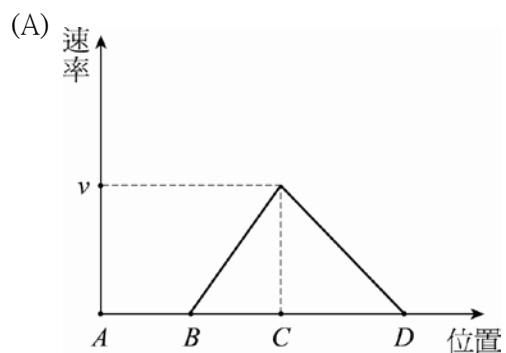
將一顆圓球由小山丘的半山腰 B 點靜止釋放，使其往下滾，受重力的影響，速率會越來越快，當球滾到 C 點時，球的速率為 v ；之後受草坪阻力影響，球的滾動速率會漸漸變慢，最後停在 D 點：



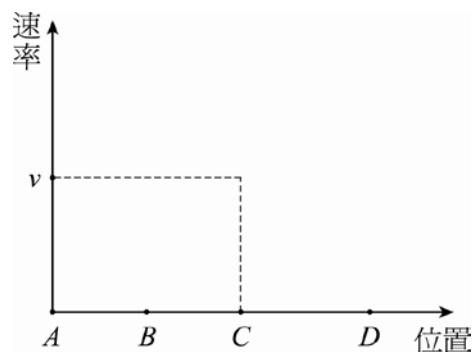
下圖顯示此球滾動於不同位置時的速率變化關係圖：



(1) 如果把草拔掉，使地面變平滑，阻力會減少一些，那麼此球滾動於不同位置時的速率變化關係圖較可能變成下列何者？



- (2) 若將球由更高的 A 點靜止釋放，使其往下滾，試在下圖中畫出此球滾動於不同位置時的速率變化關係圖：



15 咖啡的金杯理論

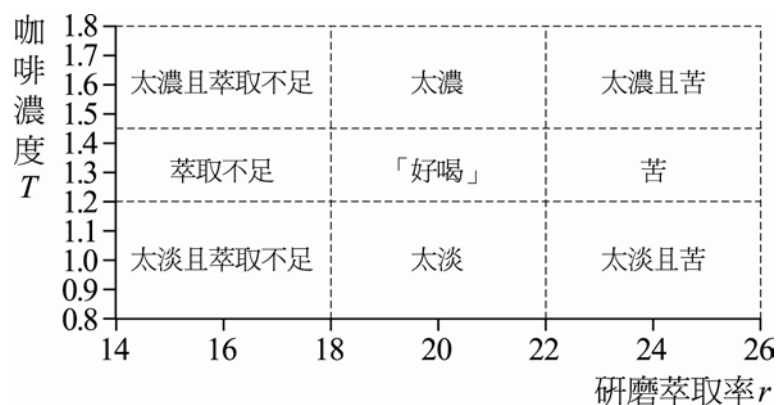
一杯咖啡的品質可由咖啡濃度 T ，研磨萃取率 r ，使用咖啡豆重量 C （克）及該杯咖啡總重量 B （公克）來決定，而這四個量會滿足數學式子

$$T = \frac{C \times r}{B} .$$

歐洲精品咖啡協會認為「好喝」的咖啡必須符合咖啡濃度 T 介於 1.2%~1.45% 之間，而且研磨萃取率 r 在 18%~22% 的範圍內這兩項條件。



- (1) 惠儀以 30 克咖啡豆，20% 的研磨萃取率沖了一杯 400 公克的咖啡，請問這杯咖啡的品質會落在下列圖表中的哪個區域？



- (2) 咖啡店想要販售每杯 600 公克的「好喝」咖啡，在 20% 的研磨萃取率條件下，至少需要幾公克的咖啡豆才能完成？又最多只能放入幾公克的咖啡豆？

8 數亦優

利用正射影與加減消去法—

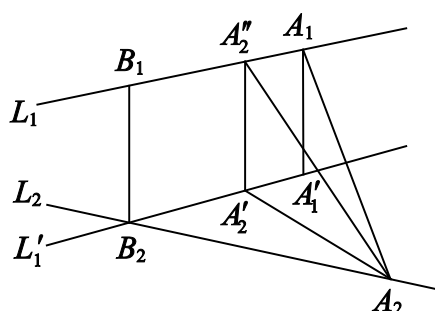
求兩歪斜線之公垂線段的兩端點坐標

李維昌／國立宜蘭高中

※ 研究目的》

試圖利用正射影與加減消去法，來求兩歪斜線之公垂線段的兩端點坐標。

※ 研究過程》



由上圖所示，已知空間直角坐標系中， O 為原點，兩歪斜線 L_1 與 L_2 分別通過點 A_1, A_2 ， L_1 與 L_2 的方向向量分別為 $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ ， $\vec{d}_1$ 不平行 $\vec{d}_2$ ，四邊形 $A_1A'_1B_2B_1$ 為矩形，四邊形 $A_2A'_2B_2B_1$ 為矩形， $\angle A_2A'_1A'_2 = 90^\circ$ ， $\angle A_2A'_2A'_1 = 90^\circ$ ， $\overline{B_1B_2} \perp L_1$ 與 L_2 ，求點 B_1 及點 B_2 的坐標。

Sol 設 $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A'_1B_2} = t_1 \vec{d}_1$ ， $\overrightarrow{A_2B_2} = t_2 \vec{d}_2$ 。利用正射影概念，

$$\because \overrightarrow{A'_2A'_1} = \overrightarrow{A'_2A_1}, \therefore \frac{\overrightarrow{A_2A'_1} \cdot \vec{d}_1}{|\vec{d}_1|^2} \vec{d}_1 = \frac{(\overrightarrow{A_2B_2} - \overrightarrow{A'_1B_2}) \cdot \vec{d}_1}{|\vec{d}_1|^2} \vec{d}_1 = \frac{(t_2 \vec{d}_2 - t_1 \vec{d}_1) \cdot \vec{d}_1}{|\vec{d}_1|^2} \vec{d}_1 = \frac{\overrightarrow{A_2A_1} \cdot \vec{d}_1}{|\vec{d}_1|^2} \vec{d}_1$$

$$\Rightarrow t_2 (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2) - t_1 (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1) = \overrightarrow{A_2A_1} \cdot \vec{d}_1 \dots\dots ①$$

$$\text{同理可得 } t_1 (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2) - t_2 (\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2) = \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{d}_2 \dots\dots ②$$

$$① \times (-\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2) + ② \times (-\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2)$$

$$\Rightarrow t_1 \left[(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1) (\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2) - (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2) (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2) \right] = \left[(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{d}_1) (\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2) - (\overrightarrow{A_2A_1} \cdot \vec{d}_2) (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2) \right]$$

$$① \times (-\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2) + ② \times (-\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1)$$

$$\Rightarrow t_2 \left[\left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 \right) \left(\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \right) - \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right) \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right) \right] = \left[\left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 \right) \left(\vec{d}_2 \cdot \vec{A_2 A_1} \right) - \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right) \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{A_2 A_1} \right) \right]$$

$\therefore \vec{d}_1$ 不平行 $\vec{d}_2$,

$\therefore$ 由 $\vec{d}_1$ 與 $\vec{d}_2$ 所形成平行四邊形的面積平方

$$= \left[\left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 \right) \left(\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \right) - \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right) \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right) \right] \neq 0 ,$$

$$\text{因此} \begin{cases} t_1 = \frac{\left(\vec{A_1 A_2} \cdot \vec{d}_1 \right) \left(\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \right) - \left(\vec{A_1 A_2} \cdot \vec{d}_2 \right) \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right)}{\left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 \right) \left(\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \right) - \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right) \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right)} \\ t_2 = \frac{\left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 \right) \left(\vec{d}_2 \cdot \vec{A_2 A_1} \right) - \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right) \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{A_2 A_1} \right)}{\left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 \right) \left(\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \right) - \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right) \left(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right)} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} \vec{OB_1} = \vec{OA_1} + t_1 \vec{d}_1 \\ \vec{OB_2} = \vec{OA_2} + t_2 \vec{d}_2 \end{cases} .$$

參考文獻：

1. 李維昌（98 年 4 月 30 日），
利用正射影及外積的概念求兩歪斜線之公垂線段的距離及端點坐標，
龍騰數亦優，第 9 刊，P.17
2. 李維昌（98 年 12 月），
利用平面的法向量來求兩歪斜線的公垂線段的兩端點坐標，
數學傳播，第三十三卷第四期，P.63~66
3. 李維昌（99 年 3 月 30 日），
利用內積與克拉瑪公式求兩歪斜線之公垂線段兩端點坐標的公式解法，
龍騰數亦優，第 11 刊，P.12~14
4. 李維昌（99 年 12 月），
利用向量三重積求兩歪斜線之公垂線段兩端點坐標的公式解法，
數學傳播，第三十四卷第四期，P.43~45
5. 李維昌（100 年 3 月），
利用直線參數式與克拉瑪公式求兩歪斜線之公垂線段兩端點坐標的公式解法，
龍騰數亦優，第 14 刊，P.20~22
6. 李維昌（100 年 5 月），
利用外積與三階行列式的概念求兩歪斜線之公垂線段的兩端點坐標，
龍騰數亦優，第 15 刊，P.20~21

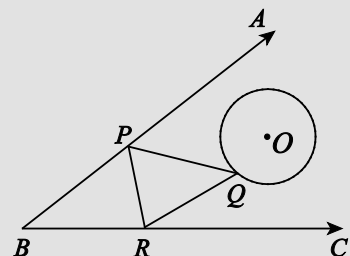
反射定律與尺規作圖

江慶昱／臺中市衛道中學退休教師

龍騰數亦優第 11 期有一題探索題：

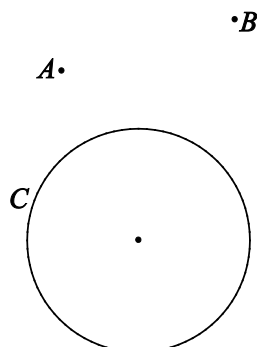
圓 O 為銳角 ABC 內一定圓，在 $\overrightarrow{BA}$ ，圓 O ， $\overrightarrow{BC}$ 上分別求出一點 P, Q, R ，使 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP}$ 最短。

基本上這是一個反射定律的題目延伸，我想以此當作這篇文章的引子。

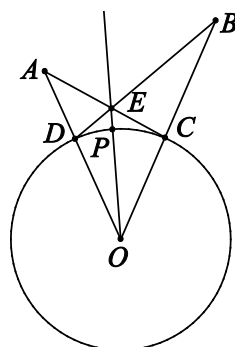


※ 楔子 ※

1999 年，大家選我當數學科主席，所謂主席就是跑腿的意思。我想，就做點事吧！就讓學生做建中的通訊徵答（我們給獎品），並且邀幾個對數學有興趣的老師做研討會。那天是 3 月的一個星期五，討論到一個題目：如圖一，圓 C 外兩點 A, B ，求一點 P 在圓 C 上，使得 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值，則 P 點在哪裡？



《圖一》



《圖二》

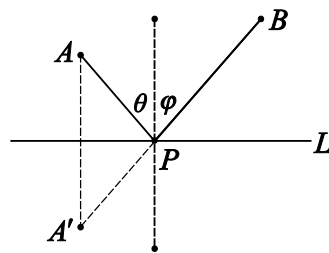
有一位老師說：連接 $\overline{OA}, \overline{OB}$ 交圓 O 於 D, C ；連接 $\overline{AC}, \overline{BD}$ ，兩線交於 E ；連接 $\overline{OE}$ 交圓 O 於 P ；也許所求的 P 點就在這裡。（如圖二）

剛好那時候，我當清大 全任重 教授 GSP 專案的助手不久，回家用 GSP 量了一下距離，似乎沒錯，竟然有那麼巧的事。隔天晚上，我上 <http://mathforum.org/> 的數學論壇，剛好看到有人在討論這個問題。我一時失察，竟然把「答案」傳了上去，這麼說吧，就被 Dave Rusin 教授訓了回來。使得 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值的 P 點是不能尺規作圖的。

※ 先看幾個反射定律的例子 ※

例 1：直線 L 外兩點 A, B 。求 L 上一點 P 使得 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值，則 P 點在哪裡？

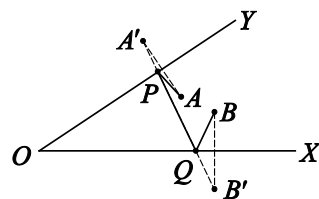
這是國中的題目，證明就省了。作 A 關於 L 的對稱點 A' ， $\overline{A'B}$ 交 L 於 P 點，則此時 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值。把 L 當作一面鏡子，則光線由 A 點走到 B 點，走最短路徑。由反射定律，入射角 θ = 反射角 φ （這是希臘 Alexandria 的 Heron 發現的）。我們的問題就是把平面鏡改成一



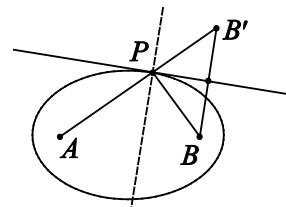
例 2：A, B 在一個 $\angle XOY$ 內，在 $\overline{OY}, \overline{OX}$ 上各找一點 P, Q 使

得 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 有最小值。

取 A', B' 各為 A, B 關於 $\overline{OY}, \overline{OX}$ 的對稱點，連接 A', B'， $\overline{A'B'}$ 交 $\overline{OY}, \overline{OX}$ 於 P, Q，即為所求。本文一開始的那一探索題，就是把例 2 稍微延伸一下。



例 3：當這面鏡子是個橢圓形的時候，A, B 是兩焦點，光線由 A 射向 P，反射到 B，則入射角等於反射角，也使得 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值，在這圖形上可以看到例 1 的影子。



例 4：撞球檯是長方形時，問題也不見得很簡單，如果改成橢圓形，Wolfram 問了一些撞球檯問題。<http://mathworld.wolfram.com/Billiards.html> 這裡面還有一些問題沒解決，值得看一下。

※ 尺規作圖 ※

為什麼 20° 不能尺規作圖？教國中的老師要怎麼說明？

華羅庚 科普著作選集中有一個善巧方便的說法：直尺的方程式是 x, y 的一次式，圓是 x, y 的二元二次式，尺、圓之間（或圓與圓之間）的交點坐標是一元二次或四次方程式的根，因此不會有形如 $\sqrt[3]{2}$ 的東西。 $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ ，取 $\theta = 20^\circ$ ，知 $\cos 20^\circ$ 滿足 $8x^3 - 6x - 1 = 0$ ，因此 20° 不能尺規作圖。

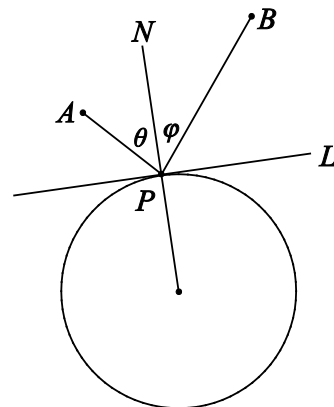
※ 回到原來的問題 ※

使 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值的 P 點應該滿足最小作用量原理，就是使反射定律成立，即入射角 θ = 反射角 φ ，其中 L 是過 P 的切線，N 是法線。因此，當時有一個考題是這樣的：設 A, B 為圓 O 外相異兩點，且線段 $\overline{AB}$ 與圓 O 不相交；若 P 為圓 O 上一點，得 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 最短，試證直線 $\overline{OP}$ 平分 $\angle APB$ 。

1999 年 Dave Rusin 教授為我們證明了 P 點是不能尺規作圖構作的，請看：

<http://mathforum.org/kb/message.jspa?messageID=163497&tstart=0>。

Rusin 教授取 $A(-1, 2)$ ， $B(1, 3)$ ，我把他的證法改寫一下；設 $P(x, y)$ ，則



$$m_1 = m_{PA} = \frac{y-2}{x+1}, m_2 = m_{PB} = \frac{y-3}{x-1}, m_3 = m_{OP} = \frac{y}{x},$$

$$\tan \theta = \tan \varphi, \frac{m_3 - m_1}{1 + m_1 m_3} = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3}, \frac{\frac{y}{x} - \frac{y-2}{x+1}}{1 + \frac{y(y-2)}{x(x+1)}} = \frac{\frac{y-3}{x-1} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y(y-3)}{x(x-1)}},$$

展開化簡後得 $x^2 - y^2 - 14xy + 5x = 0$ ，與 $x^2 + y^2 = 1$ 聯立，消掉 y 得

$x^2 - (1 - x^2) + 5x = 14x\sqrt{1 - x^2}$ ，兩邊平方，化簡得 $200x^4 + 20x^3 - 175x^2 - 10x + 1 = 0$ 。

Dave Rusin 教授說 $f(x) = 0$ 的 Galois 群是 S_4 ，這是怎麼回事？我寫信向 康明昌 教授請教，以下是康教授的回信：

12 數亦優

「You can use the following reference :

P. Morandi, Field and Galois theory, Springer GTM vol.167, Theorem 13.4 (page 126) and Theorem 15.2 (page 144) .

Instead of considering the equation $200x^4 + \dots = 0$, you may consider its reciprocal polynomial $f(x) = x^4 - 10x^3 - 175x^2 + 20x + 200$.

Let u be a root of $f(x) = 0$, $K = Q(u)$, L be the normal closure of K over Q .

Let G be the Galois group G over Q , i.e. $G = \text{Gal}(L/Q)$. Note that $[K:Q] = 4$ because $f(x)$ is irreducible over Q .

Let H be the subgroup of G such that $K = L^H$, the fixed field for H .

By Theorem 15.2, u is constructible by ruler and compass if and only if there is a subgroup H' such that $H < H' < G$ with $[G:H'] = [H':H] = 2$.

To compute G , use Theorem 13.4. It is easy to show that $r(x)$ is irreducible (by some technique similar to Eisenstein criterion or reducing modulo some suitable prime number p) where $r(x)$ is defined in Theorem 13.4.

By Theorem 13.4 G is either S_4 or A_4 . In either case, there is no subgroup H of index 4 satisfying the condition there is some subgroup H' of index 2 in G with $H' > H$. Hence u is not constructible. By Theorem 13.4 $G = S_4$ if and only if the discriminant of $r(x)$ is not a square in Q . It is not difficult to check where the discriminant is or is not a square. 」

取 $200x^4 + 20x^3 - 175x^2 - 10x + 1 = 0$ 的倒根方程式 $f(x) = x^4 - 10x^3 - 175x^2 + 20x + 200 = 0$ ，假設 u 是 $f(x) = 0$ 的一根且 $K = Q(u)$ ，因為 $f(x)$ 在 Q 中不可約，所以 $[K:Q] = 4$ ，由定理 13.4 $f(x) = 0$ 的 Galois 群是 S_4 或 A_4 ，兩者都不存在 index 4 的子群 H ，使得 H 有子群 H' ，滿足 $H < H' < G$ 且 $[G:H'] = [H':H] = 2$ ，由定理 15.2， u 為不可尺規作圖。

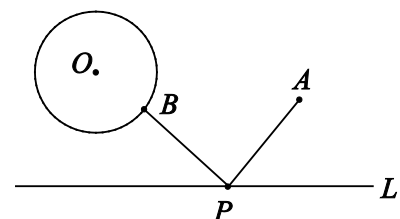
最後剩下一件事， $f(x)$ 在 Q 中為不可約，這一點就算是一個習題吧！

※ 後記 》

1999 年 3 月的一段「公案」，一直擺在心中，一晃 10 多年，因為龍騰數亦優第 11 期的探索題使我起心動念想把這件事作一個了斷，也感謝 康明昌 教授的熱心回覆。Galois 20 歲就因為決鬥身亡，我曾問師父，何以有人其思想得領先數學界一百多年，師父說：「過去、現在、未來如何分別？凡夫何必多此一問。」

※ 習作 》

1. 已知 $A(2,0), B(-2,0)$ 是橢圓 T 的兩焦點， $L: 3x + 2y = 8\sqrt{3}$ 是 T 的一切線，求此橢圓方程式。
2. P (母球)， Q 是矩形球檯內兩點，如何撞擊 P 點，使其經過兩顆星後撞擊 Q 點。
3. 直線 L 外一點 A, B 在圓 O 上， P 在直線 L 外， $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值時， P 點在哪裡？



4. 正九邊形是否可尺規作圖？

Sol

1. 假設 A 關於 L 的對稱點為 C ，則 $\overline{AC}: 2x - 3y = 4$ ，聯立解出 L 與 $\overline{AC}$ 交點

$$D\left(\frac{8+24\sqrt{3}}{13}, \frac{-12+16\sqrt{3}}{13}\right), \text{ 得 } C\left(\frac{-10+48\sqrt{3}}{13}, \frac{-24+32\sqrt{3}}{13}\right)。$$
 橢圓的長軸長

$$2a = \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{BC} = \dots = 8, \text{ 以下容易求得橢圓的方程式為 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1。$$

2. 略。
3. 作圓心 O 關於 L 的對稱點 O' ， $\overline{AO'}$ 交 L 於 P ， $\overline{OP}$ 交圓 O 於 B ，則 P, B 即為所求。
4. 不能。因為圓的內接正九邊形的圓心角為 40° ， 40° 不能尺規作圖。

參考資料

1. 在相同介質內，光走最短路徑是最小作用量原理。最小作用量原理到底是誰先提出來的？是 Euler（數學與猜想 P.131），還是 Pierre L.M. de Maupertuis（西方文化中的數學 M Kline 著 P.235）？其實並不重要，「真理就在那裡，我們只是去發現」，這叫作柏拉圖主義。
2. 若 A, B 在圓 O 內部，在圓 O 上找一 P 點，使得 $\overline{OP}$ 平分 $\angle APB$ ，亦即在圓形撞球檯中 A, B 兩點各放一個撞球，由 A 撞到球檯邊 P 點，彈回撞到 B 點上的球，所以稱為撞球檯問題，這個問題最早是托勒密在公元後 150 年提出的，後來稱為 Alhazen 撞球檯問題，以紀念阿拉伯學者 Alhazen 在光學上的貢獻。Elkin 1965，Reide 1989，Neumann 1998 先後對這個問題有研究。
3. 最小作用量原理，費因曼物理學（第 2 部 上冊），徐氏基金會，P.357
4. G. Polya，數學與猜想，九章出版社，P.154
5. G. Polya，數學與發現，九章出版社，P.158
有力學解釋，其間提到 Fermat 以光速為有限，可以解決反射問題，亦即「假設光速為有限」並不是愛因斯坦的創見。
6. 數學傳播季刊，第一期第 10 卷，P.5
7. 數學傳播季刊，第 14 期第 2 卷、第 15 期第 2 卷、第 17 期第 4 卷
8. 楊維哲，立體解析幾何學，解析幾何學，三民書局
9. Heinrich Dorrie，100 Great Problems of Elementary Mathematics，P.197
10. 完美出棹解答，科學人月刊（2003），P.126
11. 華羅庚科普著作選集，P.202
12. Construction with Straightedge and Compass，Topics in Algebra（I.N.Herstein），P.229
13. 康明昌，代數，聯經出版社
14. <http://mathworld.wolfram.com/SolvableGroup.html>

樣本標準差公式的探討

鍾國華／臺北市祐德高中

※ 前言 ※

高中數學第四冊第三章 3-5 節「分析一維數據」中，有關樣本標準差 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ，因為部分數學教師不了解「統計學」的原理而質疑該公式的不合理性或無意義，甚至於要求刪除該公式的教學，故特別在此提出說明。

※ 何謂標準差 ※

標準差 (standard deviation) 是用來描述統計數據中「各項數值與平均數的平均距離」，以衡量該數值資料的分散情形。

一群數值資料中，各項數值與平均數之差稱為離均差，即離均差 $= x_i - \mu$ 。而離均差之絕對值的平均數稱為平均絕對離差 (mean absolute deviation; MAD)，即 $MAD = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \mu|$ 。因絕對值的代數運算較不容易處理，故取離均差之平方取代離均差之絕對值，而計算離均差平方的平均數稱之為變異數 (variance)，其正平方根稱之為標準差。由於平均絕對離差與變異數兩者對離均差之處理方式不同，所得結果自有差異，然因變異數具有較佳之統計性質，故其重要性優於平均絕對離差。

統計學上，對於母體及樣本兩者的變異數與標準差定義不同：

- 1) 母體變異數與標準差：假設有一組母體資料 $x_1, x_2, \dots, x_N$ ，其平均數 $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ ，

$$\text{則母體變異數 } \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \mu^2, \text{ 母體標準差 } \sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

延伸到數對 (x_i, y_i) 之母體相關係數 $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$ ，其中 σ_x 與 σ_y 分別為 x 與 y 之母體標準

差， σ_{xy} 為 x 與 y 之母體共變異數 (covariance) 【共變異數係以測量兩數值變數間的線性關

係； $\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$ 】。

- 2) 樣本變異數與標準差：假設有一組樣本資料 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，其平均數 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ，

$$\text{則樣本變異數 } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right), \text{ 樣本標準差 } S = \sqrt{S^2},$$

延伸到數對 (x_i, y_i) 之樣本相關係數 $r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ ，其中 S_x 與 S_y 分別為 x 與 y 之樣本標準

差， S_{xy} 為 x 與 y 之樣本共變異數 【 $S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$ 】。

※ 母體資料或樣本資料 》

調查研究時，應先確認所蒐集的資料是母體資料或樣本資料，方能決定應以母體標準差 σ 或樣本標準差 S 進行分析。例如：研究某所高中三年級學生數學能力的差異分析，此時研究的母體為該校所有三年級的學生，所蒐集到的資料稱為母體資料，應以母體標準差 σ 來進行分析（該資料不足以用於推論全國高中三年級學生數學能力的差異分析）。若要研究全國高中三年級學生數學能力的差異分析，則研究母體變成全國高中三年級的全體學生，由於母體資料過於龐大，考量時間、費用與人力等因素，一般而言，大多會採取抽樣方式進行調查研究，此時所蒐集到的資料稱為樣本資料，應以樣本標準差 S 來進行分析，而非採用母體標準差 σ 。

※ 點估計量之評判標準 》

用以推估母體參數的統計量稱為估計量；將所蒐集到的樣本資料代入估計量以計算求得一估計值後，再用以推估母體參數的統計方法稱為點估計（point estimation），此時之估計量稱為點估計量。然而一個母體參數的點估計量或許不只一個，應該如何來評判點估計量之良窳呢？在統計學上，經常用於評判估計量良窳之標準有：不偏性（unbiasedness）、一致性（consistency）、有效性（efficiency）、充分性（sufficiency）等。一般而言，若有一估計量滿足上述評判之標準越多，則稱該估計量越好。本文僅探討上述最為常見之評判標準—不偏性。

所謂不偏性（unbiasedness），係指估計量 $\hat{\theta}$ 的期望值若等於母體參數 θ （即 $E(\hat{\theta}) = \theta$ ），則稱估計量 $\hat{\theta}$ 為母體參數 θ 的不偏估計量，此時之估計量 $\hat{\theta}$ 即滿足不偏性。例如：

$E(\bar{X}) = \mu, E(S^2) = \sigma^2$ ，所以 $\bar{X}$ 與 S^2 分別為母體參數 μ 與 σ^2 之不偏估計量，即 $\bar{X}$ 與 S^2 均滿足不偏性。

- 1) 試證：樣本平均數 $\bar{X}$ 為母體 μ 之不偏估計量。

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n E(X_i)\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mu\right) = \frac{1}{n} \cdot (n\mu) = \mu .$$

- 2) 試證：樣本變異數 $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 不為母體參數 σ^2 之不偏估計量。

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] \\ &= \frac{1}{n} E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2\right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left[(X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2\right] \\ &= \frac{1}{n} \left\{\sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] - 2E[(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)] + \sum_{i=1}^n E[(\bar{X} - \mu)^2]\right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{\sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] - 2E[(\bar{X} - \mu) \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)] + \sum_{i=1}^n E[(\bar{X} - \mu)^2]\right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{\sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] - 2E[(\bar{X} - \mu)(n\bar{X} - n\mu)] + \sum_{i=1}^n E[(\bar{X} - \mu)^2]\right\} \end{aligned}$$

因 $E[(X_i - \mu)^2] = \sigma^2$, $E[(\bar{X} - \mu)^2] = \frac{1}{n}\sigma^2$ ，將之代入上式可得

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma^2 - 2E \left[n(\bar{X} - \mu)^2 \right] + n \cdot \frac{1}{n} \sigma^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left(n\sigma^2 - 2n \cdot \frac{1}{n} \sigma^2 + n \cdot \frac{1}{n} \sigma^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} (n\sigma^2 - \sigma^2) \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \\ &\neq \sigma^2. \end{aligned}$$

故 $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 不為母體參數 σ^2 之不偏估計量。

3) 試證：樣本變異數 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 為母體參數 σ^2 之不偏估計量。

參考證明 2)，

$$E(S^2) = E \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] = \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] = \frac{1}{n-1} \cdot (n-1) \sigma^2 = \sigma^2。$$

故 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 為母體參數 σ^2 之不偏估計量。

由上述證明中，可發現以 $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 去估計母數 σ^2 會造成低估的現象，為了消除

此低估的現象，樣本標準差以 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 較 $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 為佳。

※ 結論 ※

事實上，我們所研究的母體通常很大，不容易由普查求得算術平均數 μ 與標準差 σ ，所得的數據大部分都是抽樣的結果，所以計算時多使用樣本平均數與樣本標準差。目前九十九年課程綱要，在高中數學第二冊第四章 4-1 節「一維數據分析」已刪除樣本標準差 S 的教學，造成第四章 4-2 節「二維數據分析」不一致性的教學，亦即 4-1 節只教「母體標準差 σ 」，而 4-2 節中的相關係數 $r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ ，及迴歸直線 $y = a + bx$ 的斜率 $b = r \cdot \frac{S_y}{S_x} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ 均是樣本標準差的教學，前後不符合統計學的「一致性」準則，值得編撰高中數學課本的省思，也澄清樣本標準差公式的運用。

參考資料

1. 張碧波（民國 67 年），推理統計學，三民書局
2. 方世榮（民國 91 年），基礎統計學（二版），華泰文化事業



國立臺灣師範大學數學系

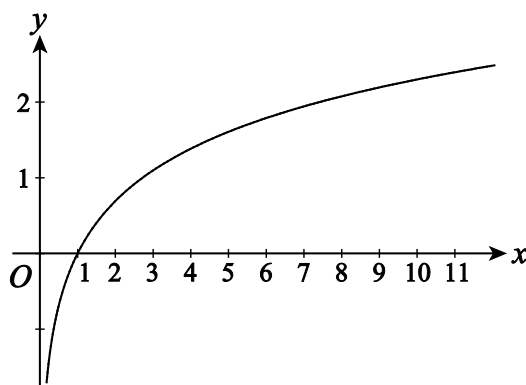
100學年度甄選入學指定項目甄試試題

筆試一、計算證明題（考試時間：2 小時）

1. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，試求滿足 $x^{1+\log_a x} > a^2 x^2$ 的所有實數 x 。（20 分）
2. 將由左至右的六個位置分別填入 0 或 1 或 2 的數字，成為「三元字串」，例如：201021 是一個三元字串。對於兩個三元字串 $a = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ 與 $b = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$ ，定義 a 與 b 的距離為滿足 $a_i \neq b_i$ 之下標 i 的個數，例如：201021 與 001011 的距離為 2（因為它們的第一及第五個位置的數字不相同）。
 - (1) 試問與 201021 的距離為 3 的三元字串共有多少個？（8 分）
 - (2) 試求所有三元字串與 201021 的距離總和。（12 分）
3. 在 $\triangle ABC$ 中，令 $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}, c = \overline{AB}$ 。
 - (1) 試敘述並證明以三邊長 a, b 與 c 表示 $\triangle ABC$ 面積的海龍公式（Heron formula）。（10 分）
 - (2) 設 $\triangle ABC$ 三頂點的坐標分別為 $A(-18, 26), B(3, -46)$ 與 $C(45, 10)$ ，而 $\angle B$ 的外角平分線與 $\angle C$ 的外角平分線相交於點 J 。試求以點 J 為圓心且與直線 BC 、直線 CA 、直線 AB 都相切的圓之半徑長。（10 分）
4. (1) 試利用數學歸納法證明：對每個大於 1 的整數 n ，恆有
$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}} < \frac{3}{2^{n-1}\sqrt{n+2}}.$$
請注意：上式右端的分母是 $n+2$ 的正 2^{n-1} 次方根。（15 分）
 - (2) 試證：對每個大於 1 的整數 n ，恆有 $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}} < 3$ 。（5 分）
5. 給定坐標平面上兩個圓 $\Gamma_1: x^2 + y^2 - 100 = 0$ 與 $\Gamma_2: x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$ 及一點 $A(8, 0)$ ，試求
 - (1) 通過點 A 且與圓 Γ_1 相切的所有圓的圓心所成圖形的方程式。（7 分）
 - (2) 通過點 A 且與圓 Γ_2 相切的所有圓的圓心所成圖形的方程式。（8 分）
 - (3) 通過點 A 且與圓 Γ_1 、圓 Γ_2 都相切的所有圓的圓心坐標。（5 分）

筆試二、填充題（考試時間：1.5 小時）

1. 已知 $\log a \approx 12.27, \log b \approx 8.36$ ，設 $ab = c \times 10^n, 1 \leq c < 10, n$ 為整數。若 m 表示小於或等於 c 的最大整數，則數對 $(m, n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
下圖為對數函數 $y = \log x$ 的圖形：



2. 坐標空間中，給定兩點 $A(2, -4, 4), B(10, 2, 6)$ ，若在平面 $x - 2y + 2z = 0$ 上取一點 P ，使得 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 最短，則 P 的坐標為 _____。
3. 若 $\triangle ABC$ 的三內角分別為 $15^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ ，則 $\triangle ABC$ 的外接圓面積與 $\triangle ABC$ 的面積之比值為 _____。
4. 若 x, y, z 皆為實數且滿足 $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1$ ，則 $x + y + z$ 的最大值為 _____。
5. 某箱子內有 10 顆骰子，其中有 3 顆為公正骰子，另 7 顆為不公正骰子，不公正骰子每顆出現點數 6 的機率皆為 0.6。今在箱子中取一顆骰子（假設每顆骰子取出的機會相等），結果擲出點數 6。在此情況下，這顆骰子為不公正骰子的機率為 _____。
6. 在 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 範圍內，函數 $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x + 1$ 的最大值為 _____。
7. 設無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 及 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1, b_1 = 2$ ，且

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \dots$$
 若極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \alpha$ 存在且 $\alpha < 1$ ，則 $\alpha =$ _____。
8. 假設 小紋 從家裡到學校所花的時間滿足常態分配，平均數為 50 分鐘、標準差為 x 分鐘。如果 小紋 早上 7 點鐘從家裡出發，到校時間介於 7 點 30 分與 8 點 10 分之間的機率為 95%，則 $x =$ _____。
 註：已知常態分配約有 68% 的資料會落在距平均數一個標準差之內，有 95% 的資料會落在距平均數兩個標準差之內，有 99.7% 的資料會落在距平均數三個標準差之內。
9. 已知 $\theta \in [0, 2\pi]$ 。若對任意實數 $x, 2^{2x} - 2^{x-1} - \frac{7}{16} + \sin \theta \geq 0$ 恆成立，則 θ 的範圍為 _____。
10. 在坐標平面上，設 Γ 為所有滿足 $\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y+8)^2} = 16$ 的點 (x, y) 所成的圖形。若圓心為 (a, b) 半徑為 1 的圓與 Γ 相切，則 $a^2 + b^2$ 的最大值為 _____。

筆試一、計算證明題

1. 令 $X = \log_a x$ ，根據定義 $0 < x$ 。現在依 $a > 1$ 及 $0 < a < 1$ 兩種情況討論如下：

① 當 $a > 1$ 時，將不等式 $x^{1+\log_a x} > a^2 x^2$ 取對數，得

$$\log_a x^{1+\log_a x} > \log_a a^2 x^2,$$

整理得 $X + X^2 > 2 + 2X$ ，即 $(X-2)(X+1) > 0$ ，解得

$$X < -1 \text{ 或 } X > 2.$$

因此 $\log_a x < -1$ 或 $\log_a x > 2$ ，得到

$$0 < x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > a^2.$$

② 當 $0 < a < 1$ 時，同樣將不等式兩邊取對數，得 $(X-2)(X+1) < 0$ ，即 $-1 < X < 2$ ，

解得

$$a^2 < x < \frac{1}{a}.$$

2. 所謂三元字串就是從 0, 1, 2 三類數字裡取出六個，並排成一系列的方法數：

(1) 與 201021 的距離為 3 的三元字串就是僅能改變六個位置中的三個，而且每個改變的位置只能填入其餘的兩個數字，因此一共有

$$C_3^6 \times 2^3 = 160$$

個。

(2) 從(1)的討論中，可以發現：與 201021 的距離為 k ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 的三元字串共有

$$C_k^6 \times 2^k$$

個。因此，所有三元字串與 201021 的距離總和為

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^6 (C_k^6 \times 2^k) \times k \\ &= C_1^6 \cdot 2^1 \cdot 1 + C_2^6 \cdot 2^2 \cdot 2 + \cdots + C_6^6 \cdot 2^6 \cdot 6 \\ &= 12 + 120 + 480 + 960 + 960 + 384 \\ &= 2916. \end{aligned}$$

【另解】最後的級數和也可以計算如下：

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^6 (C_k^6 \times 2^k) \times k \\ &= \sum_{k=1}^6 (6 \times 2C_{k-1}^5 \times 2^{k-1}) \\ &= 12(1+2)^5 \\ &= 2916. \end{aligned}$$



3. (1) 海龍公式：若 $s = \frac{a+b+c}{2}$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

證明：將餘弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 代入三角形面積公式

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

得

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ 的面積} &= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{bc}{2} \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{bc}{2} \sqrt{1^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2} \\ &= \frac{bc}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)} \\ &= \frac{bc}{2} \sqrt{\left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)(a^2 - b^2 + 2bc - c^2)}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2} \cdot \frac{(b+c-a)}{2} \cdot \frac{(a+c-b)}{2} \cdot \frac{(a+b-c)}{2}} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

- (2) 設該圓的半徑為 r 且該圓與直線 BC 、直線 CA 、直線 AB 分別相切於 A_1, B_1, C_1 三點。因為 $\overline{BC_1} = \overline{BA_1}$, $\overline{CB_1} = \overline{CA_1}$, $a = \overline{BC} = \overline{BA_1} + \overline{CA_1}$ ，所以 $\overline{BC_1} + \overline{CB_1} = a$ ，又因為 $\overline{AC_1} = \overline{AB_1}$ ，所以 $\overline{AC_1} = \overline{AB_1} = \frac{a+b+c}{2} = s$ 。因為四邊形 AC_1JB_1 的面積等於 $\triangle AC_1J$ 與 $\triangle AB_1J$ 的面積和，所以

$$\text{四邊形 } AC_1JB_1 \text{ 的面積} = sr + sr = (a+b+c)r.$$

又因為

$$\text{四邊形 } AC_1JB_1 \text{ 的面積} = \triangle ABC \text{ 的面積} + 2\triangle JBC \text{ 的面積},$$

所以

$$\text{四邊形 } AC_1JB_1 \text{ 的面積} = \triangle ABC \text{ 的面積} + ar.$$

由這兩個四邊形 AC_1JB_1 的面積公式得到

$$r = \frac{\Delta ABC}{b+c} .$$

由 $A(-18, 26), B(3, -46), C(45, 10)$ 及距離公式可得

$$a = 70, b = 65, c = 75 .$$

將此代入海龍公式，得

$$\Delta ABC \text{ 的面積} = \sqrt{105(105-70)(105-65)(105-75)} = 2100 .$$

故該圓的半徑長

$$r = \frac{2100}{65+75} = 15 .$$

4. (1) ①當 $n=2$ 時，由左式 $= \sqrt{2} \approx 1.414$ ，右式 $= \frac{3}{\sqrt{2+2}} = 1.5$ 知不等式成立。

②設 $n=k$ 時不等式成立，即 $A = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{k}}}}} < \frac{3}{\sqrt[2^{k-1}]{k+2}} = B$.

當 $n=k+1$ 時，利用上述不等式，得

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{k}\sqrt{k+1}}}}} = \sqrt[2^k]{k+1}A \\ &< \sqrt[2^k]{k+1}B = \frac{3\sqrt[2^k]{k+1}}{\sqrt[2^{k-1}]{k+2}} = 3\sqrt[2^k]{\frac{k+1}{(k+2)^2}} \\ &< 3\sqrt[2^k]{\frac{1}{k+3}} = \text{右式} . \end{aligned}$$

根據數學歸納法，不等式成立。

(2) 根據(1)的不等式，我們只需證明不等式

$$\frac{3}{\sqrt[2^{n-1}]{n+2}} < 3 \text{ 或 } 1 < \sqrt[2^{n-1}]{n+2}$$

成立即可，而這不等式又等同於不等式

$$1 < n+2 ,$$

顯然成立。故對每個大於 1 的整數 n ，恆有

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{n}}}}} < 3 .$$

5. 因為

$$\Gamma_1 : (x-0)^2 + (y-0)^2 = 10^2, \Gamma_2 : (x-(-4))^2 + (y-0)^2 = 6^2 ,$$

所以圓 Γ_1 的圓心 $O_1(0,0)$ ，半徑 10；而圓 Γ_2 的圓心 $O_2(-4,0)$ ，半徑 6。

- (1) 設圓心 $P(x, y)$ ，半徑 r 的圓 Γ 通過點 A 且與圓 Γ_1 相切。因為點 A 在圓 Γ_1 內且圓 Γ 過點 A ，所以圓心 $P(x, y)$ 在圓 Γ_1 內部，且滿足

$$\overline{PO_1} + \overline{PA} = \text{圓 } \Gamma_1 \text{ 半徑} = 10 .$$

這式子告訴我們：點 $P(x, y)$ 在以 O_1, A 為焦點，中心 $(4, 0)$ ，長軸長 10 的橢圓上，即點 $P(x, y)$ 滿足方程式

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 .$$

- (2) 設圓心 $P(x, y)$ ，半徑 r 的圓 Γ 通過點 A 且與圓 Γ_2 相切。因為點 A 在圓 Γ_2 外且圓 Γ 過點 A ，所以圓心 $P(x, y)$ 在圓 Γ_2 外部，且滿足

$$\overline{PO_2} = \overline{PA} + \text{圓 } \Gamma_2 \text{ 半徑} = \overline{PA} + 6 \Rightarrow \overline{PO_2} - \overline{PA} = 6 .$$

這式子告訴我們：點 $P(x, y)$ 在以 O_2, A 為焦點，中心 $(2, 0)$ ，實軸長 6 的雙曲線之右半支上，即點 $P(x, y)$ 滿足方程式

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1, x > 2 .$$

- (3) 通過點 A 且與圓 Γ_1 、圓 Γ_2 都相切的所有圓的圓心坐標剛好是滿足聯立方程組

$$\begin{cases} \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1, x > 2 \end{cases}$$

的解。利用消去法解得

$$(x, y) = \left(\frac{38}{7}, \pm \frac{9\sqrt{5}}{7} \right) .$$

筆試二、填充題

參考答案

1.	2.	3.	4.	5.
$(4, 20)$	$(4, 3, 1)$	2π	$\sqrt{6}$	$\frac{42}{47}$
6.	7.	8.	9.	10.
$\frac{7}{4}$ 或 1.75	$-\frac{1}{2}$ 或 -0.5	10	$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$	$(9 + \sqrt{5})^2$ 或 $86 + 18\sqrt{5}$

兼談三條件決定圓(四)

趙文敏／臺灣師大數學系

⑩ 圓圓圓問題

問題：給定三相異圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ ，試作出與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 、圓 $O_3(r_3)$ 都相切的圓。

解：根據三給定圓的相對位置，我們考慮下面六種情形：

一、圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 兩兩外離且半徑兩兩不相等；設 $r_1 > r_2 > r_3$ 。點 O_3 不在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的外公切線上、也不在圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的外公切線上、也不在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的內公切線上、也不在圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的內公切線上；又圓心 O_1 ， O_2 與 O_3 不共線。

《作圖法》

在此情形中，所求圓共有八解（如圖 59 所示），依相切狀況分成四組。

第一組兩解：（如圖 60 所示）

可能兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都外切，與圓 $O_2(r_2)$ 都外切，也與圓 $O_3(r_3)$ 都外切；

可能兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，與圓 $O_2(r_2)$ 都內切，也與圓 $O_3(r_3)$ 都內切；

可能其中一圓與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 、圓 $O_3(r_3)$ 都外切，

另一圓與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 、圓 $O_3(r_3)$ 都內切。

第二組兩解：（如圖 61 所示）

可能兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都外切，與圓 $O_2(r_2)$ 都外切，而與圓 $O_3(r_3)$ 都內切；

可能兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，與圓 $O_2(r_2)$ 都內切，而與圓 $O_3(r_3)$ 都外切；

可能其中一圓與圓 $O_1(r_1)$ 外切，與圓 $O_2(r_2)$ 外切，而與圓 $O_3(r_3)$ 內切，

另一圓與圓 $O_1(r_1)$ 內切，與圓 $O_2(r_2)$ 內切，而與圓 $O_3(r_3)$ 外切。

第三組兩解：（如圖 62 所示）

可能兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都外切，與圓 $O_3(r_3)$ 都外切，而與圓 $O_2(r_2)$ 都內切；

可能兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，與圓 $O_3(r_3)$ 都內切，而與圓 $O_2(r_2)$ 都外切；

可能其中一圓與圓 $O_1(r_1)$ 外切，與圓 $O_3(r_3)$ 外切，而與圓 $O_2(r_2)$ 內切，

另一圓與圓 $O_1(r_1)$ 內切，與圓 $O_3(r_3)$ 內切，而與圓 $O_2(r_2)$ 外切。

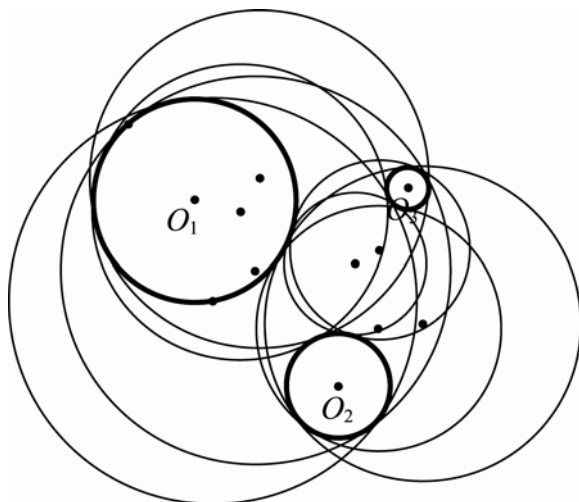
第四組兩解：（如圖 63 所示）

可能兩圓與圓 $O_2(r_2)$ 都外切，與圓 $O_3(r_3)$ 都外切，而與圓 $O_1(r_1)$ 都內切；

可能兩圓與圓 $O_2(r_2)$ 都內切，與圓 $O_3(r_3)$ 都內切，而與圓 $O_1(r_1)$ 都外切；

可能其中一圓與圓 $O_2(r_2)$ 外切，與圓 $O_3(r_3)$ 外切，而與圓 $O_1(r_1)$ 內切，

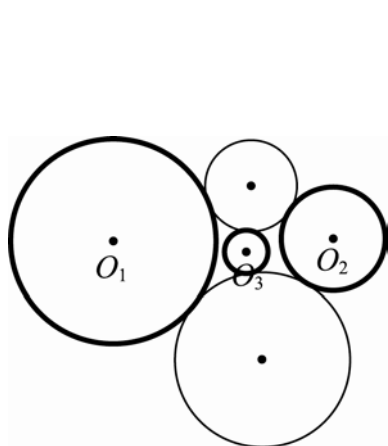
另一圓與圓 $O_2(r_2)$ 內切，與圓 $O_3(r_3)$ 內切，而與圓 $O_1(r_1)$ 外切。



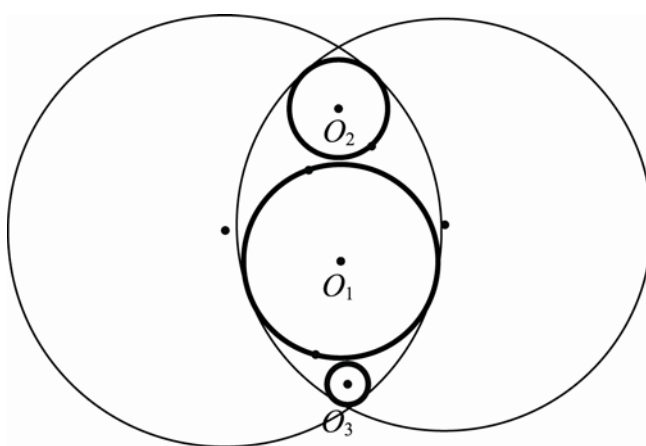
▲ 圖 59

* 第一組：與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 都外切或都內切的圓

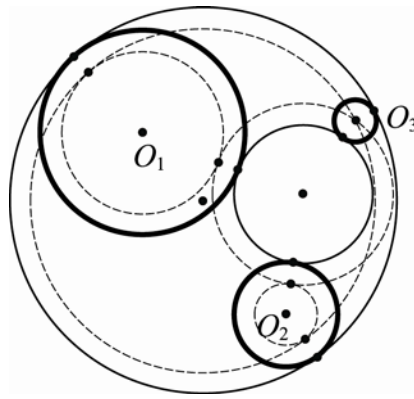
1. 因為圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 外離且半徑不相等；點 O_3 在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的外部，但不在此兩圓的連心線上也不在此兩圓的外公切線上。所以，可仿照「點圓圓」問題第一種情形第一組圓的作圖法（利用圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的外相似中心），作出過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 都外切或都內切的圓。依「點圓圓」問題第一種情形第一組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑增長 r_3 或減短 r_3 後為半徑作圓，即可得出與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 都外切或都內切的兩個圓。請注意：若作圖法第 1 點所作的圓與圓 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 都外切，則須將半徑減短 r_3 後所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 都外切；若作圖法第 1 點所作的圓與圓 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 都內切，則須將半徑增長 r_3 後所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 都內切。



(a)



(b)



(c)

▲ 圖 60

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, $O_3(r_3)$ 都外切，則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = t + r_1, \quad \overline{XO_2} = t + r_2, \quad \overline{XO_3} = t + r_3.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = r_1 - r_3, \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = r_2 - r_3.$$

由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 - r_3)$, $O_2(r_2 - r_3)$ 都外切之圓的圓心。

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, $O_3(r_3)$ 都內切，則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = t - r_1, \quad \overline{XO_2} = t - r_2, \quad \overline{XO_3} = t - r_3.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = -(r_1 - r_3), \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = -(r_2 - r_3).$$

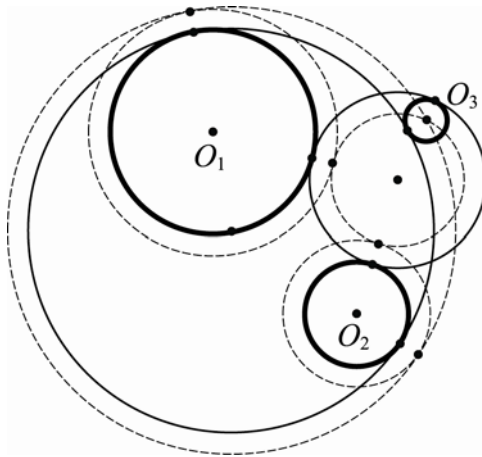
由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 較靠近焦點 O_1 的一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 較靠近焦點 O_2 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 - r_3)$, $O_2(r_2 - r_3)$ 都內切之圓的圓心。

因為圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 外離，點 O_3 在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的外部，但不在此兩圓的連心線上也不在此兩圓的外公切線上；所以，雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 至多有四個交點。但因為前兩段所提的交點，都限定是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 的其中一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 的其中一支的交點；所以，所得的交點只有兩點。

* 第二組：與圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 外切而與圓 $O_3(r_3)$ 內切，或與圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切的圓

1. 因為圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 外離或外切或相交於兩點且半徑不相等；點 O_3 在圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的外部，但不在此兩圓的連心線上也不在此兩圓的外公切線上。所以，可仿照「點圓圓」問題第一、三、四等三種情形第一組圓的作圖法（利用圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的外相似中心），作出過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 + r_3)$, $O_2(r_2 + r_3)$ 都外切或都內切的圓。依「點圓圓」問題第一、三、四等三種情形第一組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。

2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑增長 r_3 或減短 r_3 後為半徑作圓，即可得出與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 外切而與圓 $O_3(r_3)$ 內切，或與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切的兩個圓。請注意：若作圖法第 1 點所作的圓過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 + r_3)$ ， $O_2(r_2 + r_3)$ 都外切，則須將半徑增長 r_3 後所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 外切而與圓 $O_3(r_3)$ 內切；若作圖法第 1 點所作的圓過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 + r_3)$ ， $O_2(r_2 + r_3)$ 都內切，則須將半徑減短 r_3 後所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切。



▲ 圖 61

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 外切而與圓 $O_3(r_3)$ 內切，則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = t + r_1, \quad \overline{XO_2} = t + r_2, \quad \overline{XO_3} = t - r_3.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = r_1 + r_3, \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = r_2 + r_3.$$

由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與 $O_1(r_1 + r_3)$ ， $O_2(r_2 + r_3)$ 都外切之圓的圓心。

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切，則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = t - r_1, \quad \overline{XO_2} = t - r_2, \quad \overline{XO_3} = t + r_3.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = -(r_1 + r_3), \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = -(r_2 + r_3).$$

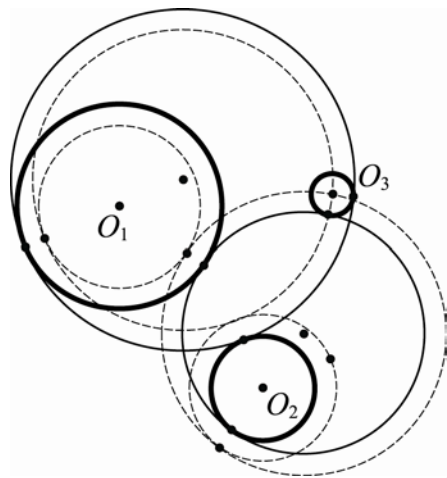
由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 較靠近焦點 O_1 的一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 較靠近焦點 O_2 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與 $O_1(r_1 + r_3)$ ， $O_2(r_2 + r_3)$ 都內切之圓的圓心。

因為圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 外離或外切或相交於兩點，點 O_3 在兩圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與 $O_2(r_2 + r_3)$ 的外部，但不在此兩圓的連心線上也不在此兩圓的外公切線上；所以，兩雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 與 $H(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 至多有四個交點。但因為前兩

段所提的交點，都限定是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 的其中一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 的其中一支的交點；所以，所得的交點只有兩點。

＊ 第三組：與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切，或與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切的圓

1. 因為圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 外離且半徑不相等，點 O_3 在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的外部，但不在此兩圓的連心線上也不在此兩圓的內公切線上。所以，可仿照「點圓圓」問題第一種情形第二組圓的作圖法（利用圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的內相似中心），作出過點 O_3 且與 $O_1(r_1 - r_3)$ 外切而與 $O_2(r_2 + r_3)$ 內切或與 $O_1(r_1 - r_3)$ 內切而與 $O_2(r_2 + r_3)$ 外切的圓。依「點圓圓」問題第一種情形第二組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑增長 r_3 或減短 r_3 後為半徑作圓，即可得出與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切，或與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切的兩個圓。請注意：若作圖法第 1 點所作的圓過點 O_3 且與 $O_1(r_1 - r_3)$ 外切而與 $O_2(r_2 + r_3)$ 內切，則須將半徑減短 r_3 後所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切；若作圖法第 1 點所作的圓過點 O_3 且與 $O_1(r_1 - r_3)$ 內切而與 $O_2(r_2 + r_3)$ 外切，則須將半徑增長 r_3 後所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切。



▲ 圖 62

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切，則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = t + r_1, \quad \overline{XO_2} = t - r_2, \quad \overline{XO_3} = t + r_3.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = r_1 - r_3, \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = -(r_2 + r_3).$$

由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 較靠近焦點 O_2 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與 $O_1(r_1 - r_3)$ 外切，與 $O_2(r_2 + r_3)$ 內切之圓的圓心。

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切，則其圓心 X 必滿足下述

條件：

$$\overline{XO_1} = t - r_1, \quad \overline{XO_2} = t + r_2, \quad \overline{XO_3} = t - r_3.$$

消去 t 後得

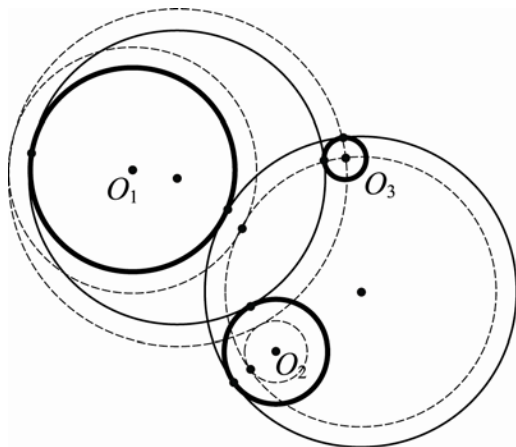
$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = -(r_1 - r_3), \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = r_2 + r_3.$$

由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 較靠近焦點 O_1 的一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與 $O_1(r_1 - r_3)$ 內切，與 $O_2(r_2 + r_3)$ 外切之圓的圓心。

因為圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 外離，點 O_3 在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的外部，但不在此兩圓的連心線上也不在此兩圓的內公切線上；所以，雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 至多有四個交點。但因為前兩段所提的交點，都限定是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 的其中一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 的其中一支的交點；所以，所得的交點只有兩點。

＊ 第四組：與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_1(r_1)$ 內切，或與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_1(r_1)$ 外切的圓

1. 因為圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 外離且半徑不相等，點 O_3 在圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的外部，但不在此兩圓的連心線上也不在此兩圓的內公切線上；所以，可仿照「點圓圓」問題第一種情形第二組圓的作圖法（利用圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的內相似中心），作出過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 外切而與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 內切或與圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 外切的圓。依「點圓圓」問題第一種情形第二組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑增長 r_3 或減短 r_3 後為半徑作圓，即可得出與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_1(r_1)$ 內切，或與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_1(r_1)$ 外切的兩個圓。請注意：若作圖法第 1 點所作的圓過點 O_3 且與 $O_1(r_1 + r_3)$ 外切而與 $O_2(r_2 - r_3)$ 內切，則須將半徑增長 r_3 後所作的圓才與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_1(r_1)$ 外切；若作圖法第 1 點所作的圓過點 O_3 且與 $O_1(r_1 + r_3)$ 內切而與 $O_2(r_2 - r_3)$ 外切，則須將半徑減短 r_3 後所作的圓才與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_1(r_1)$ 內切。



▲ 圖 63

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_1(r_1)$ 內切，則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = t - r_1, \quad \overline{XO_2} = t + r_2, \quad \overline{XO_3} = t + r_3.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = -(r_1 + r_3), \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = r_2 - r_3.$$

由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 較靠近焦點 O_1 的一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與 $O_1(r_1 + r_3)$ 內切，與 $O_2(r_2 - r_3)$ 外切之圓的圓心。

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_1(r_1)$ 外切，則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = t + r_1, \quad \overline{XO_2} = t - r_2, \quad \overline{XO_3} = t - r_3.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = r_1 + r_3, \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = -(r_2 - r_3).$$

由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 較靠近焦點 O_2 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與 $O_1(r_1 + r_3)$ 外切，與 $O_2(r_2 - r_3)$ 內切之圓的圓心。

因為圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 外離，點 O_3 在兩圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與 $O_2(r_2 - r_3)$ 的外部，但不在此兩圓的連心線上也不在兩圓的內公切線上；所以，雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 至多有四個交點。但因為前兩段所提的交點，都限定是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 的其中一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 的其中一支的交點；所以，所得的交點只有兩點。

二、圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 兩兩外切且半徑兩兩不相等；設 $r_1 > r_2 > r_3$ 。點 O_3 不在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的外公切線上。

《作圖法》

在此情形中，所求圓只有兩解（如圖 64 所示），此兩圓都是第一組圓。

可能兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都外切、與圓 $O_2(r_2)$ 都外切、與圓 $O_3(r_3)$ 都外切；

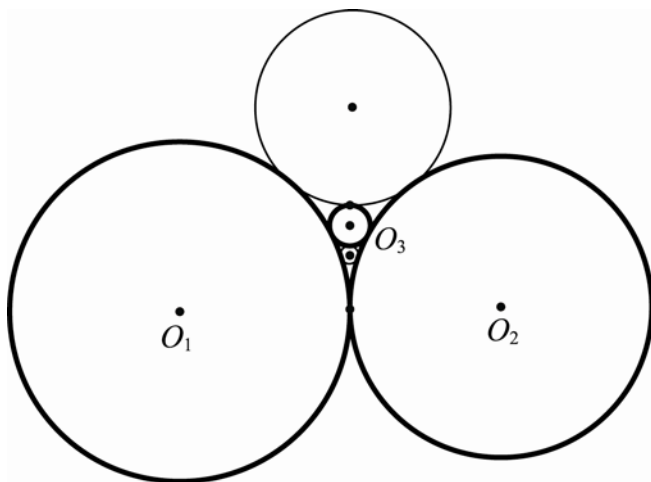
可能其中一圓與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 、圓 $O_3(r_3)$ 都外切；

另一圓與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 、圓 $O_3(r_3)$ 都內切。

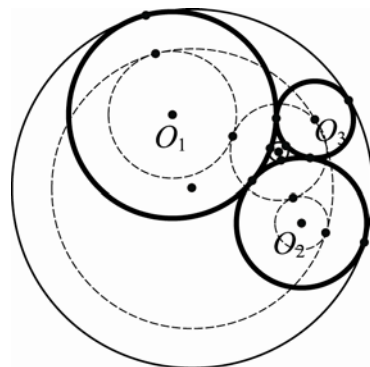
作圖法與本小節「圓圓圓」問題第一種情形第一組圓的作圖法相同。

此情形中為什麼沒有第二、三、四組圓呢？其理由如下：設圓 X 與圓 $O_i(r_i)$ 內切而與圓 $O_j(r_j)$ 外切， $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ 。若圓 X 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點不是圓 $O_i(r_i)$ 與圓 $O_j(r_j)$ 外切的切點，則圓 $O_i(r_i)$ 與圓 $O_j(r_j)$ 外切的切點在圓 X 的內部（因為此切點在圓 $O_i(r_i)$ 上）。於是，圓 $O_j(r_j)$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），這與圓 X 、圓 $O_j(r_j)$ 外切的假設矛盾。若圓 X 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點也是圓 $O_i(r_i)$ 與圓 $O_j(r_j)$ 外切的切點，則圓 $O_{6-i-j}(r_{6-i-j})$ 與圓 $O_i(r_i)$ 外切的切點在圓 X 的內部（因為此切點在圓 $O_i(r_i)$ 上）；而圓 $O_{6-i-j}(r_{6-i-j})$ 與圓 $O_j(r_j)$ 外切的切點在圓 X 的外部（因為此切點在圓

$O_j(r_j)$ 上)。於是，圓 $O_{6-i-j}(r_{6-i-j})$ 上有些點在圓 X 的內部、也有些點在圓 X 的外部，這表示圓 X 與圓 $O_{6-i-j}(r_{6-i-j})$ 不會相切。



(a)



(b)

▲ 圖 64

《證明》

證明與本小節「圓圓圓」問題第一種情形第一組圖作圖法的證明相同。

三、圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 的半徑兩兩不相等；設 $r_1 > r_2 > r_3$ 。八個交集 $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ 都不是空集合，其中集合 S_i 表示圓 $O_i(r_i)$ 的內部或外部， $i = 1, 2, 3$ ；點 O_3 不在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的外公切線上，也不在圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的外公切線上，也不在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的內公切線上，也不在圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的內公切線上；又圓心 O_1 ， O_2 與 O_3 不共線。

《作圖法》

在此情形中，所求圓共有八解（如圖 65 所示），依相切狀況分成四組。

第一組兩解：（如圖 66 所示）

兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，與圓 $O_2(r_2)$ 都內切，也與圓 $O_3(r_3)$ 都內切；

但其中一圓將圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 、圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外），

另一圓被圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 、圓 $O_3(r_3)$ 包在它們的內部（切點除外）。

第二組兩解：（如圖 67 所示）

其中一圓與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 外切而與圓 $O_3(r_3)$ 內切，

另一圓與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切。

第三組兩解：（如圖 68 所示）

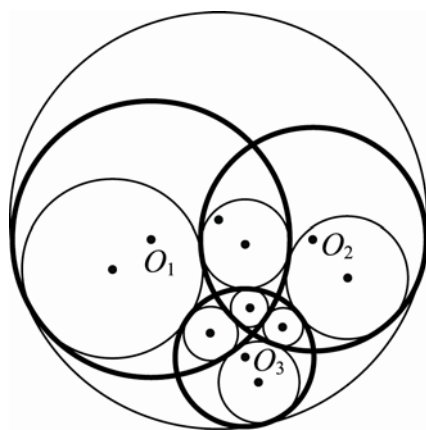
其中一圓與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切，

另一圓與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切。

第四組兩解：（如圖 69 所示）

其中一圓與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_1(r_1)$ 內切，

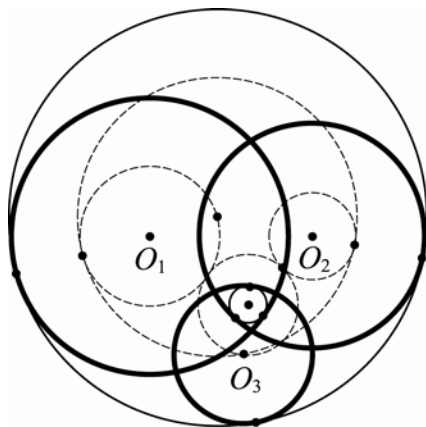
另一圓與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_1(r_1)$ 外切。



▲ 圖 65

* 第一組：與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 都內切的圓

1. 因為圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 為外離或外切或相交於兩點且半徑不相等，點 O_3 在兩圓的外部（若點 O_3 在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 的內部，則圓 $O_3(r_3)$ 包含在圓 $O_1(r_1)$ 的內部），但不在兩圓 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 的連心線上也不在兩圓 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 的外公切線上；所以，可仿照「點圓圓」問題第一、三、四等三種情形第一組圓的作圖法（利用圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的外相似中心），作出過點 O_3 且與 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 都外切或都內切的圓。依「點圓圓」問題第一、三、四種情形第一組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑增長 r_3 或改以 $(r_3 - \text{該圓半徑})$ 為半徑作圓，即可得出與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 都內切的兩個圓。請注意：若作圖法第 1 點所作的圓與圓 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 都內切，則須將半徑增長 r_3 後所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 都內切，此時所作之圓將圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）；若作圖法第 1 點所作的圓與圓 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 都外切，則須改以 $(r_3 - \text{該圓半徑})$ 為半徑所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 都內切，此時所作之圓被 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 包在它們的內部（切點除外）。



▲ 圖 66

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 、圓 $O_3(r_3)$ 都內切且圓 $X(t)$ 將圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外），則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = t - r_1, \quad \overline{XO_2} = t - r_2, \quad \overline{XO_3} = t - r_3.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = -(r_1 - r_3), \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = -(r_2 - r_3).$$

由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 較靠近焦點 O_1 的一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 較靠近焦點 O_2 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 都內切之圓的圓心。

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 、圓 $O_3(r_3)$ 都內切且圓 $X(t)$ 被圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 包在它們的內部（切點除外），則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = r_1 - t, \quad \overline{XO_2} = r_2 - t, \quad \overline{XO_3} = r_3 - t.$$

消去 t 後得

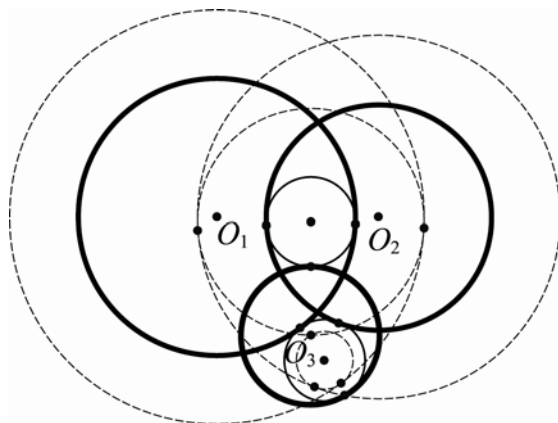
$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = r_1 - r_3, \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = r_2 - r_3.$$

由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 都外切之圓的圓心。

因為圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 外離或外切或相交於兩點且半徑不相等，點 O_3 在兩圓 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 的外部，但不在此兩圓的連心線上也不在此兩圓的外公切線上；所以，雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 至多有四個交點。但因為前兩段所提的交點，都限定是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 的其中一支與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 的其中一支的交點；所以，所得的交點只有兩點。

＊ 第二組：與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 外切而與圓 $O_3(r_3)$ 內切，或與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切的圓

1. 因為圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 相交於兩點且半徑不相等，點 O_3 在兩圓的內部，但不在圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的連心線上；所以，可仿照「點圓圓」問題第六種情形的作圖法（利用圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的外相似中心），作出過點 O_3 且與 $O_1(r_1 + r_3)$ ， $O_2(r_2 + r_3)$ 都內切的圓。依「點圓圓」問題第六種情形作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑減短 r_3 或改以（ $r_3 -$ 該圓半徑）為半徑作圓，即可得出與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 外切而與圓 $O_3(r_3)$ 內切，或與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切的兩個圓。請注意：若作圖法第 1 點所作之圓的圓心位於圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 的內部，則須將半徑減短 r_3 後所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切；若作圖法第 1 點所作之圓的圓心位於圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 的外部，則須改以（ $r_3 -$ 該圓半徑）為半徑所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 外切而與圓 $O_3(r_3)$ 內切。



▲ 圖 67

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 外切而與圓 $O_3(r_3)$ 內切且圓 $X(t)$ 被圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外），則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = t + r_1, \quad \overline{XO_2} = t + r_2, \quad \overline{XO_3} = r_3 - t.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} + \overline{XO_3} = r_1 + r_3, \quad \overline{XO_2} + \overline{XO_3} = r_2 + r_3.$$

由此可知：圓心 X 是橢圓 $E(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 與橢圓 $E(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 + r_3)$, $O_2(r_2 + r_3)$ 都內切之圓的圓心。

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切且圓 $X(t)$ 被圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 包在它們的內部（切點除外），則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = r_1 - t, \quad \overline{XO_2} = r_2 - t, \quad \overline{XO_3} = t + r_3.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} + \overline{XO_3} = r_1 + r_3, \quad \overline{XO_2} + \overline{XO_3} = r_2 + r_3.$$

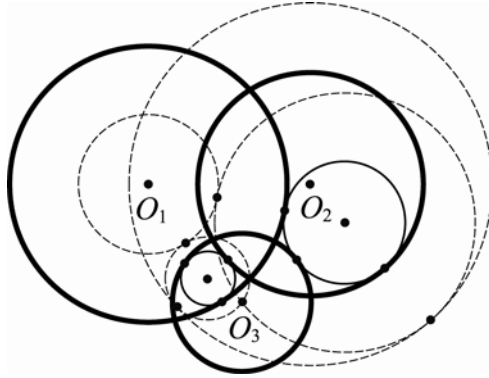
由此可知：圓心 X 是橢圓 $E(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 與橢圓 $E(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 + r_3)$, $O_2(r_2 + r_3)$ 都內切之圓的圓心。

因為圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 相交於兩點，點 O_3 在兩圓 $O_1(r_1 + r_3)$, $O_2(r_2 + r_3)$ 的內部，但不在此兩圓的連心線上；所以，依第 9 小節思考問題 37，橢圓 $E(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 與橢圓 $E(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 有兩個交點。

＊ 第三組：與圓 $O_1(r_1)$, $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切，或與圓 $O_1(r_1)$, $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切的圓

1. 因為圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 相交於兩點且半徑不相等，點 O_3 在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 的外部而在圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的內部，但不在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的連心線上；所以，可仿照「點圓圓」問題第五種情形的作圖法（利用圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的內相似中心），作出過點 O_3 且與 $O_1(r_1 - r_3)$ 外切而與 $O_2(r_2 + r_3)$ 內切的圓。依「點圓圓」問題第五種情形作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑減短 r_3 或改以 $(r_3 - \text{該圓半徑})$ 為半徑作圓，即可得出與圓 $O_1(r_1)$, $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切，或與圓 $O_1(r_1)$, $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切的兩個圓。請注意：若作圖法第 1 點所作之圓的圓心位於圓 $O_1(r_1)$, $O_3(r_3)$ 的外部，則須將半徑減短 r_3 後所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$, $O_3(r_3)$

外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切；若作圖法第 1 點所作之圓的圓心位於圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 的內部，則須改以 $(r_3 - \text{該圓半徑})$ 為半徑所作的圓才與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切。



▲ 圖 68

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切且圓 $X(t)$ 被圓 $O_2(r_2)$ 包在其內部（切點除外），則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = t + r_1, \quad \overline{XO_2} = r_2 - t, \quad \overline{XO_3} = t + r_3.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = r_1 - r_3, \quad \overline{XO_2} + \overline{XO_3} = r_2 + r_3.$$

由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支與橢圓 $E(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與 $O_1(r_1 - r_3)$ 外切，與 $O_2(r_2 + r_3)$ 內切之圓的圓心。

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切且圓 $X(t)$ 被圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 包在它們的內部（切點除外），則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = r_1 - t, \quad \overline{XO_2} = t + r_2, \quad \overline{XO_3} = r_3 - t.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} - \overline{XO_3} = r_1 - r_3, \quad \overline{XO_2} + \overline{XO_3} = r_2 + r_3.$$

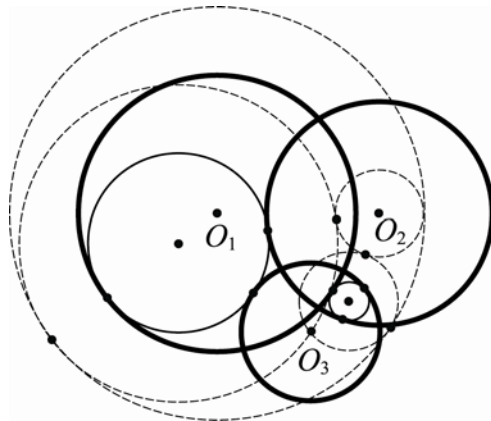
由此可知：圓心 X 是雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支與橢圓 $E(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與 $O_1(r_1 - r_3)$ 外切，與 $O_2(r_2 + r_3)$ 內切之圓的圓心。

因為圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 相交於兩點且半徑不相等，點 O_3 在圓 $O_1(r_1 - r_3)$ 的外部而在圓 $O_2(r_2 + r_3)$ 的內部，但不在兩圓 $O_1(r_1 - r_3)$ ， $O_2(r_2 + r_3)$ 的連心線上；所以，雙曲線 $H(O_1, O_3; r_1 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支與橢圓 $E(O_2, O_3; r_2 + r_3)$ 有兩個交點。

* 第四組：與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_1(r_1)$ 內切，或與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_1(r_1)$ 外切的圓

1. 因為圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 相交於兩點且半徑不相等，點 O_3 在圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 的內部而在圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的外部，但不在圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的連心線上；所以，可仿照「點圓圓」問題第五種情形的作圖法（利用圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的內相似中心），作出過點 O_3 且與 $O_1(r_1 + r_3)$ 內切而與 $O_2(r_2 - r_3)$ 外切的圓。依「點圓圓」問題第五種情形作圖法的結果，此種圓共兩解。

2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑減短 r_3 或改以 $(r_3 - \text{該圓半徑})$ 為半徑作圓，即可得出與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_1(r_1)$ 內切，或與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_1(r_1)$ 外切的兩個圓。請注意：若作圖法第 1 點所作之圓的圓心位於圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 的外部，則須將半徑減短 r_3 後所作的圓才與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_1(r_1)$ 內切；若作圖法第 1 點所作之圓的圓心位於圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 的內部，則須改以 $(r_3 - \text{該圓半徑})$ 為半徑所作的圓才與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_1(r_1)$ 外切。



▲ 圖 69

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_1(r_1)$ 內切且圓 $X(t)$ 被圓 $O_1(r_1)$ 包在其內部（切點除外），則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = r_1 - t, \quad \overline{XO_2} = t + r_2, \quad \overline{XO_3} = t + r_3.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} + \overline{XO_3} = r_1 + r_3, \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = r_2 - r_3.$$

由此可知：圓心 X 是橢圓 $E(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 內切，與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 外切之圓的圓心。

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_1(r_1)$ 外切且圓 $X(t)$ 被圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 包在它們的內部（切點除外），則其圓心 X 必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1} = t + r_1, \quad \overline{XO_2} = r_2 - t, \quad \overline{XO_3} = r_3 - t.$$

消去 t 後得

$$\overline{XO_1} + \overline{XO_3} = r_1 + r_3, \quad \overline{XO_2} - \overline{XO_3} = r_2 - r_3.$$

由此可知：圓心 X 是橢圓 $E(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點 X 也是過點 O_3 且與圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 內切，與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 外切之圓的圓心。

因為圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 與圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 相交於兩點且半徑不相等，點 O_3 在圓 $O_1(r_1 + r_3)$ 的內部而在圓 $O_2(r_2 - r_3)$ 的外部，但不在兩圓 $O_1(r_1 + r_3)$ ， $O_2(r_2 - r_3)$ 的連心線上；所以，橢圓 $E(O_1, O_3; r_1 + r_3)$ 與雙曲線 $H(O_2, O_3; r_2 - r_3)$ 較靠近焦點 O_3 的一支有兩個交點。

（未完待續）

解四次方程式

葉善雲／臺北市東山高中

** 摘要

卡丹諾 (G. Cardano, 1501~1576, 義大利) 在 1545 年出版的數學著作《大法 (Ars Magna)》一書中，首次載錄了三次、四次方程式的解法，我們很容易可從網路或手邊的書籍取得三次（卡丹諾解法）、四次（費拉里解法）方程式解法的說明①，但使用起來總覺得不順手，在本刊前兩期中筆者已探討三次方程式根的判別與根的公式②，此處繼續探討四次方程式。

** 內文

首先介紹費拉里 (L. Ferrari, 1522~1565) 解法的精要：在缺三次項的四次方程式 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ 中，先找一實數 k 滿足 $\left(x^2 + \frac{k}{2}\right)^2 = (k-p)x^2 - qx + \frac{k^2}{4} - r$ ，並使等式兩邊為完全平方式，然後利用平方差公式將四次方程式分解為兩個二次式的乘積，再分別解兩個二次方程式得方程式的四個根。在找實數 k 的過程中，要先解一個三次方程式，但得到的 k 能使「 $k-p > 0$ 」嗎？三次方程式的三個根與原四次方程式的四個根又有什麼關聯呢③？此處，我們將同時並列這些內容的關聯。

再來介紹費拉里解法：在實係數四次方程式 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ 中，

(1) 先找實數 k 滿足 $\left(x^2 + \frac{k}{2}\right)^2 = (k-p)x^2 - qx + \frac{k^2}{4} - r$ ，使等式兩邊為完全平方式，得

$$q^2 = 4(k-p)\left(\frac{k^2}{4} - r\right), \text{ 整理得 } k^3 - p \cdot k^2 - 4r \cdot k + (4pr - q^2) = 0,$$

$$\text{令 } k = m + p \text{ 代入上式，得 } (m+p)^3 - p \cdot (m+p)^2 - 4r \cdot (m+p) + (4pr - q^2) = 0,$$

整理成 $m^3 + 2pm^2 + (p^2 - 4r)m - q^2 = 0$ ，即 m 滿足下列三次方程式

$$y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0. \quad (\text{預解方程式})$$

當 $q=0$ 時，取 $k=p$ ，原四次方程式成為 $\left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - r$ ，得方程式的四根為

$$\pm \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} \text{ 或 } \pm \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2}}.$$

當 $q \neq 0$ 時，由勘根定理知上列預解方程式至少有一正實根④。

註 1：可參閱篇末參考資料書目的內容。

註 2：請參閱數亦優第 14 期 P.5~14、第 15 期 P.11~19。

註 3：一般篇章（例如篇末參考資料書目）僅探討其中一個問題，並未探討此兩者關聯。

註 4：原費拉里解法中關於 k 的三次方程式應作移根調整，才能有效選取正根。

(2) 找到預解方程式的一正實根 m 後（此時 $k = m + p$ ），原四次方程式成為

$$\left(x^2 + \frac{m+p}{2}\right)^2 = m \cdot \left(x - \frac{q}{2m}\right)^2, \text{ 且可分解為}$$

$$\left(x^2 - \sqrt{m} \cdot x + \left(\frac{m+p}{2} + \frac{q}{2\sqrt{m}}\right)\right) \left(x^2 + \sqrt{m} \cdot x + \left(\frac{m+p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{m}}\right)\right) = 0 \text{ ⑤},$$

得四次方程式的四根 ⑥ 為 $\frac{\sqrt{m} \pm \sqrt{D_1}}{2}, \frac{-\sqrt{m} \pm \sqrt{D_2}}{2}$ ，其中判別式

$$D_1 = (-\sqrt{m})^2 - 4 \cdot \left(\frac{m+p}{2} + \frac{q}{2\sqrt{m}}\right) = -m - 2p - \frac{2q}{\sqrt{m}},$$

$$D_2 = (-\sqrt{m})^2 - 4 \cdot \left(\frac{m+p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{m}}\right) = -m - 2p + \frac{2q}{\sqrt{m}},$$

$$D = D_1 \cdot D_2 = \left(-m - 2p - \frac{2q}{\sqrt{m}}\right) \left(-m - 2p + \frac{2q}{\sqrt{m}}\right) = (-m - 2p)^2 - \frac{4q^2}{m}.$$

接著，我們進一步探討預解方程式的三根與原四次方程式四個根的關聯。

當 $q \neq 0$ 時 ⑦，設預解方程式 $y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0$ 的三根為 m, α, β （其中 m 為正根），則利用根與係數的關係 $m + \alpha + \beta = -2p$ 與 $m\alpha\beta = q^2$ ，代入判別式得

$$D = (-m - 2p)^2 - \frac{4q^2}{m} = (\alpha + \beta)^2 - \frac{4m\alpha\beta}{m} = (\alpha - \beta)^2.$$

底下，我們就預解方程式三根的性質 ⑧：三根為相異實根、三根中有重根、三根為一實根與兩複數根，分別探討四次方程式的根。

甲、當 m, α, β 為三相異實根時：

判別式 $D = (\alpha - \beta)^2 > 0$ ，原四次方程式有四個相異實根或四個虛根。

1. 若 $q > 0$ ，則 $\frac{2q}{\sqrt{m}} = 2\sqrt{\alpha\beta}$ ，即 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha\beta} = q$ 。

1° 當 $\alpha, \beta > 0$ ，此時 $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ 且 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = q$ ：

$$D_1 = -m - 2p - \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 > 0,$$

$$D_2 = -m - 2p + \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 > 0,$$

此時，原四次方程式有四個相異實根：

$$\frac{\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2}, \frac{-\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{2}.$$

2° 當 $\alpha, \beta < 0$ ，此時 $\sqrt{\alpha\beta} = -\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ 且 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -q$ ：

$$D_1 = -m - 2p - \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{-\alpha}i + \sqrt{-\beta}i)^2 < 0,$$

註 5：若原四次方程式為實係數，則正數 m 的選取保證分解式仍為實係數。

註 6：傳統的 費拉里 解法，僅說明到此；這些步驟也足夠說明四次方程式有根式解。

註 7：當 $q = 0$ 時，四次方程式為 $x^4 + px^2 + r = 0$ ，即 $(x^2)^2 + p \cdot (x^2) + r = 0$ ，很容易求解。

註 8：至於一般情形下，如何判別預解方程式三根的性質，將另專文說明，敬請期待。

$$D_2 = -m - 2p + \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{-\alpha}i - \sqrt{-\beta}i)^2 < 0,$$

此時，原四次方程式有四個虛根：

$$\frac{\sqrt{m} \pm (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta})i}{2}, \frac{-\sqrt{m} \pm (\sqrt{-\alpha} - \sqrt{-\beta})i}{2}.$$

2. 若 $q < 0$ ，則 $\frac{2q}{\sqrt{m}} = -2\sqrt{\alpha\beta}$ ，即 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha\beta} = -q$ 。

1° 當 $\alpha, \beta > 0$ ，此時 $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ 且 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -q$ ：

$$D_1 = -m - 2p - \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 > 0,$$

$$D_2 = -m - 2p + \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 > 0,$$

此時，原四次方程式有四個相異實根：

$$\frac{\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{2}, \frac{-\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2}.$$

2° 當 $\alpha, \beta < 0$ ，此時 $\sqrt{\alpha\beta} = -\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ 且 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = q$ ：

$$D_1 = -m - 2p - \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{-\alpha}i - \sqrt{-\beta}i)^2 < 0,$$

$$D_2 = -m - 2p + \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{-\alpha}i + \sqrt{-\beta}i)^2 < 0,$$

此時，原四次方程式有四個虛根：

$$\frac{\sqrt{m} \pm (\sqrt{-\alpha} - \sqrt{-\beta})i}{2}, \frac{-\sqrt{m} \pm (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta})i}{2}.$$

乙、當 m, α, β 為重根時：

1. 若 $q > 0$ ，則 $\frac{2q}{\sqrt{m}} = 2\sqrt{\alpha\beta}$ ，即 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha\beta} = q$ 。

1° 當 $\alpha = \beta > 0$ ，此時 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = q$ ，原四次方程式的四根為

$$\frac{\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2} = \frac{\sqrt{m}}{2} \text{ (重根) 與 } \frac{-\sqrt{m} \pm 2\sqrt{\alpha}}{2}.$$

2° 當 $\alpha = \beta < 0$ ，此時 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -q$ ，原四次方程式的四根為

$$\frac{\sqrt{m} \pm 2\sqrt{-\alpha}i}{2} \text{ 與 } \frac{-\sqrt{m}}{2} \text{ (重根)}.$$

3° 當 $m = \alpha$ 或 $m = \beta$ 時：

不妨設三根為 m, m, α （此時三根皆為正數），原四次方程式的四根為

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \text{ (重根) 與 } \frac{-\sqrt{\alpha} \pm 2\sqrt{m}}{2}.$$

4° 當 $m = \alpha = \beta$ 時：

$$\text{原四次方程式的四根為 } \frac{\sqrt{m}}{2} \text{ (三重根) 與 } \frac{-3\sqrt{m}}{2}.$$

2. 若 $q < 0$ ，則 $\frac{2q}{\sqrt{m}} = -2\sqrt{\alpha\beta}$ ，即 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha\beta} = -q$ 。

1°當 $\alpha = \beta > 0$ ，此時 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -q$ ，原四次方程式的四根為

$$\frac{\sqrt{m} \pm 2\sqrt{\alpha}}{2} \text{ 與 } \frac{-\sqrt{m}}{2} \text{ (重根)}.$$

2°當 $\alpha = \beta < 0$ ，此時 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = q$ ，原四次方程式的四根為

$$\frac{\sqrt{m}}{2} \text{ (重根)} \text{ 與 } \frac{-\sqrt{m} \pm 2\sqrt{-\alpha}i}{2}.$$

3°當 $m = \alpha$ 或 $m = \beta$ 時：

不妨設三根為 m, m, α （此時三根皆為正數），原四次方程式的四根為

$$\frac{\sqrt{\alpha} \pm 2\sqrt{m}}{2} \text{ 與 } \frac{-\sqrt{\alpha}}{2} \text{ (重根)}.$$

4°當 $m = \alpha = \beta$ 時：

$$\text{原四次方程式的四根為 } \frac{3\sqrt{m}}{2} \text{ 與 } \frac{-\sqrt{m}}{2} \text{ (三重根)}.$$

丙、當 α, β 為共軛虛根時 ⑨：

（關於複數開根號，此處沿用參考資料「數學傳播第 21 卷第 2 期」中的定義）

判別式 $D = (\alpha - \beta)^2 < 0$ ，原四次方程式有兩個相異實根與兩個共軛虛根。

1. 若 $q > 0$ ，則 $\frac{2q}{\sqrt{m}} = 2\sqrt{\alpha\beta}$ ，即 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = q$ 。

$$D_1 = -m - 2p - \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 < 0,$$

$$D_2 = -m - 2p + \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 > 0,$$

$$\text{方程式的四根為兩虛根 } \frac{\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2} \text{ 與兩實根 } \frac{-\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{2} \text{。} \textcircled{10}$$

2. 若 $q < 0$ ，則 $\frac{2q}{\sqrt{m}} = -2\sqrt{\alpha\beta}$ ，即 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -q$ 。

$$D_1 = -m - 2p - \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 > 0,$$

$$D_2 = -m - 2p + \frac{2q}{\sqrt{m}} = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 < 0,$$

$$\text{方程式的四根為兩實根 } \frac{\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{2} \text{ 與兩虛根 } \frac{-\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2}.$$

註 9：設複數 $z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$ ，其中 $r > 0$ 且 $-\pi < \theta \leq \pi$ ，我們定義複數開根號為 $\sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$ ，

則(1)當 $z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$ ，其中 $r > 0$ 且 $-\pi < \theta < \pi$ ， $\bar{z} = r \cdot (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$ 時，

① $\sqrt{z} \cdot \sqrt{\bar{z}} = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ ；② $\sqrt{z} + \sqrt{\bar{z}}$ 為實數；③ $\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}}$ 為純虛數。

(2)當 $z_1 = -r$ 且 $z_2 = -s$ ，其中 $r, s > 0$ 時， $\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} = \sqrt{r}i \cdot \sqrt{s}i = -\sqrt{rs} = -\sqrt{z_1 z_2}$ 。

註 10：當 α, β 為共軛複數時，欲計算 $\pm(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})$ 不須直接對複數開根號：

$$(1) \pm(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \pm \sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} = \pm \sqrt{(\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = \pm \sqrt{(\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha\beta}}.$$

$$(2) \pm(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) = \pm \sqrt{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2} = \pm \sqrt{(\alpha + \beta) - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = \pm \sqrt{(\alpha + \beta) - 2\sqrt{\alpha\beta}}.$$

我們將上面討論的結果，整理成底下的定理。

定理：

給定實係數四次方程式 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ，其中 $q \neq 0$ ，設其預解方程式

$y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0$ 的三根為 m, α, β （其中 m 為正根），則

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left(x^2 - \sqrt{m}x + \frac{m+p}{2} + \frac{q}{2\sqrt{m}} \right) \left(x^2 + \sqrt{m}x + \frac{m+p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{m}} \right)。$$

說得更明確些：

(1) 若 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -q$ ，則四次方程式 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ 的四根為 $\frac{\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{2}$ 與 $\frac{-\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2}$ 。

(2) 若 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = q$ ，則四次方程式 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ 的四根為 $\frac{\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2}$ 與 $\frac{-\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{2}$ 。

而上述方程式四根之型態描述如下：

- (3) 當 m, α, β 為三相異正根時，四根為四個相異實根。
- (4) 當 m, α, β 為一正根與兩相異負根時，四根為兩對共軛複數根。
- (5) 當 m, α, β 有重根時，四根中有重根（二重根或三重根）。
- (6) 當 m, α, β 為一正根與兩複數根時，四根為兩個相異實根與兩複數根。

最後，我們舉一些實例，同時利用「分解法」與「公式法」，來說明如何解四次方程式，至於方法孰優孰劣由讀者自行裁奪。

實例說明》

1. 試解四次方程式 $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$ 。

預解方程式為 $y^3 - 12y^2 + 48y - 64 = 0$ ，其三根為 4（三重根）。

方法一：分解

原四次方程式成為 $\left(x^2 + \frac{4+(-6)}{2} \right)^2 = 4 \left(x - \frac{8}{8} \right)^2$ ，即 $(x^2 - 1)^2 = 4(x - 1)^2$ 且可分解為

$$(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x + 1) = 0。$$

方法二：公式

由根的公式（此處預解方程式各根開根號之乘積為 8）：

$$\frac{\sqrt{4} \pm (\sqrt{4} - \sqrt{4})}{2} = 1 \text{（二重根）及 } \frac{-\sqrt{4} \pm (\sqrt{4} + \sqrt{4})}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1 \text{ 或 } -3，$$

故四次方程式的四實根為 1（三重根）與 -3。

2. 試解四次方程式 $x^4 - 22x^2 - 48x - 23 = 0$ 。

預解方程式為 $y^3 - 44y^2 + 576y - 2304 = 0$ ，其三根為 8，12 與 24。

方法一：分解

原四次方程式成為 $\left(x^2 + \frac{8+(-22)}{2} \right)^2 = 8 \left(x - \frac{-48}{16} \right)^2$ ，即 $(x^2 - 7)^2 = 8(x + 3)^2$ 且可分解為

$$(x^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2} - 7)(x^2 - 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2} - 7) = 0。$$

方法二：公式

由根的公式（此處預解方程式各根開根號之乘積為 48）：

$$\frac{\sqrt{8} \pm (\sqrt{12} + \sqrt{24})}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm (2\sqrt{3} + 2\sqrt{6})}{2} = \sqrt{2} \pm (\sqrt{3} + \sqrt{6}) \text{ 及}$$

$$\frac{-\sqrt{8} \pm (\sqrt{12} - \sqrt{24})}{2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm (2\sqrt{3} - 2\sqrt{6})}{2} = -\sqrt{2} \pm (\sqrt{3} - \sqrt{6})，$$

故四次方程式的四實根為 $\sqrt{2} \pm (\sqrt{3} + \sqrt{6})$ 與 $-\sqrt{2} \pm (\sqrt{3} - \sqrt{6})$ 。

3. 試解四次方程式 $x^4 - 7x^2 + 6\sqrt{2}x - 2 = 0$ 。

預解方程式為 $y^3 - 14y^2 + 57y - 72 = 0$ ，其三根為 8 與 3（二重根）。

方法一：分解

狀況 A

原四次方程式成為 $\left(x^2 + \frac{3+(-7)}{2}\right)^2 = 3\left(x - \frac{6\sqrt{2}}{6}\right)^2$ ，即 $(x^2 - 2)^2 = 3(x - \sqrt{2})^2$ 且可分解為 $(x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{6} - 2)(x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{6} - 2) = 0$ 。

狀況 B

原四次方程式成為 $\left(x^2 + \frac{8+(-7)}{2}\right)^2 = 8\left(x - \frac{6\sqrt{2}}{16}\right)^2$ ，即 $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = 8\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2$ 且可分解為 $(x^2 + 2\sqrt{2}x - 1)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) = 0$ 。

方法二：公式

由根的公式（此處預解方程式各根開根號之乘積為 $6\sqrt{2}$ ）：

$$\frac{\sqrt{8} \pm (\sqrt{3} - \sqrt{3})}{2} = \sqrt{2} \text{（二重根）及 } \frac{-\sqrt{8} \pm (\sqrt{3} + \sqrt{3})}{2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{3}，$$

故四次方程式的四實根為 $\sqrt{2}$ （二重根）與 $-\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ 。

4. 試解四次方程式 $x^4 + 8x^2 + 16x + 20 = 0$ 。

預解方程式為 $y^3 + 16y^2 - 16y - 256 = 0$ ，其三根為 4 及另兩負根 -4, -16。

方法一：分解

原四次方程式成為 $\left(x^2 + \frac{4+8}{2}\right)^2 = 4\left(x - \frac{16}{8}\right)^2$ ，即 $(x^2 + 6)^2 = 4(x - 2)^2$ 且可分解為 $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 10) = 0$ 。

方法二：公式

由根的公式（此處預解方程式各根開根號之乘積為 -16）：

$$\frac{\sqrt{4} \pm (\sqrt{4} + \sqrt{16})i}{2} = 1 \pm 3i \text{ 及 } \frac{-\sqrt{4} \pm (\sqrt{4} - \sqrt{16})i}{2} = -1 \pm i，$$

故四次方程式的四個複數根為 $1 \pm 3i$ 與 $-1 \pm i$ 。

5. 試解四次方程式 $x^4 + 4x^2 - 16x + 28 = 0$ 。

預解方程式為 $y^3 + 8y^2 - 96y - 256 = 0$ 即 $(y - 8)(y^2 + 16y + 32) = 0$ ，其三根為 8 及另兩負根 α, β （其中 $\alpha + \beta = -16, \alpha\beta = 32$ ）。

方法一：分解

原四次方程式成為 $\left(x^2 + \frac{8+4}{2}\right)^2 = 8\left(x - \frac{-16}{16}\right)^2$ ，即 $(x^2 + 6)^2 = 8(x+1)^2$ 且可分解為

$$(x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 6)(x^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} + 6) = 0。$$

方法二：公式

由根的公式（此處預解方程式各根開根號之乘積為 -16 ）：

$$\frac{\sqrt{8} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{-(\alpha + \beta) - 2\sqrt{\alpha\beta}i}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{16 - 2\sqrt{32}i}}{2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{2}i} \text{ 及}$$

$$\frac{-\sqrt{8} \pm (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{-(\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha\beta}i}}{2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{16 + 2\sqrt{32}i}}{2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{2}i}，$$

故四次方程式的四個複數根為 $\sqrt{2} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{2}i}$ 與 $-\sqrt{2} \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{2}i}$ 。

6. 試解四次方程式 $x^4 - 20x^2 - 48x - 36 = 0$ 。

預解方程式為 $y^3 - 40y^2 + 544y - 2304 = 0$ 即 $(y - 8)(y^2 - 32y + 288) = 0$ ，其三根為 8 及另兩複數根 α, β （其中 $\alpha + \beta = 32, \alpha\beta = 288$ ）。

方法一：分解

原四次方程式成為 $\left(x^2 + \frac{8+(-20)}{2}\right)^2 = 8\left(x - \frac{-48}{16}\right)^2$ ，即 $(x^2 - 6)^2 = 8(x+3)^2$ 且可分解為

$$(x^2 + 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2} - 6)(x^2 - 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2} - 6) = 0。$$

方法二：公式

由根的公式（此處預解方程式各根開根號之乘積為 48）：

$$\frac{\sqrt{8} \pm (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{(\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha\beta}}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{32 + 2\sqrt{288}}}{2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{8 + 6\sqrt{2}} \text{ 及}$$

$$\frac{-\sqrt{8} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{(\alpha + \beta) - 2\sqrt{\alpha\beta}}}{2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{32 - 2\sqrt{288}}}{2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{-8 + 6\sqrt{2}i}，$$

故四次方程式的四個根為兩實根 $\sqrt{2} \pm \sqrt{8 + 6\sqrt{2}}$ 與兩複數根 $-\sqrt{2} \pm \sqrt{-8 + 6\sqrt{2}i}$ 。

7. 試解四次方程式 $x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 3 = 0$ 。（張國男，數學傳播第 21 卷第 2 期，P.60）

反覆運用綜合除法：

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 1 & - & 4 & + & 1 & + & 8 & - & 3 \\ & + & 1 & - & 3 & - & 2 & + & 6 & 1 \\ \hline 1 & - & 3 & - & 2 & + & 6 & , & + & 3 \\ & + & 1 & - & 2 & - & 4 & & & 1 \\ \hline 1 & - & 2 & - & 4 & , & + & 2 \\ & + & 1 & - & 1 & & & & & 1 \\ \hline 1 & - & 1 & , & - & 5 \\ & + & 1 & & & & & & & 1 \\ \hline 1 & , & + & 0 \end{array}$$

將原方程式移根調整為 $(x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 2(x-1) + 3 = 0$ ，預解方程式為

$y^3 - 10y^2 + 13y - 4 = 0$ 即 $(y-1)(y^2 - 9y + 4) = 0$ ，其三根為 1 及另兩正根 α, β （其中 $\alpha + \beta = 9, \alpha\beta = 4$ ）。

方法一：分解

原四次方程式成為 $\left((x-1)^2 + \frac{1+(-5)}{2}\right)^2 = \left((x-1) - \frac{2}{2}\right)^2$ ，即 $(x^2 - 2x - 1)^2 = (x-2)^2$ 且可

分解為 $(x^2 - x - 3)(x^2 - 3x + 1) = 0$ 。

方法二：公式

由根的公式（此處預解方程式各根開根號之乘積為 2）：

$$1 + \frac{\sqrt{1} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{(\alpha + \beta) - 2\sqrt{\alpha\beta}}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ 及}$$

$$1 + \frac{-\sqrt{1} \pm (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha\beta}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2},$$

故四次方程式的四個實根為 $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 與 $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ 。

8. 試解四次方程式 $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 29x + 8 = 0$ 。（龍騰版高中數學第一冊教師手冊，P.36）
反覆運用綜合除法：

$$\begin{array}{r}
 1 \quad + \quad 8 \quad + \quad 24 \quad + \quad 29 \quad + \quad 8 \\
 \underline{- \quad 2 \quad - \quad 12 \quad - \quad 24 \quad - \quad 10} \quad -2 \\
 1 \quad + \quad 6 \quad + \quad 12 \quad + \quad 5 \quad , - \quad 2 \\
 \underline{- \quad 2 \quad - \quad 8 \quad - \quad 8} \quad -2 \\
 1 \quad + \quad 4 \quad + \quad 4 \quad , - \quad 3 \\
 \underline{- \quad 2 \quad - \quad 4} \quad -2 \\
 1 \quad + \quad 2 \quad , + \quad 0 \\
 \underline{- \quad 2} \quad -2 \\
 1 \quad , + \quad 0
 \end{array}$$

移根調整為 $(x+2)^4 - 3(x+2) - 2 = 0$ ，預解方程式為 $y^3 + 8y - 9 = 0$ 即 $(y-1)(y^2 + y + 9) = 0$ ，其三根為 1 及另兩複數根 α, β （其中 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 9$ ）。

方法一：分解

原四次方程式成為 $\left((x+2)^2 + \frac{1+0}{2}\right)^2 = \left((x+2) - \frac{-3}{2}\right)^2$ ，即 $\left(x^2 + 4x + \frac{9}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2$ 且

可分解為 $(x^2 + 5x + 8)(x^2 + 3x + 1) = 0$ 。

方法二：公式

由根的公式（此處預解方程式各根開根號之乘積為 3）：

$$-2 + \frac{\sqrt{1} \pm (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha\beta}}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-1+6}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ 及}$$

$$-2 + \frac{-\sqrt{1} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(\alpha + \beta) - 2\sqrt{\alpha\beta}}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{7}i}{2},$$

故四次方程式的四個根為兩實根 $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 與兩複數根 $\frac{-5 \pm \sqrt{7}i}{2}$ 。

9. 試解四次方程式 $x^4 + 12x^2 + 16x + 8 = 0$ 。

預解方程式為 $y^3 + 24y^2 + 112y - 256 = 0$ 即 $(y + 16)(y^2 + 8y - 16) = 0$ ，其三根為

$$\alpha = -16 \text{ 及另兩實數根 } m = -4 + 4\sqrt{2}, \beta = -4 - 4\sqrt{2}。⑪$$

方法一：分解

$$\text{原四次方程式成為 } \left(x^2 + \frac{(4\sqrt{2} - 4) + 12}{2} \right)^2 = (4\sqrt{2} - 4) \left(x - \frac{16}{8\sqrt{2} - 8} \right)^2, \text{ 即}$$

$$(x^2 + 2\sqrt{2} + 4)^2 = 4(\sqrt{2} - 1)(x - 2\sqrt{2} - 2)^2 \text{ 且可分解為}$$

$$(x^2 + 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}x - 4\sqrt{\sqrt{2} + 1} + 2\sqrt{2} + 4)(x^2 - 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}x + 4\sqrt{\sqrt{2} + 1} + 2\sqrt{2} + 4) = 0。$$

方法二：公式

由根的公式（此處預解方程式各根開根號之乘積為 -16 ）：

$$\frac{\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{2} = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \pm (2 + \sqrt{\sqrt{2} + 1})i \text{ 及}$$

$$\frac{-\sqrt{m} \pm (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2} = -\sqrt{\sqrt{2} - 1} \pm (2 - \sqrt{\sqrt{2} + 1})i,$$

故四次方程式的四個虛根為 $\sqrt{\sqrt{2} - 1} \pm (2 + \sqrt{\sqrt{2} + 1})i$ 與 $-\sqrt{\sqrt{2} - 1} \pm (2 - \sqrt{\sqrt{2} + 1})i$ 。

參考資料：

1. 龍騰版高中數學第一冊教師手冊，P.35~36
2. 翰林版高中數學第一冊教師手冊，P.183
3. 全華版高中數學第一冊教師手冊，P.124~125

說明：以上為高中數學教師手冊相關補充資料，主要描述「解方程式」歷史性題材。

4. 張國男，四次方程式之待定因式解法，數學傳播第 21 卷第 2 期，P.54~63

說明：採用分解法。先解由「待定因式法」或「拼湊方差法」分別得出的三次預解方程式，進而將四次方程式分解為二次式的乘積，論證四次以下方程式均有根式解。

5. 蕭守仁，四次方程式的解決法，數學傳播第 6 卷第 3 期，P.93~95

說明：採用分解法。先解由「待定因式法」得出的三次預解方程式，進而將四次方程式分解為二次式的乘積，該文論證三次預解方程式的任意一根皆可取為二次分解式的係數。

6. 四次方程式，取自 <http://mail.dali.tcc.edu.tw/~eureka/4order.pdf>

說明：採用公式法。利用「根與係數的關係」及「根的排列」得出三次預解方程式，論證原四次方程式的根為預解方程式三根根式的和差組合。

7. <http://math1.ck.tp.edu.tw/翁福永/數學/三次、四次方程式求解公式.pdf>

說明：網羅一些求根公式（尤拉法、笛卡兒法、費拉里法）供比較。

註 11：此處之預解方程式 $y^3 + 24y^2 + 112y - 256 = 0$ 有一非整數之正根與兩負根。

此題與例 4、例 5 有顯著的差異，前兩例的正根為整數，直接選取該正整數根應用即可，至於另兩根則可用根與係數的關係求根式和與根式差；而此處必須將預解方程式之三根全都解出。



動手玩數學

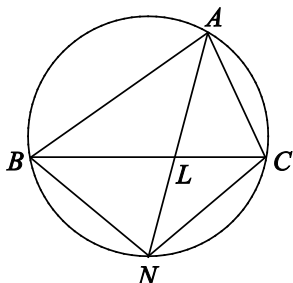
許志農／臺灣師範大學數學系



遊戲 61

☆☆☆☆☆

在銳角三角形 ABC 中， $\angle A$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 L ，交 $\triangle ABC$ 的外接圓於 N 。自點 L 向 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 引垂直線，垂足分別為 K 與 M 。



- (1) 請找出與 $\triangle ALC$ 相似的其他三角形。
- (2) 證明：四邊形 $AKNM$ 與 $\triangle ABC$ 面積相等。

〔玩鎖・玩索〕

本問題改編自 100 年度成功大學數學系推甄試題。



遊戲 62

如
☆☆☆☆☆

小芸和 小晉 玩擲骰子遊戲，兩人從特製的三顆骰子中各選一顆，然後各自擲骰子一次，點數高的獲勝。三顆骰子各面的點數

如下：

A：四面 2 點，兩面 6 點。

B：三面 1 點，三面 5 點。

C：六面都是 3 點。

- (1) 假設 小晉 先選 A 骰子，小芸 要選哪個骰子贏的機會較大？
- (2) 許多兩人玩的遊戲都是先開始的人佔些優勢，請問：在這個遊戲中，先選的人有佔優勢嗎？

〔玩鎖・玩索〕

本問題出自 100 年度成功大學數學系推甄試題。



遊戲 63

☆☆☆

有兩艘船同時從隔著一條河相對的兩個港口出發，這兩艘船有一艘的速度比較快，他們第一次在離比較近的港口720公尺的地方相遇。當他們抵達對岸港口時，都停留10分鐘後又回開，回程時，他們又在離比較近的港口400公尺的地方相遇。

問：這條河的寬度是多少公尺？



〔玩鎖・玩索〕

這是法國高等學院預備班2007年考題第四題。



遊戲 64

☆☆

上課鈴聲響起了，小琳與小琪兩人同時自圖書館走向同一間教室，若兩人步行速度相同，跑步速度也都相同。現在小琳以一半路程步行，另一半路程跑步；小琪又跑步又步行地恰使到達教室時所花的時間，剛好使步行與跑步時間各占一半。

在跑步速度大於步行速度的條件下，試問誰先抵達教室？



〔玩鎖・玩索〕

這是北一女中的甄試試題，網路上的解答是設未知數，比較誰花的時間少。事實上，應該用比較直觀的方法來解此題。

動手玩數學~破解秘笈

第15期

的水

遊戲 57

設第 i 號水管注滿水（排完水）的時間是 x_i 小時（注水的水管 x_i 是正的，而排水的水管 x_i 是負的）。根據題意，得到如下方程組：

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{1} \end{cases}$$

將上述相加，得

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = \frac{11}{12},$$

由此知道：當五支水管同時開啟時，讓泳池注滿水需要 $1\frac{1}{11}$ 小時。

利用上式，我們有

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} &= \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) - \left(\frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} \right) \\ &= \frac{11}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

解得 $x_1 = 2$ ，同法可解得

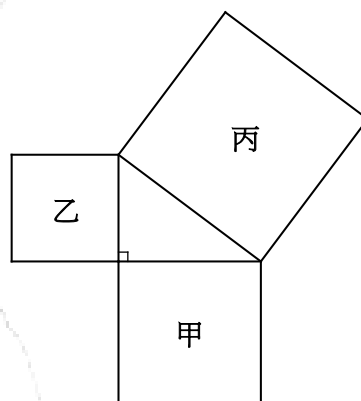
$$x_2 = -6, x_3 = 3, x_4 = -4, x_5 = 2,$$

即編號 ①③⑤ 的水管是注水的水管，注滿水所需時間分別為 2, 3, 2 小時；而編號 ②④

管是排水的水管，排完水所需時間分別為 6, 4 小時。

遊戲 58

勾股定理（畢氏定理）可以幫我們作出要求的正方形，如下圖所示：



- (1) 將兩個已知正方形的邊長作勾、股，所得直角三角形的斜邊（弦）即為所求正方形之邊長。
- (2) 將兩個已知正方形的邊長一個作勾，一個當斜邊（弦），所得直角三角形的股即為所求正方形之邊長。

遊戲 59

利用窮舉的方法可以知道：甲是肇事者。

遊戲 60

先擺硬幣者有必勝的策略，他只需先把硬幣擺在桌子的正中央，然後使用對稱的原理，隨著後玩者擺硬幣的位置，擺在對稱圓桌中心的另一邊之位置即可。這樣只要後玩者可以擺硬幣，先玩者也一定可以擺硬幣。