Sharing 分享

如何命一道有意思的數學題目

◎許志農／台灣師範大學數學系

① 數學題目是數學教學的核心…頭腦是關鍵，但也是障礙

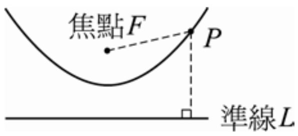
有命題經驗的人都容易體會「命一道難題比較容易，反而是想一道有意思的容易題比較困難。」如果檢視過去幾年學測與指考的數學考題，比較有鑑別度與深受好評的常常是有創意的容易題或簡易的概念題。市面上的講義、參考書難題充斥，所缺乏的就是創意的容易題或簡易的概念題，也因為這樣，高中老師對有創意的容易題或簡易的概念題會讚不絕口。這類題目除了滿足老師教學需求外，也充實他們的講義內容，活化他們的頭腦思維。事實上，想一道有意思的容易題或概念題與命一道難題是頭腦不同部位的運作，分別來自有創意、發明能力的右後腦與重視邏輯推理的左後腦。經常命難題的老師，習慣左後腦思考，經年累月之後，遺忘了右後腦的存在。書商的題庫光碟就是為這樣的人而準備的，因為電腦就是左後腦的替代品。懶得用左後腦思考的人就以題庫光碟來替代。題庫光碟就像上癮的人吸食毒品一樣，毒品會讓人興奮，但這是贗品，不是自然的興奮。

命題過程比較像是旅遊活動，沿途映入眼簾的風景山水與經歷都是難得的經驗，是將來按圖索驥的依靠。只有把命題當成旅遊，才有重溫舊夢的可能，也可以回味無窮。而利用光碟題庫命題只算是旅程，只問終點，只求目的地，遺漏過程，甚至不在乎過程。如果你從台北經濱海、北宜公路或健走淡蘭古道到宜蘭，就知道旅遊是何事，但是通過雪山隧道的北宜高速公路到宜蘭，比較像是旅程，只是以宜蘭為終點的一趟機械式開車之旅。題庫光碟只是左後腦思考的贗品，沒辦法超越你的命題，更難選出有點子或創意的試題。健全的數學老師應該左、右後腦並重，拋去會讓你上癮的題庫光碟。這樣所得到的快樂與成就感才是真實，不虛幻的。

讓出點子、創意的右後腦與提供技術、技巧的左後腦均勻發展，一併使用，才能命出一道好題目。現在就以一道拋物線的概念題作例子，點出何謂有意思的簡易題或概念題？基隆女中的方璞政老師告訴我他如何以活動式的教案帶領學生學習拋物線的基本性質，大略是這樣進行：

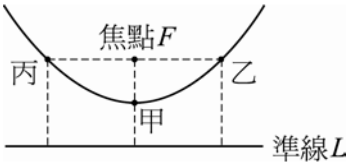
〈拋物線幾何定義〉

平面上給定直線 L 與不在 L 上的一定點 F，所有到 L 的距離等於到 F 的距離之動點 P 所形成的圖形稱為拋物線，其中直線 L 稱為準線，點 F 稱為焦點，如下圖所示。



在圓錐曲線這章給出拋物線的幾何定義之後，璞政老師以活動式的教學方式讓學生體會拋物線的約略圖形及基本性質。以教室黑板下邊的直線 L 當準線，他的腳所立足的點 F 當焦點，依序請甲、乙、丙三位同學出列，分別叫他們選定拋物線上的點站著。一般而言，最先選擇的甲同學會站在老師（焦

點 F）至直線 L 連接線段的中點，因為線段中點到兩端的距離相等，符合拋物線的定義，如下圖所示。



接下來選位置的乙同學可能為難一點，但是經過一番思考之後，由老師站立的點 F 往右，平行黑板下邊的準線 L 移動，當移動的距離與 F 到準線 L 的距離相等時，這個點就會滿足拋物線的定義。也就是讓老師站立的點，乙站立的點及他們到準線的垂足，這四點構成正方形。經過這番分析之後，乙同學也找到拋物線上的一個點，並得到拋物線的正方形性質。

最後輪到丙同學找點了，因為容易想到的點已經被前兩位同學占走了，所以最後上場的人總是吃虧的。但這也是讓丙同學發揮創意的時候，經過摸索之後，利用對稱的原理，丙同學應該可以找到上圖中的點。

在這活動完成之後，老師就可以做個總結：由焦點及準線出發，可以畫出兩個正方形，從這兩個正方形可以發現三個落在拋物線上的點，而且拋物線的圖形應該對稱於過焦點，又與準線垂直的直線，稱此直線為對稱軸。

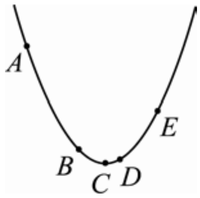
在完成拋物線的基本性質推導之後，讓學生練習一道概念題總是無法避免的。問題是：拋物線不容易有很棒的概念題，這是因為我們對拋物線太過熟悉，甚至熟悉到變成機械性思考，也就是讓頭腦完全處於左後腦的思考。這樣變成需要創意、點子的右後腦被擱置，概念題當然很難被命出來。有意思的概念題必須透過創意、點子的右後腦才能完成。接下來的概念題是我與方璞政老師在討論中提出的：

〈拋物線的概念題〉

下圖是一張科學家所記錄的草圖，草圖是描繪一顆繞著太陽運行的彗星之軌跡，其中的五點

$$A, B, C, D, E$$

是科學家觀察到所在的位置。經過仔細的計算，這顆彗星所運行的軌跡是一條拋物線，如圖中所示。



根據這張草圖，彗星在被觀察到的五點 $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ 與太陽的距離之大小順序為何？

如果單純的從拋物線的定義出發，將很快知道這概念題的答案；但是如果想太多，反而自討苦吃。

【練習 1】當你教完橢圓的幾何定義，在還沒有進入橢圓的方程式之前，你會教怎樣的橢圓概念題呢？試著命看看吧！

最後我們以一則故事結束這一節：當愛迪生發明電燈泡讓電第一次來到維也納時，佛洛伊德的一位朋友來看望他，他從未看過電。晚上佛洛伊德留他在他的房間休息，他遇到困難，他站在床上，他試著以吹熄蠟燭的方法去吹熄電燈，一吹再吹，始終無法吹熄電燈。他不願回去問佛洛伊德，那顯得他太無知了。他從鄉下來，他怕人家笑他「土包子進城」，那不太好。所以他用一個毛巾把燈蓋住去睡覺了。他睡得不太好，他一再地想，一定有一些什麼方法。

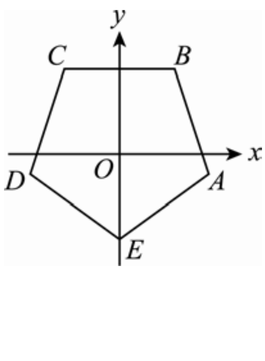
早上當佛洛伊德問他，你睡得好嗎？他說，都很好，就是一件事情我想問問，如何吹熄那盞燈？佛洛伊德說，你一點也不知道電，這沒關係，只要懂得「順籐摸瓜」這句成語就行了，循著電線往源頭摸索，開關就在牆上，你按下這個開關，燈就滅了。這跟人們作夢必須追溯到嬰兒時期的壓抑道理一樣，只有這樣才能解析夢所要傳遞的意義。順著這樣的道理，我完成了《夢的解析》這本大作。

用左後腦思考的模式有點像鑽牛角尖，選擇從半徑稍大的地方進入，然後透過嚴謹的邏輯推理，逐漸縮小思考層面，最後到達一個點（牛角尖），但有時卻是死胡同。這樣的思考模式對考試或許有些幫忙，但對點子或創造力的培養是有害的。

② 何謂有意思的題目…以靈活、巧妙、美麗取代難、偏、怪

有意思的題目應以「靈活而不難、巧妙而不偏、美麗而不怪」為準繩，而且「有意思」是指對中學生來說有意思。例如八十七學年度社會組選擇題第 1 題：

例題 1 設 $ABCDE$ 是坐標平面上的一個正五邊形，它的中心與原點重合，且頂點 E 在 y 軸的負向（如圖所示）。試問下列各直線中，斜率最小者為何？



(A) 直線 AB
(B) 直線 BC
(C) 直線 CD
(D) 直線 DE
(E) 直線 EA。

就是一道靈活而不難、巧妙而不偏、美麗而不怪的有意思試題，而且此題的答對率 50%，鑑別度 0.74 都是很好的數字。但同樣是大學聯考試題：

例題 2 求證實係數矩陣的行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} \geq 0 。$$

這個命題對「非專家」來說，不具意義，對中學生來說，更是毫無意義。沒意思的考題，學生很難掌握其竅門，不可能有太好的鑑別度。對中學生而言，這道題目算是難、偏且怪的試題。

九十四學年度指考《數學甲》多選題第九題：

例題 3 有一條拋物線位於坐標平面之上半面（即其 y 坐標 ≥ 0），並與 x 軸、直線 $y=x-1$、直線 $y=-x-1$ 相切。下列敘述何者正確：

(A) 此拋物線的對稱軸必為 y 軸
(B) 若此拋物線對稱軸為 y 軸，則其焦距為 1（註：拋物線的焦距為焦點到頂點的距離）
(C) 此拋物線的頂點必在 x 軸上
(D) 有不只一條拋物線滿足此條件。

這道題目雖不怪，但卻是難與偏的結合，從鑑別度幾乎等於 0 可以看出，在短時間內，學生沒辦法處理這樣的題目。

【練習 2】試著想一道不理想的聯考題。

在此我們列舉幾道「靈活而不難、巧妙而不偏、美麗而不怪」的聯考試題。九十五學年度學科能力測驗《數學考科》多選題第 11 題：

例題 4 將正整數 18 分解成兩個正整數的乘積有

$$1\times18,\ 2\times9,\ 3\times6$$

三種，又 3×6 是這三種分解中，兩數的差最小的，我們稱 3×6 為 18 的最佳分解。當 $p\times q\ (p\le q)$是正整數 n 的最佳分解時，我們規定函數 $F(n)=\frac{p}{q}$，例如 $F(18)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$。下列有關函數 $F(n)$ 的敘述，何者正確？

(A) $F(4)=1$

(B) $F(24)=\frac{3}{8}$

(C) $F(27)=\frac{1}{3}$

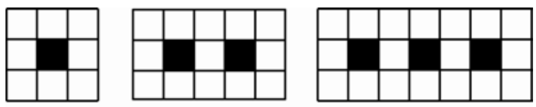
(D) 若 n 是一個質數，則 $F(n)=\frac{1}{n}$

(E) 若 n 是一個完全平方數，則 $F(n)=1$ 。

這道問題是國內菊版紙尺寸的切割公式，並不是憑空捏造的函數。有關菊版紙的更多解說，請參考第 6 點的內容。

九十五學年度學科能力測驗《數學考科》選填題第 G 題：

例題 5 用黑、白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：

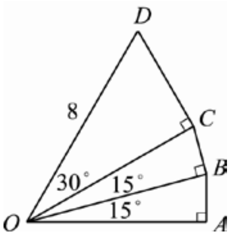


第1個　第2個　第3個

拼第 95 個圖需用到 ＿＿＿＿＿＿塊白色地磚。

九十五學年度學科能力測驗《數學考科》單選題第 3 題：

例題 6 下圖是由三個直角三角形堆疊而成的圖形，且 $\overline{OD}=8$，問：直角三角形 OAB 的高 $\overline{AB}$ 為何？



(A) 1

(B) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{7}-1$

(D) $\sqrt{3}$

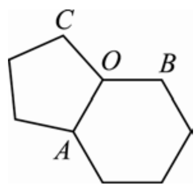
(E) 2。

〔**解析**〕利用銳角三角函數的定義，得

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\overline{OB}\sin15^\circ=\overline{OC}\cos15^\circ\sin15^\circ\\&=8\cos30^\circ\cos15^\circ\sin15^\circ\\&=4\cos30^\circ(2\sin15^\circ\cos15^\circ)\\&=4\cos30^\circ\sin30^\circ=2\sin60^\circ\\&=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\end{aligned}$$□。

九十五學年度指考《數學乙》多選題第 4 題：

例題 7 嘌呤是構成人體基因的重要物質，它的化學結構式主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成（令它們的邊長均為 1）的平面環形，如下圖所示：



試問以下哪些選項是正確的：

(A) $\angle BAC=54^\circ$

(B) O 是三角形 ABC 的外接圓圓心

(C) $\overline{AB}=\sqrt{3}$

(D) $\overline{BC}=2\sin66^\circ$ 。

九十二學年度指考《數學乙》單選題第 3 題：

例題 8 下表是 2001 年時，從各國國會網站取得有關「該國國會議員席次與人口數」的資料：

國名	議會席次	人口數（千人）
冰島	63	270
挪威	165	4480
丹麥	175	5330
泰國	393	60600
日本	500	126540

根據上述資料，一個人口數為 P 千人的國家，他的國會議員席次以下列哪個公式制定較恰當：

(A) $\dfrac{P}{4}$

(B) $0.1P+36$

(C) $4\sqrt{P}$

(D) $10\sqrt[3]{P}$

(E) $27\log_{10} P$ 。

〔**解析**〕選項(A)(B)為線性函數，顯然不可能；選項(E)為對數函數，當 P 增為原來 10 倍時，席次只增加 27 席，顯然與資料呈現不符。將數據代入選項(C)(D)可知(D)較符合。故答案為(D)。

八十八學年度學科能力測驗第 13 題：

例題 9 一位海盜欲將三件珠寶埋藏在一個島上的三個地方，海盜就以島上的一棵大王椰子樹為中心，由大王椰子樹向東走 12 步埋他的第一件珠寶；由大王椰子樹向東走 4 步，再往北走 a 步埋他的第二件珠寶；最後由大王椰子樹向東走 a 步，再往南走 8 步埋他的第三件珠寶。事隔多年之後，海盜僅記得 $a>0$ 及埋藏珠寶的三個地方在同一直線上。那麼 $a=$__________。

這是一道虛擬的情境試題，全體考生的答對率為 61%，而鑑別度卻高達 0.69，這代表高分組的學生多會作這道問題（高答對率），但是低分組的學生無法解讀這道問題（高鑑別度）。因此這道問題適合測試中後段學校的學生。

③ 命題的創造力從何而來⋯向右走 vs.向左走

▲德國詩人席勒

在一九〇〇年，佛洛伊德出版他最有名的心理學書籍《夢的解析》，書裡有一段跟人的創造力有關的文字，那是偉大的詩人席勒與哥爾納通訊中的一段文字，在那段文字裡，席勒對一位抱怨著自己缺乏創造力的朋友，作如下的回答：「就我看來，你之所以會有這種抱怨，完全歸咎於你的理智加在你的想像力之上的限制，這兒我將提出一份觀察，並舉一譬喻來說明。如果理智對那已湧入大門的意念，仍要作太嚴格的檢查，那便扼殺了心靈創作的一面。也許就單一個意念而言，它可能毫無意義，甚至極端荒唐的，但跟隨而來的幾個意念，卻可能是很有價值的，也許，雖然幾個意念都是一樣的荒謬，但合在一起，卻成了一個饒具意義的聯繫。理智其實並無法批判所有意念，除非它能把所有湧現心頭的意念一一保留，然後再統籌作一比較批判，就我看來，一個充滿創作力的心靈，是能把理智由大門的警衛哨撤回來，好讓所有意念自由地，毫無限制地湧入，而後再就整體進行檢查。你的那份可貴的批判力（或者你自己要稱它作什麼），就因為無法容忍所有創造者心靈的那股短暫的紛亂，而扼殺了靈感的泉湧。這份容忍功夫的深淺，也就是一位有思想的藝術家與一般夢者的分野。因此，你之

所以發現毫無靈感，實在都是因為你對自己的意念批判得太早、太嚴格。」這是一七八八年十二月一日的信，被佛洛伊德收錄在《夢的解析》這本書的第二章。

人的思考可以粗分成兩大類，也就是收斂型思考與發散型思考，它們分別由左後腦與右後腦所啟發。當學生在做一道單一選擇題時，他就正在使用收斂型思考，將可能的範圍縮小，最後聚焦於正確的答案上。這種逐步縮小範圍的思考模式就是收斂型思考，由左後腦來啟動，優點就是可以井然有序、專注、聚精會神，缺點就是缺乏創造力。學校的教育就是典型的收斂型思考方式，補習教育更是如此，原因是收斂型思考對考試成績是有幫助的。另一個思考模式為發散型思考，當一位認真負責的老師在出一道單一選擇題時，他必須注意到潛在的所有錯誤選項，並將它們設計為選項之一。這樣的單一選擇題才有意思，才能達到真正的測驗目標。找出所有潛在錯誤選項的思考模式就是典型的，也是最簡單的發散型思考，它由你的右後腦發動。發散型思考是整個創造力的泉源，它不預設任何立場，也不會太早作判斷，容許任何思緒與想法並存。

有關收斂型與發散型思考，我們節錄一段吉弗德的話「對收斂型思考而言，結論或答案只有一個，思考會被限制或控制，而循著獲得特定答案的方向進行…，相反地，進行發散型思考時，你的大腦會恣意揮灑，搜尋所有可能的答案，這種思考模式常發生在沒有固定結論的時候。發散型思考的特性是不受目標束縛。你有足夠的自由，可以進行多方位的思考，推翻舊的解決之道，在必要時朝某方面突破、創新。愈能尋獲資源的生物體，成功的機率愈大。」

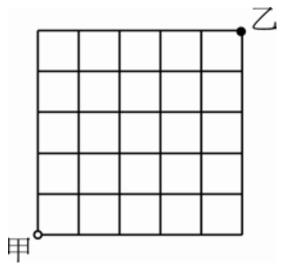
手感細膩有創造力的雙手可以是「捏泥成壺的巧手」，而富有創造力的頭腦是「善用比喻的頭腦」。據說，愛因斯坦在通俗演講中，為了能生動比喻而進行的思考，無疑的助燃了他創造的天分。

有一個故事：阿拉丁被數學老師當場逮到考試作弊，偷看旁邊小叮噹同學的考卷。阿拉丁對老師說「我只是複製小叮噹昨晚從書本偷來的東西——關於“$\sqrt{2}$ 是無理數”的證明而已。如果我複製得跟課本一模一樣，一字不差，請給我滿分，還要把小叮噹繩之以法，讓他鋃鐺入獄，因為他把課本的證明完全偷走了，這個複製品就是呈堂證供，小叮噹才是真正的小偷；但是若複製得不像，那可是小叮噹求學過程出了問題，就唯他是問吧，不關我的事。」

頭腦是最大的小偷，不論是真實的東西或書上的知識他都偷，就連別人的學問也偷，只是有時用借用、模仿、拷貝或複製的名詞替代「偷」字而已。偷來的知識或學問必須經過消化，才能從中產生點子或創意。起先我用別人的教法或題目，接著模仿與複製別人的教法或題目，最後運用自己的點子或創意來教學或命題。創意教學或有意思的題目就是這樣誕生的，借用、模仿、拷貝或複製只是過程，自己的點子跟創意才是終極目的。

讓我們來欣賞一道遊戲題：

例題 10 在一張 5×5 的棋盤，甲持白子在左下角的位置，乙持黑子在右上角的位置。



隨後兩人輪流（甲先，乙後）移動自己的棋子，每一次可沿一條橫線或一條縱線之一至少走一格，並遵守如下規則：

1. 不允許與對方的棋子在同一直線上。
2. 不能越過對方棋子所在的直線。

勝負規則是：輪到誰無路可走就算失敗。完成下列兩個問題：

(1) 誰有取勝的策略。

(2) 如果棋盤大小改成 8×5，那麼結果又如何？

4 閱卷之路何其多…善用“神奇數字 7 加減 2”法則

「命題」是老師經常需要從事的工作，在前面我們已經談了一些“如何喚起有創造力及使用可以出點子的右後腦來進行命題”。「命題」的對立面就是「閱卷」，閱卷的本意是挑出學生容易犯錯的地方，作為將來改進教學的依據，考核學生的等級也是透過閱卷來完成。但是，觀察閱卷者的行為可能是另一種更有趣的數學活動，也是大家容易輕忽的一部分。就以我為例，我改過中學生的考卷，閱過大學聯考的試卷，也參與過數學奧林匹亞的閱卷。無論哪一種閱卷活動，觀察其他閱卷者「如何閱卷」，是我最感樂趣的一部分。

閱卷工作給人的刻板印象不外乎「記下給分標準，逐一檢驗學生寫對了哪些有分數的式子，然後加總給個分數。」多數閱卷者都採逐字逐行的批閱方式閱卷，這樣的速度有點像作家爬格子一樣緩慢，也讓閱卷變成機械性的工作。但是，如果你閱過數學奧林匹亞學生的考卷，你對閱卷的看法也許會修正。這是因為這種考試的解答經常是很長，學生的作法更長，經常寫了七八頁，用前面的方式閱卷會很累，而且不可行。

心理學有個叫〈神奇數字 7 加減 2〉的法則，無論是專家或生手，在從事任何記憶性活動時，只能記著 5 至 9 個項目。例如，當你一眼看過數字

9211964047713141598972542803…

時，純靠左後腦記憶的生手大概可以記住前 5 個，最多前 9 個數字，但是對有想像力的專家，他會將 921 聯想成大地震日期，將 1964 視為出生西元年份，把 04771 連結到 $\log 3=0.4771$，用 $\pi=3.14159$ 詮釋 314159，而 $8\times9=72$ 記為 8972，…，所以專家只需記住「大地震」、「出生年」、「$\log 3$」、「π」、「8×9」等五個項目，就可以背出數字串的前 22 個數字，這兩者的差異是相當巨大的。

生手與專家的差異就在於，生手一棵樹一棵樹計算，而專家是一片森林一片森林記憶。就以閱卷行為來講，逐字逐行推敲的改考卷行為，看似認真，甚至應該給予嘉獎，但細究之下，速度緩慢、無聊、賺得錢少、無趣，只用到左後腦，容易疲勞。好的閱卷模式應該是像老鷹盤旋在高空覓食一樣，起先觀察地表的整體分布，哪些是農田、森林、河流、…，最後才選擇最有食物的地區搜索。有經驗的閱卷者第一眼一定是對試卷作整體的判斷，看看數學式子區，圖形所在位置，文字推敲部分是否合於一般的數學經驗，當感覺不舒服時，一定就是哪個區域出了問題，再細究該部分，一份答案正確的試卷必定讓你賞心悅目的。所以閱卷是一種藝術品的欣賞，扣分只是抓出瑕疵品而已。先欣賞

整片森林，再找出出了問題的樹是專家的方法，一棵樹一棵樹的檢驗是生手的作法。

閱卷跟一種棋賽很類似，這裡摘錄《科學人雜誌》的文章〈通往專家心智之路〉:「一九〇九年，古巴西洋棋王卡帕布蘭卡在一場表演賽中，一人獨對數十位業餘棋士。卡帕布蘭卡在棋桌圍成的圈子內走著，依序輕瞥每個棋盤兩、三秒之後，下了一步，而外圍的業餘棋士則等棋王在所有棋盤都下了一步之後,開始沉思回應之道。比賽結果一面倒，棋王贏了全部 28 局。這場表演賽是卡帕布蘭卡巡迴比賽中的一場，他連贏了 168 局。」棋王下這種棋肯定以直覺下的，否則會很慢，他整體觀察之後，覺得哪裡不舒服，就落子在那個地方。這就跟專家閱卷一樣，哪裡不對勁，就在那挑學生作答的缺點。

⑤ 更多有意思的數學題目…心理學的 10 年定律

心理學的「10 年定律」是說「在任何領域中要成為專家，都需要歷經 10 年的寒窗苦讀」，即便是神童，像數學界的高斯、音樂界的莫札特以及西洋棋界的費雪，想必也付出了相當的努力，或許是比別人起步得早、用功得多。在這裡，我們提供更多「靈活而不難、巧妙而不偏、美麗而不怪」的數學題目，讓各位老師享用，這些題目大都出自我整理的書籍，如《算術》、《師父中的師父》、《與奇人相遇的故事》及《動手玩數學（高一版）》…等。

據英國廣播公司（BBC）二〇〇六年八月二十五日報導，當地時間二十四日晚，國際天文學聯合會大會投票，通過新的行星定義，冥王星被排除在行星行列之外，太陽系行星數量將由九顆減為八顆。一九三〇年由美國天文學家萊德・湯姆勃發現冥王星將被降級為「矮行星」。有些委員想將高斯計算軌道而發現的穀王星，從小行星的地位升級成為行星。最後也沒有通過，反而將它與冥王星都降等為矮行星。讓我們利用兩百五十年前的波德法則來了解行星該如何定義才好：

例題 11 設地球與太陽的平均距離為 1 天文單位，在一七六六年，天文學家波德提出有名的波德法則：行星與太陽的距離 d（天文單位）可以用數學式子

$d = \alpha + \beta \cdot 2^n$

表示。下表是行星所對應的 n 值表：

行星	對應的 n 值
金星	0
地球	1
火星	2
木星	4
土星	5

已知火星與太陽的平均距離比金星與太陽的平均距離多 0.9（天文單位），求

(1) 火星與太陽的平均距離。

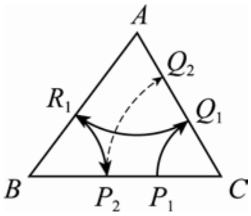
(2) 天王星是繼土星之後，離太陽較近的行星，計算天王星與太陽的平均距離。

(3) 高斯的一位朋友在高斯的幫忙之下，在一八〇二年發現第一顆小行星…穀神星，它離太陽有 2.8 天文單位。問穀神星所對應的 n 值是多少？

(4) 當 n 趨向於負無窮大時，波德公式就給出水星到太陽的平均距離，求水星到太陽的平均距離。

讓我們來欣賞一道圓規在三角形上的把戲：

例題 12 在 $AB=14,\ BC=15,\ CA=13$ 的三角形上，一隻螞蟻做圓弧形的運動，如下圖所示。螞蟻從 BC 邊上的一點 P_1 出發，繞著以 C 點為圓心，$\overline{CP_1}$ 為半徑的圓弧到達 CA 邊上的 Q_1 點；接著從 Q_1 點出發，繞著以 A 點為圓心，$\overline{AQ_1}$ 為半徑的圓弧到達 AB 邊上的 R_1 點；然後從 R_1 點出發，繞著以 B 點為圓心，$\overline{BR_1}$ 為半徑的圓弧到達 BC 邊上的 P_2 點，依這樣的規律進行下去，在 BC 邊上會產生點 $P_1, P_2, P_3, \cdots$。



(1) 若起始點 P_1 滿足 $\overline{P_1C}=7$，描述 $P_2, P_3, \cdots$ 點所在的位置。

(2) 若起始點 P_1 滿足 $\overline{P_1C}=12$，描述 $P_2, P_3, \cdots$ 點所在的位置。

〔分析〕點 $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$ 有無限多個，想要描述它們，並非容易的事情，除非發現它們具有某種特殊的規律性。就如同數列一樣，等差或等比數列，很容易描述，因為它們具有容易描述的代數規律性，後一項與前一項的差是個固定的常數，或者後一項與前一項的比是個固定的常數。不過不要忽略，除了等差與等比這種規律的性質外，呈現週期性的現象，也是容易描述的一種規律。例如聯考考過的數列：數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=\dfrac{6}{7}$ 及 $a_{n+1}=3.5a_n(1-a_n)$ $(n\ge 1)$

它就是具有週期性的數列。讓我們抱著動手玩數學的心情，實際操作這道遊戲幾個輪迴，你將會有想像不到的規律發現。

例題 13 加拿大著名幾何學家科克斯特在研究有「幻覺藝術之父」稱號的荷蘭著名版畫家艾薛爾的兩幅幾何圖形時，發現兩個角度很接近的銳角 A 與銳角 B。科克斯特使用數學計算得到它們的餘弦值分別為

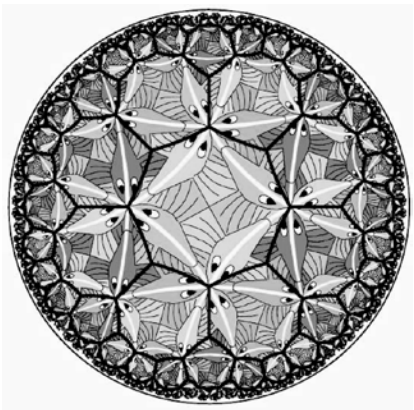
$$\cos A=\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-4}{8}},\quad \cos B=\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-5}{40}}$$

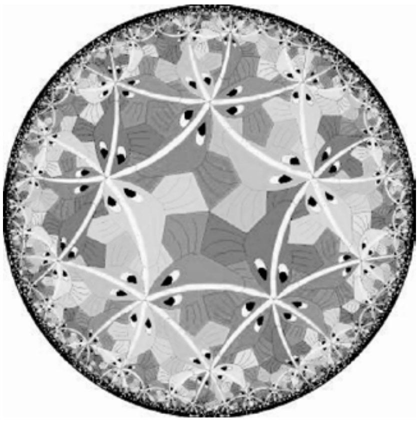
在不使用計算器的情形下，比較角度 A 與 B 的大小。

〔**分析與背景**〕

餘弦函數在 0 與 $\dfrac{\pi}{2}$ 之間的圖形是隨著角度增加，函數值減少的情況（或者說，在這區間是遞減函數）。利用函數值愈大，角度愈小這個特性可以幫我們了解科克斯特的難題。

這兩個角差異很小，分別是 79.97°與 78.07°，也就是說，它們的餘弦函數值也會很接近才是。事實上，這兩個角是從底下兩個美麗的幾何圖形中產生的：

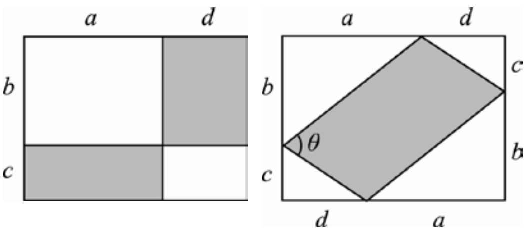




「無字證明」並不是不需要文字說明就可以完全理解，而是僅需極少的解釋就能得證的意思。愈是好的「無字證明」，所需的輔助文字愈少。「無字證明」並不是新產物或新的名詞，回想國中時，畢氏定理的幾何證明就有點像無字證明的模式。讓我們品嚐一道無字證明題：

例題 14 國外很流行將數學公式或不等式用簡單、有創意且易於了解的幾何圖形來呈現，這就是所謂「無字證明」或叫做「圖說一體、不證自明」。

下圖是台北市中山女中的林怡萱同學，針對柯西不等式所提出的「無字證明」：



(1) 說明左圖中的白色區域面積等於右圖中的白色區域面積。

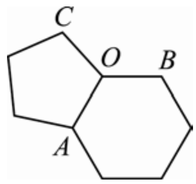
(2) 將左圖的灰色面積以符號 a, b, c, d 表示。

(3) 證明右圖中的灰色區域面積為 $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta$。

(4) 證明柯西不等式 $(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 成立。

構成 DNA 雙螺旋的四個鹼基 A, G, C, T 中，A, G 是所謂的嘌呤，而 C, T 是嘧啶，其中嘧啶的化學結構式以一個正六邊形為主，嘌呤則由一個正五邊形與一個正六邊形組合而成。雖然它們是平面圖，但利用中學的幾何知識也可以推得意想不到的三角恆等式，就讓我們來一曲嘌呤的數學狂想曲：

例題 15 嘌呤的結構圖主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成（令它們的邊長為 1）的平面環形，如下圖所示：



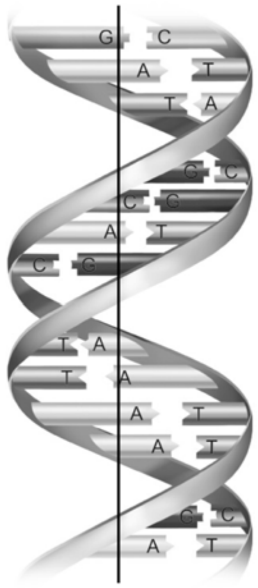
(1) 求 $\angle BAC, \angle ABC, \angle ACB$ 的值。

(2) 求三角形 ABC 外接圓半徑 R，並指出外接圓圓心。

(3) 將邊長 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 以正弦函數表示。

(4) 利用餘弦定理證明三角恆等式
$$\sin^2 54° + \sin^2 66° - \sin 54° \sin 66° = \frac{3}{4}。$$

〔分析與背景〕



遺傳學始於孟德爾，他於一八六五年發表進行多年的豌豆實驗。但是人類對基因如何複製與傳遞的深入認識，則是在一九五三年詹姆斯・華生與克力克發現 DNA 的雙螺旋結構之後的事情。上圖是他們發表在英國《自然》雜誌上的 DNA 雙螺旋纏繞的圖形。兩股螺旋在直徑 20 埃（埃＝10^{-10}公尺）的圓柱內依著相反方向互相纏

繞，每隔 68 埃繞一圈，包含有十對的鹼基對 *A-T* 或 *G-C*。誠如薛丁格所比喻的，摩斯電碼是由點與線兩個符號所組成的複雜訊息，傳遞生物基因訊息可能也是由幾個簡單的符號組合而成。在 DNA 雙螺旋纏繞獲得確認之後，四個鹼基符號

A, T, G, C

在 DNA 鏈上的排列順序，就是傳遞訊息的基因。

讓我們欣賞一道真實的間諜故事，這可是從 Discovery 頻道看到的歷史故事。相關數據當然是出於善意的捏造。

例題 16 印度間諜南星在前往拉薩的途中遇到搶匪，南星落荒而逃，轉往一條小路。翌日發現太陽在他逃亡小路正前方偏右 120 度的方向昇起。南星回想被搶當晚，北極星出現在前往拉薩之路正前方偏左 50 度的方向上。問南星前往拉薩之路與落荒而逃的小路夾角是幾度？（註：太陽昇起的方向算為正東，北極星出現的方向算為正北）

(A) 50 度

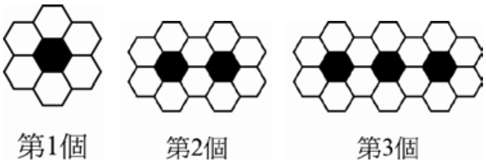
(B) 70 度

(C) 80 度

(D) 120 度

(E) 170 度。

例題 17 用黑、白兩種顏色的正六邊形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：



試問：

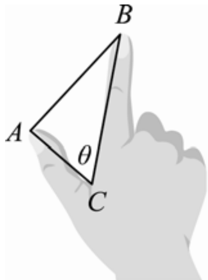
(1) 第 4 個圖案有白色地磚多少塊？

(2) 第 n 個圖案有白色地磚多少塊？

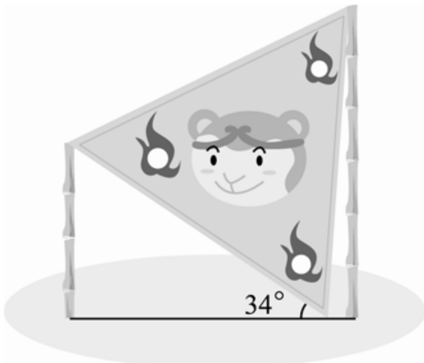
例題 18 下圖是某人右手食指與拇指伸直，虎口張開θ時的手指形狀。已知此人的手指相關部分長度 $BC=15, AC=8$，求下列的值：

(1) 已知 $AB=17$，求此時虎口張開的角度θ為多少？

(2) 當虎口張開的角度$\theta=60°$時，求長度 AB 的值。



例題 19 某校為了舉辦科展，將一長竹子鋸成兩段，分別豎立在會場門口，且在兩段竹子頂端與地上一點，架設一個邊長為 10 公尺的正三角形看板，如下圖所示。已知 $\cos 26° = 0.9$，求原竹子長。



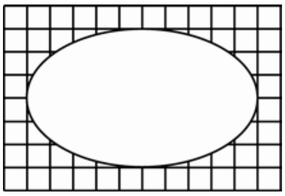
最後，讓我們將佛洛伊德的故事講完：佛洛伊德晚年參加晚輩給他的慶祝會，地位崇高的他用餐前總是要洗手。打開水龍頭，讓水直流而下，是大家都有的洗手經驗。慶祝會選在 10 樓的一家高級餐廳，水龍頭設計也是高級的，佛洛伊德找不到水龍頭開關，馬上聯想到他朋友「吹熄電燈」的糗事，於是順著水龍頭水管往下探索，一直摸索到 1 樓還是沒找著水龍頭開關。佛洛伊德帶著愉

快的神情回到 10 樓餐廳，告訴老闆「這整棟大樓的高級水龍頭開關被小偷全部偷走了，一個也沒剩下，我已經檢查過了。」老闆客氣的回答說「我們的水龍頭沒有開關，只需將手放在水龍頭正下方，水就會自動跑出來，這是電子感應式水龍頭，順籐摸瓜的方法是不管用的。」

佛洛伊德朋友的糗事與他晚年慶祝會的故事給予我們怎樣的啟示呢？

⑥ 習題與例子解答或說明

【練習 1】下圖是貼在方格紙上的一個橢圓。問：該橢圓的兩個焦點相距多少單位長？



〔**解說**〕「橢圓的半長軸 a，半短軸 b 與兩焦點距離的一半 c 構成直角三角形，即 $a^2=b^2+c^2$」是橢圓的重要幾何性質。上述題目在測驗學生活用這性質的能力。同時，市面上販賣的橢圓板只有各種橢圓形狀，沒辦法標示焦點位置。這也是一道幫橢圓板求焦點的問題。

【練習 2】九十一學年度指考《數學甲》多重選擇第 4 題：

平面上有以坐標原點為中心的兩個橢圓，已知這兩個橢圓的長軸長度相等，短軸長度也相等，並且兩橢圓相交於四個點。今將此四點以坐標原點為中心，反時鐘順序依次連成一個四邊形，請問下列哪些敘述為真？

(A) 該四邊形一定是正方形

(B) 該四邊形不可能是長與寬不等的長方形

(C) 該四邊形一定是平行四邊形

(D) 該四邊形一定是菱形。

〔**解說**〕 這是一道難題，學生不容易在允許的時間內作答完成，大都有點靠運氣，猜到的。

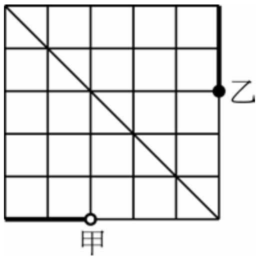
例題 4 紙張的尺寸分為國際標準組織尺寸和我國慣用尺寸兩種，而國內通用尺寸主要有「菊版紙」與「四六版紙」兩大類。若依面積來說，則最大的紙張稱為全開，其次有 2 開，3 開，4 開，⋯，128 開等的對應紙張。菊版紙的全開是 25×35（以英吋為單位）大小的紙張，而 2 開（有時稱對開），3 開，4 開，8 開，12 開，16 開，20 開的大小列表如下表所示。長方形紙張較長邊除以短邊所產生的比值稱為這紙張的“視覺率”。

規格 / 開數	英吋
全開	25×35
2 開	$25\times17\frac{1}{2}$
3 開	$25\times11\frac{2}{3}$
4 開	$12\frac{1}{2}\times17\frac{1}{2}$
8 開	$12\frac{1}{2}\times8\frac{3}{4}$
12 開	$8\frac{1}{3}\times8\frac{3}{4}$
16 開	$6\frac{1}{4}\times8\frac{3}{4}$
20 開	$6\frac{1}{4}\times7$

以上是有關紙張尺寸的規格，至於用紙的計算是以“令”為單位，一令紙代表 500 張全開紙張的數量。因為一張全開紙可以分割成兩張 2 開紙，所以一令紙也相當於 1000 張 2 開紙的數量。

例題 10

(1) 如下圖所示，當甲移動白子之後，乙以圖中的反對角線作對稱軸，將黑子移到與白子對稱的位置。這是白子與黑子仍然位於某正方形的兩個對頂角上。依這樣的規律，先玩的甲會落敗。也就是說，後玩的乙只需採取對稱反對角線的策略，就會得勝。



(2) 甲將白子向右移 3 格，此時白子與黑子位於 5×5 正方形的斜對角點上，而且變成乙先玩。由(1)知道後玩者採取對稱的策略可贏，故甲可以贏得比賽。

例題 11

(1) 因為地球與太陽的平均距離為 1 天文單位，所以

$$\alpha+2\beta=1$$

又由火星與太陽的平均距離比金星與太陽的平均距離多 0.9（天文單位），得 $(\alpha+4\beta)-(\alpha+\beta)=0.9\Rightarrow\beta=0.3$

代入 $\alpha+2\beta=1$ 得 $\alpha=0.4$。因此，波德法則

$$d=0.4+0.3\cdot 2^n$$

火星與太陽的平均距離為

$0.4+0.3\cdot 2^2=1.6$（天文單位）。

(2) 天王星與太陽的平均距離為

$0.4+0.3\cdot 2^6=19.6$（天文單位）。

(3) 由 $0.4+0.3\cdot 2^n=2.8$ 解得 $n=3$，即穀神星所對應的 $n=3$

(4) 當 n 趨向於負無窮大時，2^n 趨向於 0，故水星到太陽的平均距離為

$0.4+0.3\cdot 0=0.4$（天文單位）。

例題 12

(1) 經實際操作之後，得到

$$P_1=P_2=P_3=\cdots。$$

(2) 經實際操作之後，得到

$P_1=P_3=P_5=\cdots, P_2=P_4=P_6=\cdots$。

的週期現象，而且 $\overline{P_2C}=2$。

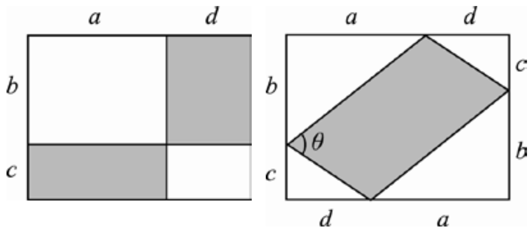
例題 13

透過如下的操作：

操作程序	$\cos A$	$\cos B$
平方	$\dfrac{3\sqrt{2}-4}{8}$	$\dfrac{3\sqrt{5}-5}{40}$
乘以 40	$15\sqrt{2}-20$	$3\sqrt{5}-5$
加 20	$15\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}+15$
再平方	450	$270+90\sqrt{5}$
除以 90	5	$3+\sqrt{5}$
減 3	2	$\sqrt{5}$

因為 $2<\sqrt{5}$，所以 $\cos A<\cos B$。又餘弦函數在銳角範圍是遞減函數，所以 $A>B$。

例題 14



(一)　　　(二)

(1) 將圖(二)中對邊的兩個白色三角形拼在一起，就得到圖(一)的兩個白色四邊形。因此，圖(一)中的白色區域面積等於圖(二)中的白色區域面積。

(2) $ac+bd$。

(3) 因為灰色區域是個平行四邊形，所以面積為

$$2\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta\,.$$

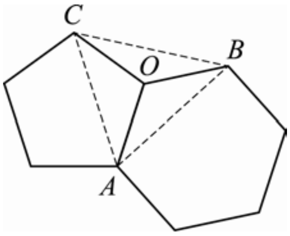
(4) 利用(1)、(2)及(3)，得

$$ac+bd=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta$$
$$\le\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

將兩邊平方，得

$$(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)\,.$$

例題 15 令 O 是正五邊形與正六邊形在三角形 ABC 內的交點，如下圖所示：



(1) 因為正五邊形與正六邊形的內角分別為 108°與 120°，所以

$$\angle BOC=360^\circ-(108^\circ+120^\circ)=132^\circ$$
$$\angle OAC=\angle OCA=\frac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$$
$$\angle OAB=\angle OBA=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$$
$$\angle OBC=\angle OCB=\frac{180^\circ-132^\circ}{2}=24^\circ$$

即

$$\angle BAC=36^\circ+30^\circ=66^\circ$$
$$\angle ABC=30^\circ+24^\circ=54^\circ$$
$$\angle ACB=36^\circ+24^\circ=60^\circ\ .$$

(2) 因為 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$，所以 O 是三角形 ABC 外接圓圓心，且外接圓半徑 $R=1$。

(3) 利用正弦定理

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC}=\frac{\overline{AC}}{\sin\angle ABC}$$
$$=\frac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB}=2R=2\ .$$

得

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 66^\circ}=\frac{\overline{AC}}{\sin 54^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=2$$

即

$$\overline{BC}=2\sin 66^\circ$$
$$\overline{AC}=2\sin 54^\circ$$
$$\overline{AB}=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}\,.$$

(4) 利用餘弦定理證

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\,\overline{BC}\cos\angle ACB$$

得

$$\sqrt{3}^2=(2\sin 54^\circ)^2+(2\sin 66^\circ)^2$$
$$-2(2\sin 54^\circ)(2\sin 66^\circ)\cos 60^\circ$$

即

$$\sin^2 54^\circ+\sin^2 66^\circ-\sin 54^\circ\sin 66^\circ=\frac{3}{4}\,.$$

例題 18

(1) 在三角形 ABC 中，利用餘弦定理

$$\cos\theta=\frac{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}{2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}}$$

得

$$\cos\theta=\frac{15^2+8^2-17^2}{2\cdot 15\cdot 8}=0$$

故 $\theta=90^\circ$。

(2) 當虎口張開的角度 $\theta=60^\circ$ 時，利用餘弦定理

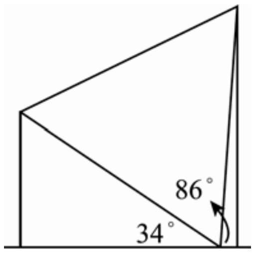
$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos\theta$$

得

$$\overline{AB}^2=8^2+15^2-2\cdot 8\cdot 15\cdot\frac{1}{2}=169$$

故 $\overline{AB}=\sqrt{169}=13$。

例題 19 因為看板為正三角形，所以右邊竹竿的仰角為 $180^\circ-(34^\circ+60^\circ)=86^\circ$。因此，完整的角度如下圖所示。



又因為長竹竿的長度是兩截短竹竿的和，所以長竹竿的長度為

$$\begin{aligned}
&10\sin 34^\circ+10\sin 86^\circ\\
&=10(\sin 34^\circ+\sin 86^\circ)\\
&=10\cdot 2\sin\frac{34^\circ+86^\circ}{2}\cos\frac{34^\circ-86^\circ}{2}\\
&=10\cdot 2\sin 60^\circ\cos 26^\circ\\
&=10\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.9\\
&=9\sqrt{3}
\end{aligned}$$

（公尺）。

Apollonius 問題
——兼談三條件決定圓(一)

◎趙文敏／台灣師範大學數學系

幾何學討論圓的性質時，都會提到「三個條件決定圓」這樣的觀念。所謂「三個條件」，最簡單的例子自然是「通過三個點」。除了這個例子之外，在歐氏幾何中，決定圓所會引用的「條件」，常見的還有「與一直線相切」和「與一圓相切」。將這三類條件加以組合，每次選用三項，共可組合成十種「三個條件」的圓作圖問題，它們分別為

「點點點」問題，「線線線」問題，「點點線」問題，「點線線」問題，

「線線圓」問題，「點線圓」問題，「線圓圓」問題，

「點點圓」問題，「點圓圓」問題，「圓圓圓」問題，

其中，所謂「點點點」問題，乃是指「通過三個已知點」的圓作圖問題；所謂「點線圓」問題，乃是指「通過某一已知點、與某一已知直線相切、與某一已知圓相切」的圓作圖問題。其餘仿此類推。

前面的十個圓作圖問題，早在古希臘時代就已被提出。歐幾里得（Euclid）在他的曠世名著幾何原本（Elements）中接觸到前面的第一個與第二個問題，因而引進了三角形的外接圓、內切圓與旁切圓等概念。至於其他的八個圓作圖問題，阿波羅尼斯（Apollonius）在他一份名為 On Contacts, Plane Loci, Inclinations, Section of an Area, Determinate Sectione 的著作中作了討論，後人也因此將前面的「圓圓圓」問題稱為阿波羅尼斯問題（Apollonius problem）。

阿波羅尼斯的著作 On Contacts 已失傳，後人對於他如何解決前述圓作圖問題也不甚了解。但可以確定的是，有了前輩們的提點，阿波羅尼斯問題大大地引發後人的興趣。在往後的兩千年間，有許許多多人投入這個問題的探討。再加上坐標幾何與射影幾何相繼問世、以及綜合幾何許多新概念不斷出現，例如：圓冪、根軸、根心、相似中心、反演變換、極點與極線等，使得處理阿波羅尼斯問題的工具持續增加，也因此得出各種不同的作圖法。

對於前面的每個圓作圖問題，「三個條件」都會出現點、直線或圓。在同一個問題中的點、直線或圓，往往因為點、直線或圓的相對位置不同，可能使解的個數不同、作圖法也可能不同。當「三個條件」中至少兩條件出現圓時，甚至連給定圓的大小關係也會影響。例如：在「點線圓」問題中，若已知直線與已知圓相切，且已知點恰為切點，則解為無限多。另一方面，若已知直線與已知圓相切，而已知點與切點恰為已知圓一直徑的兩端點，則無解。由於這個緣故，若要將前面的十個問題都依點、直線或圓的相對位置作完整的分類，再就各個情況分析解的個數、作圖及證明，這件工程的浩大當然不是本文的篇幅所能承載，這件工程的繁瑣也不會是讀者的興趣所在。

本文中，我們將依前面所列的順序將十個問題逐一討論。在每個問題中，不作完整的分類，只就該問題中最具一般性的一個或數個情形作圖、證明、或作必要的分析，並將所需的理論儘量降低深度。

在下文中，稱「圓$O(r)$」時，是指圓心為點 O、半徑為 r 的圓；稱「圓O」時，是指圓心為點 O 的某一圓；稱「拋物線$\mathcal{P}(F；l)$」時，是指焦點為點 F、準線為直線 l 的拋物線；稱「橢圓$\mathcal{E}(F_1，F_2；r)$」時，是指焦點為點F_1與F_2、長軸長為 r 的橢圓；稱「雙曲線$\mathcal{H}(F_1，F_2；r)$」時，是指焦點為點F_1與F_2、貫軸長為r的雙曲線。

另外，本文對共線的兩線段$\overline{UV}$與$\overline{XY}$，以$\overrightarrow{UV}\times\overrightarrow{XY}$表示其有向長的乘積，其意義如下：

(1) 若由 U 至 V 的方向與由 X 至 Y 的方向相同，則$\overrightarrow{UV}\times\overrightarrow{XY}=\overline{UV}\times\overline{XY}$；

(2) 若由 U 至 V 的方向與由 X 至 Y 的方向相反，則$\overrightarrow{UV}\times\overrightarrow{XY}=-\overline{UV}\times\overline{XY}$。

思考問題 1：

前文中指出「三個條件決定圓」，但大家都熟知：已知圓心與半徑可決定一圓。試問：「給定圓心、給定半徑」算三個條件嗎？為什麼？

1 點點點問題

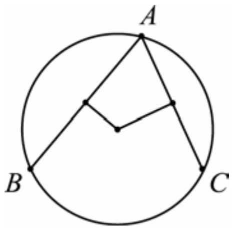
問題：給定三相異點 A、B 與 C，試作出過點 A、B 與 C 的圓。

解：根據三個給定點的相對位置，可分成兩種情形如下：

一、點 A、B 與 C 不共線。

二、點 A、B 與 C 共線。

第一種情形顯然恰有一解，它就是三角形的外接圓。這是十個圓作圖問題中最基本、也最簡單的問題，作圖法也很簡單（如圖 1 所示），不必證明或解說。第二種情形則顯然無解。



▲圖 1

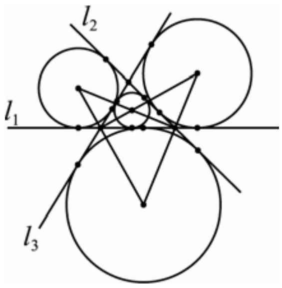
2 線線線問題

問題：給定三相異直線l_1、l_2與l_3，試作出與直線l_1、l_2、l_3都相切的圓。

解：根據三相異直線l_1、l_2與l_3的相對位置，主要是下面兩種情形：

一、三相異直線l_1、l_2與l_3兩兩相交，但不共點。

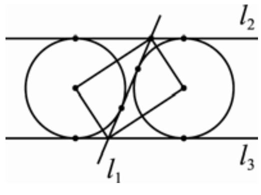
此種情形恰有四解；它們就是三角形的內切圓與旁切圓。這也是一個基本而簡單的問題，作圖法也很簡單，（如圖 2 所示），不必做解說。



▲圖 2

二、三相異直線l_1、l_2與l_3恰有兩線平行。

此種情形恰有二解。這也是一個簡單的問題，作圖法也很簡單，（如圖 3 所示），不必做解說。



▲圖 3

③ 點點線問題

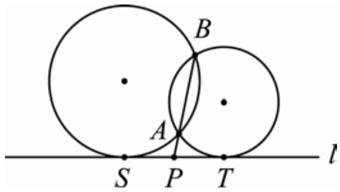
問題：給定兩個相異點 A、B 及一直線 l，試作出過點 A、B 且與直線 l 相切的圓。

解：根據兩個給定點與給定直線的相對位置，主要是下面三種情形：

一、點 A、B 在直線 l 的同側、且直線 AB 與直線 l 相交。

◆作圖法：

1. 設直線 AB 與直線 l 相交於點 P。在直線 l 上，作點 S 與點 T 使得
$$\overline{PS}^2=\overline{PT}^2=\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}$$
2. 過點 A、B、S 的圓與過點 A、B、T 的圓即為所求，共兩解。



▲圖 4

◆證明：

因為點 A、B 在直線 l 的同側，所以，$\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}$ 是正數，點 S 與點 T 必存在。其次，因為 $\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}$ 是點 P 對圓 ABS 的冪而 $\overline{PS}^2=\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}$，這表示 $\overline{PS}^2$ 也是點 P 對圓 ABS 的冪。於是，直線 PS 必與圓 ABS 相切於點 S。同理，直線 PT 必與圓 ABT 相切於點 T。

思考問題 2：

圖 4 中的點 S 與點 T 如何作圖？

二、點 A、B 在直線 l 的同側、且直線 AB 與直線 l 平行。

思考問題 3：

試證：「點點線」問題的第二種情形恰有一解。

三、點 A 在直線 l 上、而點 B 不在直線 l 上。

思考問題 4：

試證：「點點線」問題的第三種情形恰有一解。

④ 點線線問題

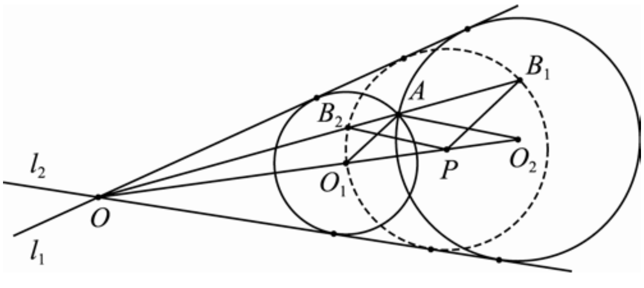
問題：給定一點 A 及兩相異直線 l_1、l_2，試作出過點 A 且與直線 l_1、l_2 都相切的圓。

解：根據給定點與兩給定直線的相對位置，主要是下面四種情形：

一、直線 l_1、l_2 相交、點 A 不在直線 l_1 上、不在直線 l_2 上、也不在直線 l_1、l_2 的任一夾角平分線上。

◆作圖法：

1. 設直線 l_1、l_2 相交於點 O。任作一個與直線 l_1、l_2 都相切的圓 P，使得圓心 P 與點 A 位於直線 l_1、l_2 所夾的同一個角的內部，並設直線 OA 與圓 P 交於兩點 B_1 與 B_2。



▲圖 5

2. 過點 A 作兩直線分別與 $\overline{PB_1}$ 、 $\overline{PB_2}$ 平行，因為點 A 不在直線 l_1 、 l_2 的任一夾角平分線上，所以，兩平行線與上述角的分角線分別有交點 O_1 、 O_2 。

3. 分別以點 O_1 、 O_2 為圓心而與直線 l_1 、 l_2 都相切的圓即為所求，共兩解。

◆證明：

因為 $\overline{O_1A}$ 與 $\overline{PB_1}$ 平行，所以，$\triangle OO_1A$ 與 $\triangle OPB_1$ 是一對相似的三角形，所以，可得

$$\frac{\overline{O_1A}}{\overline{PB_1}}=\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OP}}$$

另一方面，過點 O_1 與點 P 作直線 l_1 的垂直線段，可得

$$\frac{\text{點 } O_1 \text{ 至直線 } l_1 \text{ 的垂直距離}}{\text{點 } P \text{ 至直線 } l_1 \text{ 的垂直距離}}=\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OP}}$$

因為 $\overline{PB_1}=$ 點 P 至直線 l_1 的垂直距離，所以，比較上述兩個等式，即可知 $\overline{O_1A}=$ 點 O_1 至直線 l_1 的垂直距離。於是，以點 O_1 為圓心、$\overline{O_1A}$ 為半徑的圓必與直線 l_1 相切。

思考問題 5：

若上述第一種情形中的點 A 在直線 l_1 、 l_2 的某一夾角平分線上、但不是直線 l_1 、 l_2 的交點，則圓心 O_1 、 O_2 如何作圖？

思考問題 6：

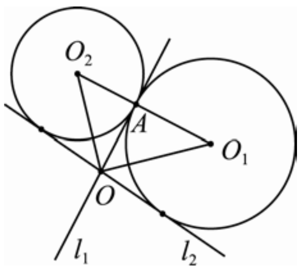
試證：若直線 l_1 、 l_2 相交、點 A 不在直線 l_1 上、也不在直線 l_2 上，則圓 X 過點 A 且與直線 l_1 、 l_2 都相切的充要條件是：圓心 X 是拋物線 $\mathcal{P}(A; l_1)$ 與拋物線 $\mathcal{P}(A; l_2)$ 的一交點。

二、直線 l_1 、 l_2 相交、點 A 在其中一直線上、但不在另一直線上。

◆作圖法：

1. 設直線 l_1 、 l_2 相交於點 O，且點 A 在直線 l_1 上、但不在直線 l_2 上。過點 A 作直線 l_1 的垂直線，設此垂直線與直線 l_1 、 l_2 之夾角的兩條分角線分別交於點 O_1 、 O_2 。

2. 分別以點 O_1 、 O_2 為圓心而過點 A 的圓即為所求，共兩解。



▲圖 6

◆證明：

顯然正確。

三、直線 l_1 、 l_2 平行、點 A 位於兩直線所夾區域的內部。

思考問題 7：

試證：「點線線」問題的第三種情形恰有兩解。

四、直線 l_1 、 l_2 平行、點 A 位於其中一直線上。

思考問題 8：

試證：「點線線」問題的第四種情形恰有一解。

⑤ 線線圓問題

問題：給定兩相異直線 l_1 、l_2 及一圓 $O(r)$，試作出與直線 l_1 、l_2 及圓 $O(r)$ 都相切的圓。

解：根據兩給定直線與給定圓的相對位置，我們考慮下面三種情形：

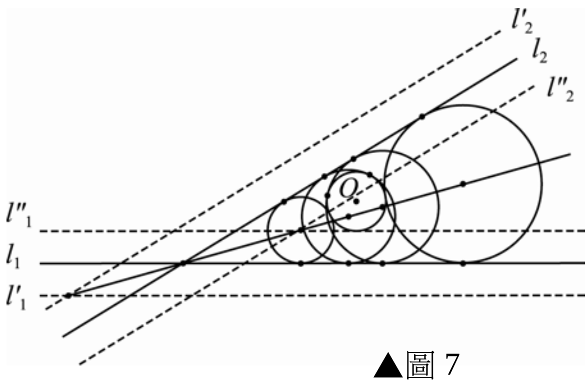
一、直線 l_1 、l_2 相交於圓 $O(r)$ 的外部一點、圓 $O(r)$ 與直線 l_1 不相交、與直線 l_2 也不相交。

◆作圖法：

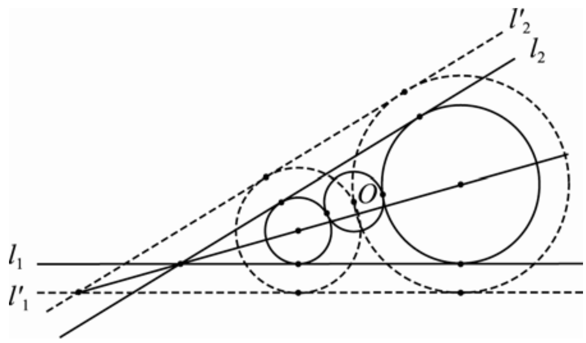
在此情形中，所求圓共有四解（如圖 7 所示），其中兩圓與 $O(r)$ 外切，另兩圓與 $O(r)$ 內切。

第一組（與圓 $O(r)$ 外切的圓）：

1. 作一直線 l_1' 與直線 l_1 平行，使得：直線 l_1' 與直線 l_1 的距離等於 r，而且直線 l_1' 與圓心 O 位於直線 l_1 的異側。
2. 作一直線 l_2' 與直線 l_2 平行，使得：直線 l_2' 與直線 l_2 的距離等於 r，而且直線 l_2' 與圓心 O 位於直線 l_2 的異側。
3. 仿照「點線線」問題的作圖法，作出過點 O 且與直線 l_1' 、l_2' 都相切的圓。共兩解（即圖 8 中以虛線繪出的圓）。
4. 以上述兩圓的圓心為圓心、作出與直線 l_1 、l_2 都相切的圓。此兩圓就是與直線 l_1 、l_2 都相切且與圓 $O(r)$ 外切的兩圓（即圖 8 中以實線繪出的圓）。



▲圖 7



▲圖 8

◆證明：

設一圓 X 與直線 l_1 、l_2 都相切且與圓 $O(r)$ 外切，則得

$\overline{XO}=$（點 X 至直線 l_1 的距離）$+r$

$\overline{XO}=$（點 X 至直線 l_2 的距離）$+r$

因為直線 l_1' 與直線 l_1 平行、直線 l_1' 與直線 l_1 的距離等於 r，而且直線 l_1' 與圓心 O 位於直線 l_1 的異側， 所以，（點 X 至直線 l_1 的距離）$+r=$（點 X 至直線 l_1' 的距離）。

同理，（點 X 至直線 l_2 的距離）$+r=$（點 X 至直線 l_2' 的距離）。於是，得

$\overline{XO}=$（點 X 至直線 l_1' 的距離）

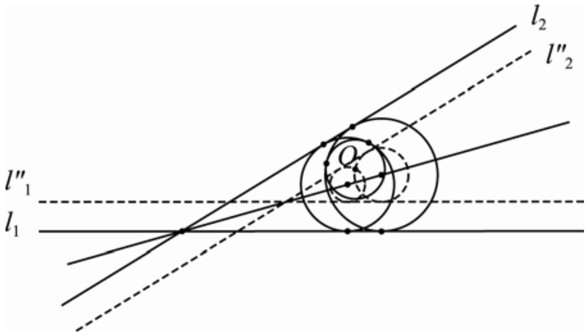
$\overline{XO}=$（點 X 至直線 l_2' 的距離）

由此可知：圓心 X 是拋物線 $\mathcal{P}(O;l_1')$ 與拋物線 $\mathcal{P}(O;l_2')$ 的一交點。根據第 4 小節思考問題 5 中的充要條件可知：圓心 X 也是通過點 O 且與直線 l_1'、l_2' 都相切之圓的圓心。

因為圖 8 中以虛線繪出的兩圓都過點 O 且與直線 l_1'、l_2' 都相切，而以實線繪出的圓是由虛線圓將半徑縮短 r 而得，所以，以實線繪出的圓與直線 l_1、l_2 都相切且與圓 $O(r)$ 都外切。

第二組（與圓 $O(r)$ 內切的圓）：

1. 作一直線 l_1'' 與直線 l_1 平行，使得：直線 l_1'' 與直線 l_1 的距離等於 r，而且直線 l_1'' 與圓心 O 位於直線 l_1 的同側。
2. 作一直線 l_2'' 與直線 l_2 平行，使得：直線 l_2'' 與直線 l_2 的距離等於 r，而且直線 l_2'' 與圓心 O 位於直線 l_2 的同側。
3. 仿照「點線線」問題的作圖法，作出過點 O 且與直線 l_1''、l_2'' 都相切的圓。共兩解（即圖 9 中以虛線繪出的圓）。
4. 以上述兩圓的圓心為圓心、作出與直線 l_1、l_2 都相切的圓。此兩圓就是與直線 l_1、l_2 都相切且與圓 $O(r)$ 內切的兩圓（即圖 9 中以實線繪出的圓）。



▲圖 9

◆證明：

設一圓 Y 與直線 l_1、l_2 都相切且與圓 $O(r)$ 內切，則因為直線 l_1、l_2 都與圓 O 不相交，可得

$$\overline{YO} = \text{（點 } Y \text{ 至直線 } l_1 \text{ 的距離）} - r$$
$$\overline{YO} = \text{（點 } Y \text{ 至直線 } l_2 \text{ 的距離）} - r$$

因為直線 l_1'' 與直線 l_1 平行、直線 l_1'' 與直線 l_1 的距離等於 r，而且直線 l_1'' 與圓心 O 位於直線 l_1 的同側，所以，（點 Y 至直線 l_1 的距離）$-r=$（點 Y 至直線 l_2'' 的距離）。

同理，（點 Y 至直線 l_2 的距離）$-r=$（點 Y 至直線 l_1'' 的距離）。於是，得

$$\overline{YO} = \text{（點 } Y \text{ 至直線 } l_1'' \text{ 的距離）}$$
$$\overline{YO} = \text{（點 } Y \text{ 至直線 } l_2'' \text{ 的距離）}$$

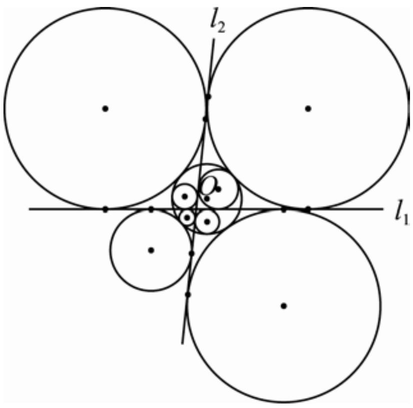
由此可知：圓心 Y 是拋物線 $\mathcal{P}(O;l_1'')$ 與拋物線 $\mathcal{P}(O;l_2'')$ 的一交點。根據第 4 小節思考問題 5 中的充要條件可知：圓心 Y 也是通過點 O 且與直線 l_1''、l_2'' 都相切之圓的圓心。

因為圖 9 中以虛線繪出的兩圓都過點 O 且與直線 l_1''、l_2'' 都相切，而以實線繪出的圓是由虛線圓將半徑增長 r 而得，所以，以實線繪出的圓與直線 l_1、l_2 都相切且與圓 $O(r)$ 都內切。

二、直線l_1、l_2相交於圓$O(r)$的內部一點、但交點不是圓心 O。

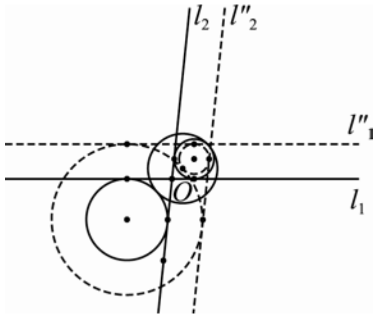
◆作圖法：

在此情形中，所求圓共有八解（如圖 10 所示），其中四圓與圓$O(r)$外切，另四圓與圓$O(r)$內切。



▲圖 10

1. 仿第一種情形的作圖法，在直線l_1的兩側各作一平行直線l_1'、l_1''，在直線l_2的兩側也各作一平行直線l_2'、l_2''，使得上述四對相鄰平行直線的距離都等於r。
2. 任選直線l_1、l_2所夾的某個角（共四個角）的內部，找出上述四直線l_1'、l_1''、l_2'、l_2''中與此內部不相交的兩直線。
3. 仿照「點線線」問題的作圖法，作出過點 O 且與上述第 2 點中的兩直線都相切的圓。共兩解（即圖 11 中以虛線繪出的圓）。



▲圖 11

4. 以上述兩圓的圓心為圓心、作出與直線l_1、l_2都相切的圓。此兩圓與圓$O(r)$一外切、一內切（即圖 11 中以實線繪出的圓）。與圓$O(r)$外切的圓心位於上述第 2 點中所選角的內部、而與圓$O(r)$內切的圓心則位於所選角的對頂角內部。
5. 上述第 2 點中所提的四個夾角各作圖一次，共得八個解。

◆證明：

假設上述作圖法第 2 點中的兩直線為l_1''、l_2''。

設一圓 X 與直線l_1、l_2都相切且與圓$O(r)$外切，而其圓心 X 位於上述作圖法第 2 點中所選角的內部，則得

$$\overline{XO}=（點 X 至直線 l_1 的距離）+r=（點 X 至直線 l_1'' 的距離）$$
$$\overline{XO}=（點 X 至直線 l_2 的距離）+r=（點 X 至直線 l_2'' 的距離）$$

由此可知：圓心 X 是拋物線$\mathcal{P}(O;l_1'')$與拋物線$\mathcal{P}(O;l_2'')$的一交點。根據第 4 小節思考問題 5 中的充要條件，可知：圓心 X 也是通過點 O 且與直線l_1''、l_2''都相切之圓的圓心。

設一圓 Z 與直線l_1、l_2都相切且與圓$O(r)$內切，圓 Z 較小，而其圓心 Z 位於上述作圖法第 2 點中所選角的對頂角內部，則圓心 Z 位於直線l_1''與直線l_1之間、圓心 Z 也位於直線l_2''與直線l_2之間。於是，得

$$\overline{ZO}=r-（點 Z 至直線 l_1 的距離）=（點 Z 至直線 l_1'' 的距離）$$
$$\overline{ZO}=r-（點 Z 至直線 l_2 的距離）=（點 Z 至直線 l_2'' 的距離）$$

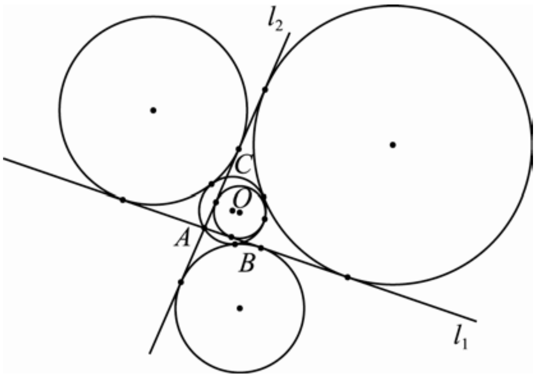
由此可知：圓心 Z 是拋物線$\mathcal{P}(O;l_1'')$與拋物線$\mathcal{P}(O;l_2'')$的一交點。根據第 4 小節思考問題 5 中的充要條件，可知：圓心 Z 也是通過點 O 且與直線l_1''、l_2''都相切之圓的圓心。

因為圖 11 中以虛線繪出的兩圓都過點 O 且與直線 l_1''、l_2'' 都相切，所以，以實線繪出的圓與直線 l_1、l_2 都相切且與圓 $O(r)$ 都相切。

三、直線 l_1、l_2 的交點在圓 O 上、且圓 O 與兩直線都不相切。

◆作圖法：

在此情形中，所求圓共有四解（如圖 12 所示），其中三圓與 $O(r)$ 外切，另一圓與 $O(r)$ 內切。



▲圖 12

1. 仿第二種情形的作圖法，在直線 l_1 的兩側各作一平行直線 l_1'、l_1''，在直線 l_2 的兩側也各作一平行直線 l_2'、l_2''，使得上述四對相鄰平行直線的距離都等於 r。
2. 任選直線 l_1、l_2 所夾的某個角（共四個角）的內部，找出上述四直線 l_1'、l_1''、l_2'、l_2'' 中與此內部不相交的兩直線。
3. 仿照「點線線」問題的作圖法，作出過點 O 且與上述第 2 點中的兩直線都相切的圓。共兩解，但其中有一解的圓心是直線 l_1、l_2 的交點 A，以此點 A 為圓心的圓都不能與直線 l_1、l_2 相切。
4. 以上述另一圓的圓心為圓心、作出與直線 l_1、l_2 都相切的圓，此圓也與圓 $O(r)$ 相切。
5. 上述作圖法第 2 點中所提的四個夾角各作圖一次，共得四個解，其中有三圓與圓 $O(r)$ 外切、另一圓與圓 $O(r)$ 內切。

思考問題 9：

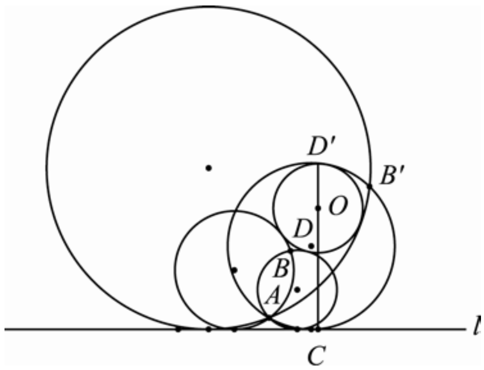
在圖 12 中，若圓 $O(r)$ 與直線 l_1 的交點為 A 與 B、圓 $O(r)$ 與直線 l_2 的交點為 A 與 C，則圓 $O(r)$ 是△ABC 的外接圓，而圖 12 中有兩個圓與△ABC 的外接圓及射線 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 都相切（圖 12 中與圓 $O(r)$ 內切的圓以及位於圓 $O(r)$ 右側的圓），此兩圓的圓心可以由△ABC 的內心及旁心直接作出。試探討之。

⑥ 點線圓問題

問題：給定一點 A、一直線 l 及一圓 $O(r)$，試作出過點 A 且與直線 l、圓 $O(r)$ 都相切的圓。

解：根據給定點、給定直線與給定圓的相對位置，我們考慮下面三種情形：

一、直線 l 與圓 $O(r)$ 不相交、點 A 在圓 $O(r)$ 的外部且與圓心 O 在直線 l 的同側、又點 A 至圓 $O(r)$ 的切線都與直線 l 不平行。



▲圖 13

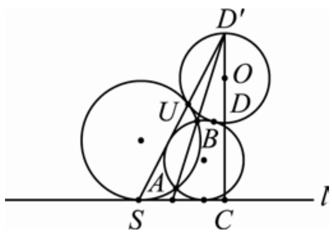
◆作圖法：

在此情形中，所求圓共有四解（如圖 13 所示），其中兩圓與$O(r)$外切，另兩圓與$O(r)$內切。

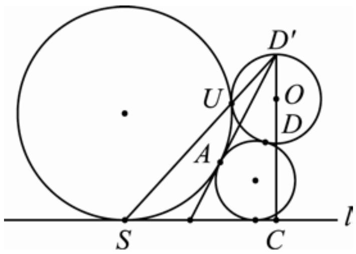
設圓心 O 至直線 l 的垂直線與直線 l 交於點 C、又與圓 O 交於兩點 D 與 D'，並設$\overline{CD}<\overline{CD'}$，亦即：點 C 與點 D 位於點D'的同側。

第一組（與圓 O 外切的圓）：

1. 在直線AD'上作點 B 使得$\overrightarrow{D'A}\times\overrightarrow{D'B}=\overrightarrow{D'C}\times\overrightarrow{D'D}$。
2. 若$A\neq B$，則仿照「點點線」問題第一種情形的作圖法，作出過點 A、點 B 且與直線 l 相切的圓。因為直線AD'不是圓$O(r)$過點D'的切線，所以，直線 AB 與直線 l 不平行。依第 3 小節第一種情形的結果，可知過點 A、點 B 且與直線 l 相切的圓恰有兩個（參看圖 14）。
3. 若$A=B$，則仿照「點線線」問題第二種情形的作圖法，作出與直線AD'切於點 A 且與直線 l 相切的圓。因為直線AD'與直線 l 不平行。依第 4 小節第二種情形的結果，可知與直線AD'切於點 A 且與直線 l 相切的圓恰有兩個（參看圖 15）。
4. 上述 2 與 3 所作的圓即為所求。



▲圖 14



▲圖 15

◆證明：

此證明的重點是：上述作圖法所作的圓只說明與直線 l 相切，為什麼也與圓$O(r)$相切？

若過點D'的一直線與直線 l 交於點 K、又與圓$O(r)$交於點 L，則因為$\triangle CKD'$與$\triangle LDD'$是一對相似的直角三角形，所以，得

$$\frac{\overline{D'K}}{\overline{D'D}}=\frac{\overline{D'C}}{\overline{D'L}}$$

$$\overrightarrow{D'K}\times\overrightarrow{D'L}=\overrightarrow{D'C}\times\overrightarrow{D'D}\ (*)$$

今設過點 A、點 B 且與直線 l 相切的一圓切直線 l 於點 S，又直線$D'S$與圓$O(r)$交於 U。依上述(*)式，可知

$$\overrightarrow{D'S}\times\overrightarrow{D'U}=\overrightarrow{D'C}\times\overrightarrow{D'D}$$

因為$\overrightarrow{D'A}\times\overrightarrow{D'B}=\overrightarrow{D'C}\times\overrightarrow{D'D}$，所以，$\overrightarrow{D'S}\times\overrightarrow{D'U}=\overrightarrow{D'A}\times\overrightarrow{D'B}$。依圓的外冪定理，可知點 U 在圓 ABS 上，亦即：點 U 是圓 ABS 與圓$O(r)$的一個交點。

設圓 ABS 與圓$O(r)$有另一個交點U'，而直線$D'U'$與直線 l、圓 ABS 分別交於點S'、點S''。依上述(*)式，可知$\overrightarrow{D'S'}\times\overrightarrow{D'U'}=\overrightarrow{D'C}\times\overrightarrow{D'D}$。另一方面，依圓的外冪定理，可知$\overrightarrow{D'S''}\times\overrightarrow{D'U'}=\overrightarrow{D'A}\times\overrightarrow{D'B}$。因為$\overrightarrow{D'A}\times\overrightarrow{D'B}=\overrightarrow{D'C}\times\overrightarrow{D'D}$，所以，得

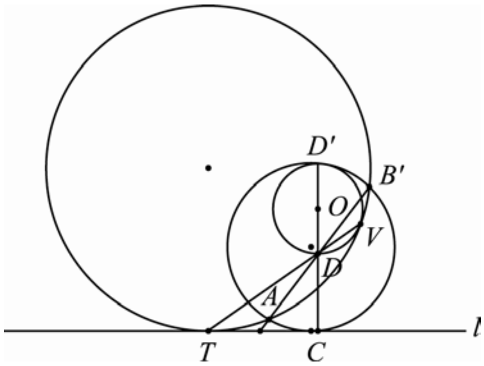
$$\overrightarrow{D'S'}\times\overrightarrow{D'U'}=\overrightarrow{D'S''}\times\overrightarrow{D'U'}$$

因為$D'\neq U'$且$D'\neq S'$，所以，$S'=S''$。因為直線 l 與圓 ABS 相切於點 S，所以，得$S'=S''=S$，$U'=U$，亦即：圓 ABS 與圓$O(r)$相切於點 U。

同理，過點 A、點 B 且與直線 l 相切的另一圓也與圓$O(r)$相切。

第二組（與圓$O(r)$內切的圓）：

1. 在直線 AD 上作點 B' 使得 $\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DD'}$。
2. 因為 $\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DD'}<0$ ，所以， $A\neq B'$ 。仿照「點點線」問題第一種情形的作圖法，作出過點 A、點 B' 且與直線 l 相切的圓。因為直線 AD 不是圓$O(r)$過點 D 的切線，所以，直線 AB' 與直線 l 不平行。依第 3 小節第一種情形的結果，可知過點 A、點 B' 且與直線 l 相切的圓恰有兩個。



▲圖 16

3. 上述 2 所作的圓即為所求。

◆證明：

此證明與第一組圓作圖法的證明類似。

若過點 D 的一直線與直線 l 交於點 K、又與圓$O(r)$交於點 L，則因為△CKD與△$LD'D$是一對相似的直角三角形，所以，得

$$\frac{\overline{DK}}{\overline{DD'}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{DL}}$$

$$\overrightarrow{DK}\times\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DD'}\ (*)$$

今設過點 A、點 B' 且與直線 l 相切的一圓切直線 l 於點 T，又直線 DT 與圓$O(r)$交於 V。依上述(*)式，可知

$$\overrightarrow{DT}\times\overrightarrow{DV}=\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DD'}$$

因為 $\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DD'}$ ，所以， $\overrightarrow{DT}\times\overrightarrow{DV}=\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB'}$ 。依圓的內冪定理，可知點 V 在圓 $AB'T$ 上，亦即：點 V 是圓 $AB'T$ 與圓$O(r)$的一個交點。

設圓 $AB'T$ 與圓$O(r)$有另一個交點V' ，而直線 DV' 與直線 l、圓 $AB'T$ 分別交於點T' 、點T'' 。依上述(*)式，可知 $\overrightarrow{DT'}\times\overrightarrow{DV'}=\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DD'}$ 。另一方面，依圓的內冪定理，可知 $\overrightarrow{DT''}\times\overrightarrow{DV'}=\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB'}$ 。因為 $\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DD'}$，所以，得

$$\overrightarrow{DT'}\times\overrightarrow{DV'}=\overrightarrow{DT''}\times\overrightarrow{DV'}$$

因為 $D\neq V'$ 且 $D\neq T'$ ，所以， $T'=T''$ 。因為直線 l 與圓 $AB'T$ 相切於點 T，所以，得 $T'=T''=T$ ， $V'=V$ ，亦即：圓 $AB'T$ 與圓$O(r)$相切於點 V。

同理，過點 A、點 B' 且與直線 l 相切的另一圓也與圓$O(r)$相切。

思考問題 10：

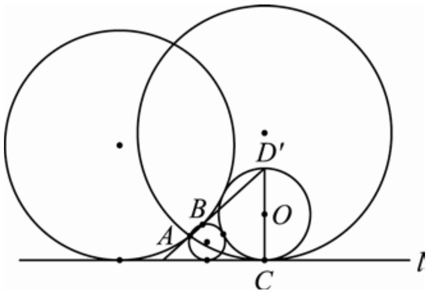
圖 14、15 中的點 B 與圖 16 中的點 B' 如何作圖？

思考問題 11：

試證：若直線 l 與圓$O(r)$不相交、點 A 在圓$O(r)$的外部且與圓心 O 在直線 l 的同側，則圓 X 過點 A 且與直線 l、圓$O(r)$都相切的充要條件是：圓心 X 是雙曲線$\mathcal{H}$ $(A，O；r)$與拋物線$\mathcal{P}$ $(A；l)$的一交點。

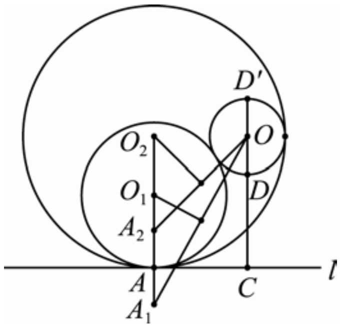
思考問題 12：

試證：直線 l 與圓 O 相切、點 A 在圓 O 的外部且與圓心 O 在直線 l 的同側、又點 A 至圓 O 的切線都與直線 l 不平行，則過點 A 且與直線 l、圓 $O(r)$ 都相切的圓共有三解。



▲圖 17

二、直線 l 與圓 $O(r)$ 不相交、點 A 在直線 l 上、但不是圓心 O 至直線 l 的垂足。



▲圖 18

◆作圖法：

設圓心 O 至直線 l 的垂直線與直線 l 交於點 C、又與圓 O 交於兩點 D 與 D'，並設 $\overline{CD} < \overline{CD'}$。假設點 A 在直線 l 上。

第一組（與圓 $O(r)$ 外切的圓）：

1. 在過點 A 且與直線 l 垂直的直線上作點 A_1 使得：點 A_1 與圓心 O 位於直線 l 的異側，而 $\overline{AA_1} = r$。
2. 設 $\overline{OA_1}$ 的垂直平分線與直線 AA_1 相交於點 O_1。
3. 以點 O_1 為圓心且過點 A 的圓即為所求，此圓與圓 $O(r)$ 外切。

◆證明：

若一圓過點 A 且與直線 l 相切，則因點 A 在直線 l 上，所以，此圓與直線 l 相切於點 A。於是，其圓心在過點 A 且與直線 l 垂直的直線上。

因為

$$\overline{O_1A} = \overline{O_1A_1} - \overline{AA_1} = \overline{O_1A_1} - r = \overline{O_1O} - r$$

所以，以點 O_1 為圓心、$\overline{O_1A}$ 為半徑的圓必與直線 l 相切、且與圓 $O(r)$ 外切。

第二組（與圓 $O(r)$ 內切的圓）：

1. 在過點 A 且與直線 l 垂直的直線上作點 A_2 使得：點 A_2 與圓心 O 位於直線 l 的同側，而 $\overline{AA_2} = r$。
2. 設 $\overline{OA_2}$ 的垂直平分線與直線 AA_2 相交於點 O_2。
3. 以點 O_2 為圓心且過點 A 的圓即為所求，此圓與圓 $O(r)$ 內切。

◆證明：

因為

$$\overline{O_2A} = \overline{O_2A_2} + \overline{AA_2} = \overline{O_2A_2} + r = \overline{O_2O} + r$$

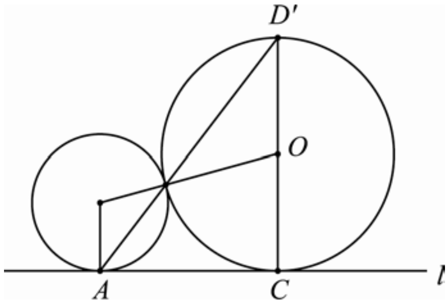
所以，以點 O_2 為圓心、$\overline{O_2A}$ 為半徑的圓必與直線 l 相切、且與圓 $O(r)$ 內切。

思考問題 13：

試證：若直線 l 與圓 $O(r)$ 不相交、點 A 在直線 l 上，則圓 X 過點 A 且與直線 l、圓 $O(r)$ 都相切的充要條件是：圓心 X 是過點 A 且垂直於直線 l 的直線與雙曲線 $\mathcal{H}$ $(A，O；r)$ 的一交點。

思考問題 14：

試證：直線 l 與圓 $O(r)$ 相切、點 A 在直線 l 上，則過點 A 且與直線 l、圓 $O(r)$ 都相切的圓共有一解。

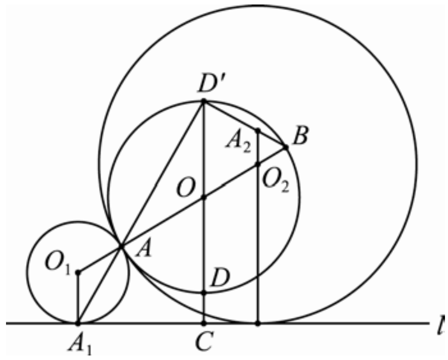


▲圖 19

三、直線 l 與圓 $O(r)$ 不相交、點 A 在圓 $O(r)$ 上、但點 A 不在圓心 O 至直線 l 的垂直線上。

◆作圖法：

設圓心 O 至直線 l 的垂直線與直線 l 交於點 C、又與圓 $O(r)$ 交於兩點 D 與 D'，並設 $\overline{CD} < \overline{CD'}$。假設點 A 在圓 $O(r)$ 上、但點 A 不在圓心 O 至直線 l 的垂直線上。



▲圖 20

第一組（與圓 $O(r)$ 外切的圓）：

1. 設直線 AD' 與直線 l 相交於點 A_1。
2. 過點 A_1 作直線 l 的垂直線，設此垂直線與直線 OA 相交於點 O_1。
3. 以點 O_1 為圓心且過點 A 的圓即為所求，此圓與圓 $O(r)$ 外切。

◆證明：

若一圓過點 A 且與圓 $O(r)$ 相切，則因點 A 在圓 $O(r)$ 上，所以，此圓與圓 $O(r)$ 相切於點 A。於是，其圓心在直線 OA 上。

因為△OAD' 與△O_1AA_1 是一對相似的三角形，而且 $\overline{OA} = \overline{OD'}$，所以，得 $\overline{O_1A} = \overline{O_1A_1}$。於是，以點 O_1 為圓心且過點 A 的圓與直線 l 相切於點 A_1 且與圓 $O(r)$ 外切於點 A。

第二組（與圓 $O(r)$ 內切的圓）：

1. 設直線 OA 與圓 $O(r)$ 的另一交點為點 B。
2. 在直線 BD' 上作一點 A_2，使得：點 A_2 至直線 l 的距離等於 $2r$，而且點 A_2 與與圓心 O 位於直線 l 的同側。
3. 過點 A_2 作直線 l 的垂直線，設此垂直線與直線 OA 相交於點 O_2。
4. 以點 O_2 為圓心且過點 A 的圓即為所求，此圓與圓 $O(r)$ 內切。

◆證明：

因為△OBD'與△O_2BA_2是一對相似的三角形，而且$\overline{OB}=\overline{OD'}$，所以，得$\overline{O_2B}=\overline{O_2A_2}$。進一步得

$$\overline{O_2A}=\overline{AB}-\overline{O_2B}=2r-\overline{O_2A_2}=\text{（點}O_2\text{至直線}l\text{的距離）}$$

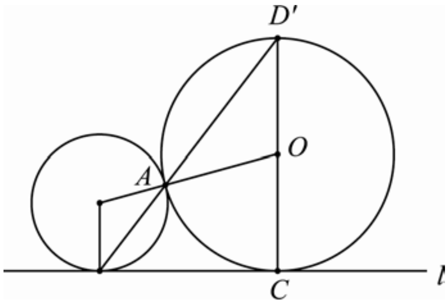
於是，以點O_2為圓心且過點A的圓與直線l相切且與圓$O(r)$內切於點A。

思考問題 15：

試證：若直線l與圓$O(r)$不相交、點A在圓$O(r)$上、但點A不在圓心O至直線l的垂直線上，則圓X過點A且與直線l、圓$O(r)$都相切的充要條件是：圓心X是直線OA與拋物線$\mathcal{P}(A;l)$的一交點。

思考問題 16：

試證：直線l與圓$O(r)$相切、點A在圓$O(r)$上，則過點A且與直線l、圓$O(r)$都相切的圓共有一解。



▲圖 21

在「點線圓」問題中，另一些值得討論的情形是直線l與圓$O(r)$相交於兩相異點，以及點A在圓$O(r)$內部。

有關「空間中兩歪斜線的距離與公垂線段的垂足坐標」的另一種解法

◎莊健祥／內湖高中

一、前言

在高二空間幾何的課程中，給定空間中的兩直線方程式，然後判別此兩直線的關係（重合、平行、相交一點或歪斜）是基本的題目，倘若此兩直線的關係是歪斜，則會進一步要求此兩歪斜線的距離，甚至求兩歪斜線公垂線段的垂足坐標。在一般的解題教學中，判別兩直線的關係及求兩歪斜線的公垂線段的垂足坐標皆是以兩直線的參數式為工具，並且會特別交代學生：若題目只求兩歪斜線的距離，卻未求公垂線段的垂足坐標時，盡量不要使用直線的參數式解題，原因是計算量大，因而容易出錯，取而代之的解法是：先求包含直線 L_1且平行另一直線 L_2的平面 E，然後在直線 L_2上任取一點 P，則 P 點到平面 E 的距離即為兩歪斜線 L_1及 L_2的距離。這樣的解法經過練習，學生的接受度其實也不錯，只是在解題的邏輯上會感到缺乏一點「連貫性」，故經過思考後，提供另一種較具邏輯一貫性且易計算的解法，與各位教學先進切磋。

二、解法

首先，設空間中兩直線分別為 L_1及 L_2，其方向向量分別為 $\overrightarrow{d_1}$ 及 $\overrightarrow{d_2}$ ；而點 A_1在直線 L_1上，點 A_2在直線 L_2上，若向量 $\overrightarrow{d_1}$ 和向量 $\overrightarrow{d_2}$ 不平行，則知直線 L_1及 L_2不是相交一點，就是歪斜，此時再計算三階行列式 $\begin{vmatrix} \overrightarrow{d_1} \\ \overrightarrow{d_2} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \end{vmatrix}$ 之值是否為 0，即可知直線 L_1及 L_2是相交一點，還是歪斜？

理由是三階行列式 $\begin{vmatrix} \overrightarrow{d_1} \\ \overrightarrow{d_2} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \end{vmatrix}$ 的絕對值代表三個向量 $\overrightarrow{d_1}$ 、 $\overrightarrow{d_2}$ 及 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 所張開的平行六面體的體積，若三階行列式 $\begin{vmatrix} \overrightarrow{d_1} \\ \overrightarrow{d_2} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \end{vmatrix}$ 之值為 0，則代表三個向量 $\overrightarrow{d_1}$ 、 $\overrightarrow{d_2}$ 及 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 共平面，同時若且唯若直線 L_1及 L_2會相交一點；反之，若三階行列式 $\begin{vmatrix} \overrightarrow{d_1} \\ \overrightarrow{d_2} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \end{vmatrix}$ 之值不為 0，則代表三個向量 $\overrightarrow{d_1}$ 、 $\overrightarrow{d_2}$ 及 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 不會共平面，同時若且唯若直線 L_1及 L_2會為歪斜。

其次，若直線 L_1及 L_2為歪斜，想要求兩歪斜線的距離 $d\,(L_1,L_2)$，則可利用 $d\,(L_1,L_2)$ $=\dfrac{V}{\left|\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\right|}$即得，其中$V=\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\end{matrix}\right\|$，理由是$\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\end{matrix}\right\|$代表三個向量 $\overrightarrow{d_1}$ 、 $\overrightarrow{d_2}$ 及 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 所張開的平行六面體的體積，而$\left|\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\right|$則代表向量 $\overrightarrow{d_1}$ 、 $\overrightarrow{d_2}$ 所張開的平行四邊形的面積，故$\dfrac{V}{\left|\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\right|}$即為平行六面體的高，亦為兩歪斜線的距離。

最後，若要求兩歪斜線公垂線段的垂足坐標，可將之設為 B_1及 B_2，其中點 B_1在直線 L_1上，點 B_2在直線 L_2上，顯然$\overrightarrow{A_1B_1}=t_1\overrightarrow{d_1}$ ， $\overrightarrow{A_2B_2}=t_2\overrightarrow{d_2}$ ，其中 t_1、$t_2\in\mathbb{R}$ ，然後，我們觀察到$\overrightarrow{A_1B_2}$在$\overrightarrow{d_1}$的正射影剛好等於$\overrightarrow{A_1B_1}=t_1\overrightarrow{d_1}$ ，因此射影係數

$$t_1=\frac{\overrightarrow{A_1B_2}\cdot\overrightarrow{d_1}}{\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1}}=\frac{(\overrightarrow{A_2B_2}-\overrightarrow{A_2A_1})\cdot\overrightarrow{d_1}}{\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1}}=\frac{t_2\,\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_1}-\overrightarrow{A_2A_1}\cdot\overrightarrow{d_1}}{\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1}}$$

$$\Rightarrow(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1})t_1=(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})t_2-\overrightarrow{A_2A_1}\cdot\overrightarrow{d_1}$$

$$\Rightarrow(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1})t_1-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})t_2=\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}\ \cdots(1)$$

同理，$\overrightarrow{A_2B_1}$在$\overrightarrow{d_2}$的正射影剛好等於$\overrightarrow{A_2B_2}=t_2\overrightarrow{d_2}$ ，因此射影係數

$$t_2=\frac{\overrightarrow{A_2B_1}\cdot\overrightarrow{d_2}}{\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}}=\frac{(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A_2})\cdot\overrightarrow{d_2}}{\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}}=\frac{t_1\,\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}-\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_2}}{\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}}$$

$$\Rightarrow(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2})t_2=(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})t_1-\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_2}$$

$$\Rightarrow(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_1})t_1-(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2})t_2=\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}\ \cdots(2)$$

由上述(1)及(2)可知：

實數 t_1及 t_2為二元一次方程組$\begin{cases}(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1})t_1-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})t_2=\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}\\(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_1})t_1-(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2})t_2=\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}\end{cases}$的解，亦即透過此二元一次方程組可解得實數 t_1及 t_2，然後再利用：$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OA_1}+t_1\overrightarrow{d_1}$ ，

以及$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{OA_2}+t_2\overrightarrow{d_2}$ ，其中 O 為原點，即可得兩歪斜線公垂線段的垂足坐標 B_1及 B_2。

現舉一例來說明上述的解法：

設空間中兩直線 L_1：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 及 L_2：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$，

(1) 試判別此兩直線的關係。

(2) 若此兩直線是歪斜，請求此兩歪斜線的距離及其公垂線段的垂足坐標。

<**解**> (1) 因直線 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{d_1}=(2,-2,1)$ 和 L_2 方向向量 $\overrightarrow{d_2}=(1,2,-1)$ 不成比例，亦即向量 $\overrightarrow{d_1}$ 和向量 $\overrightarrow{d_2}$ 不平行，故直線 L_1 及 L_2 不是相交一點，就是歪斜，而點 $A_1=(-1,3,0)$ 在 L_1 上，點 $A_2=(2,4,2)$ 在 L_2 上，則 $\overrightarrow{A_1A_2}=(3,1,2)$，今計算三階行列式

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=15\neq 0$$

故可知直線 L_1 及 L_2 為歪斜。

(2) 因 $\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}=(0,3,6)\Rightarrow\left|\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\right|=\sqrt{0^2+3^2+6^2}=3\sqrt{5}$，而 $V=\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\end{matrix}\right\|=15$，

故兩歪斜線的距離 $d(L_1,L_2)=\dfrac{15}{3\sqrt{5}}=\sqrt{5}$。

最後，要求兩歪斜線公垂線段的垂足坐標，將之設為 B_1 及 B_2，其中點 B_1 在直線 L_1 上，點 B_2 在直線 L_2 上，因 $\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1}=9,\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}=-3,\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}=6$，而 $\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_1}=-3,\ \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}=6,\ \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}=3$，故從二元一次方程組 $\begin{cases}9t_1-(-3)t_2=6\\ -3t_1-6t_2=3\end{cases}$ 解得 $t_1=1$，$t_2=-1$，則公垂線段的垂足坐標為

$$B_1=(-1,3,0)+1\cdot(2,-2,1)=(1,1,1)$$

$$B_2=(2,4,2)+(-1)\cdot(1,2,-1)=(1,2,3)$$

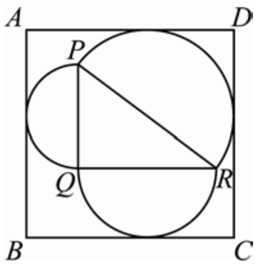
若計算 $\overline{B_1B_2}=\sqrt{5}$ 確實等於上述兩歪斜線的距離 $d(L_1,L_2)$。

三、結語

當給定空間中的一直線方程式時，其實只給了「一定點」及一「方向向量」兩個可供解題的條件，檢視上述的解法，可以發現：不管是判別兩直線的關係，或是求兩歪斜線的距離，甚至求兩歪斜線公垂線段的垂足坐標，均是以兩直線的方向向量 $\overrightarrow{d_1}$ 、 $\overrightarrow{d_2}$ 及兩直線上的定點形成的向量 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 為解題的工具，故此解法可說是「自然」且具「邏輯一貫性」，同時值得一提的是：即使在解兩歪斜線公垂線段的垂足坐標時，須解一較複雜的二元一次方程組，然而其係數亦是三個向量 $\overrightarrow{d_1}$ 、 $\overrightarrow{d_2}$ 及 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 自身及相互的內積，故對學生的學習而言，只要多練習幾次，應可駕輕就熟，並且得心應手；只是要教授此方法，可能得先教三階行列式的應用，或是等到高三三階行列式的應用教完後再行補充。

test 台北縣九十八學年度縣立高中職數學科競賽試題（填充卷）

一、如下圖，有一個直角三角形 PQR，直角在 Q 點，以其三邊為直徑作三個半圓。矩形 $ABCD$ 的各邊與半圓相切，且平行於 PQ 或 QR。



當 $\overline{PQ}=6, \overline{QR}=8$ 時，矩形 $ABCD$ 的面積為 ____________。

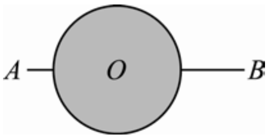
二、三角形 ABC 中，若 $\angle BAC=150°$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=2$，D 在線段 BC 上，且滿足 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$，則向量內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$ __________。

三、在密碼學中，人們將 26 個英文字母按順序分別對應整數 0 到 25（例如 A 對應 0，B 對應 1，C 對應 2，…，Z 對應 25）。

現有一個密碼單詞是由 4 個字母構成，此 4 個字母由左而右對應的數值分別為 x_1, x_2, x_3, x_4。若整數 $x_1+2x_2, 3x_2, x_3+2x_4, 3x_4$ 除以 26 的餘數分別為 9, 16, 23, 12，則該密碼的單詞是 __________。

四、若拋物線 $y=x^2+mx-3$ 與直線 $x-y-7=0$ 不相交，則實數 m 的範圍為＿＿＿＿＿。

五、A, B 兩地間有一半徑為 16 公尺的圓形池塘，O 為池塘的中心，且 A, O, B 在同一直線上，如下圖：



若 $\overline{AO}=32$，$\overline{BO}=16\sqrt{2}$，則在只能走陸地的情形下，由 A 走到 B 的最短路線長為＿＿＿＿＿。

六、化簡 $\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 100^\circ}-\dfrac{\sin 100^\circ}{\sin 20^\circ}=$＿＿＿＿＿。

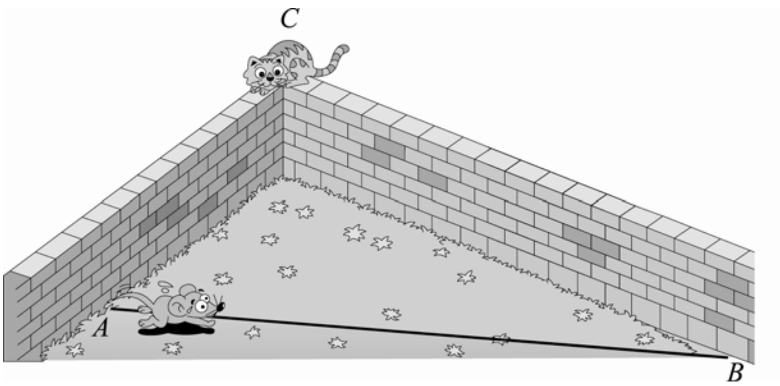
test 台北縣九十八學年度縣立高中職數學科競賽試題（計算、證明題卷）

一、 設$\langle a_n \rangle$為公差 1 的等差數列，且

$$a_1, a_1 + a_2, a_4 + a_5$$

構成等比數列。試求等差數列$\langle a_n \rangle$的前五項。

二、 長度分別為 15 與 20 公尺的兩面灰色圍牆立在地面上，他們的高度都是 5 公尺，而且互相垂直，如下圖所示：

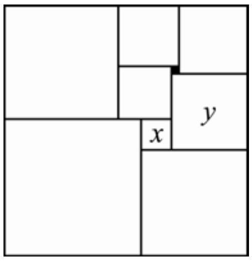


有一隻貓咪趴在兩牆相交的頂點 C 處，注視著從一牆的牆角 A 沿著直線跑到另一牆的牆角 B 之老鼠。

(1) 在整個注視的過程中，貓咪與老鼠的最近距離是幾公尺。

(2) 已知通過 A, B, C 三點的面與地面之夾角為 θ，求 $\sin\theta$ 的值。

三、 將九塊大小不等的正方形拼成一塊長方形，如下圖所示：



其中黑色正方形的邊長為 1，而 x 與 y 代表所在正方形的邊長。

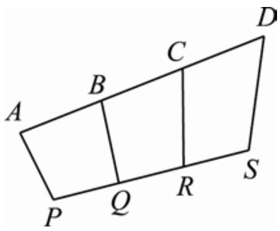
(1) 求 x 與 y 的值。

(2) 求長方形的長與寬。

四、 如下圖所示，已知

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD},\ \ \overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}$$

求證四邊形 $APQB$, $BQRC$, $CRSD$ 的面積構成等差數列。



台北縣九十八學年度縣立高中職數學科競賽試題

答案

填充卷參考答案

一	二	三
144	$-\frac{14}{3}-\sqrt{3}$	HOPE
四	五	六
$-3<m<5$	$16+16\sqrt{3}+\frac{20}{3}\pi$	-2

計算、證明卷參考答案

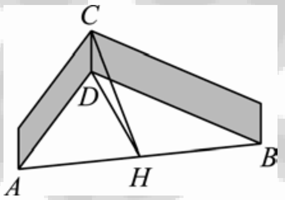
一	二(1)	二(2)
1, 2, 3, 4, 5 或 $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2}$	13	$\frac{5}{13}$
三(1)	三(2)	四
$x=4,\ y=10$	長＝32, 寬＝33	略

台北縣九十八學年度縣立高中職數學科

競賽試題（計算、證明題卷）詳解

一、 前五項為 1, 2, 3, 4, 5 或 $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2}$.

二、 從兩牆相交的底點 D 作 AB 的垂線 DH，連接 CH，如下圖所示：



(1) 因為直線 CD 與地面垂直，又直線 DH 與直線 AB 垂直，所以根據三垂線定理：CH 與 AB 亦垂直，即 C 與直線 AB 的最近點在 H，故線段 CH 的長度是貓咪與老鼠的最近距離。

現在來求線段 CH 的長度：由 $\angle ADB = 90°$ ，$\overline{AD} = 15$ ，$\overline{BD} = 20$ 及畢氏定理知

$$\overline{AB} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

又由直角三角形 ADB 的面積 $\frac{15\cdot 20}{2} = 150$ 等於

$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{DH}}{2} = \frac{25\cdot\overline{DH}}{2}$$

得 $\overline{DH} = 12$ 。

在直角三角形 CHD 中，因為 $\overline{DH} = 12$ ，$\overline{CD} = 5$ ，所以

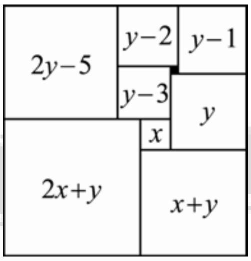
$$\overline{CH} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

故貓咪與老鼠的最近距離為 13 公尺。

(2) 由 $CH \perp AB$ 知道：通過 A, B, C 三點的面與地面之夾角 $\theta = \angle CHD$ 。故

$$\sin\theta = \sin\angle CHD = \frac{\overline{CD}}{\overline{CH}} = \frac{5}{13}.$$

三、 利用正方形的邊長，可推得



(1) 觀察這九個正方形的邊長，得

左側寬＝$(2y-5)+(2x+y)=2x+3y-5$

右側寬＝$(y-1)+y+(x+y)=x+3y-1$

下邊長＝$(2x+y)+(x+y)=3x+2y$

上邊長＝$(y-1)+(y-2)+(2y-5)=4y-8$

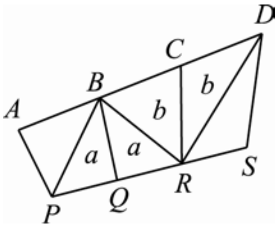
利用「左側寬＝右側寬」得 $2x+3y-5=x+3y-1$，即 $x=4$ ，再利用「下邊長＝上邊長」得 $3x+2y=4y-8$，即 $2y=3x+8=20$ 。故 $x=4$ ， $y=10$ 。

(2) 長方形的

長＝$3x+2y=3\cdot 4+2\cdot 10=32$

寬＝$2x+3y-5=2\cdot 4+3\cdot 10-5=33.$

四、 作如下的補助線，利用同底等高可以得到圖中面積分別為 a, a, b, b 的四個三角形：



同樣利用同底等高可以得到

$$\Delta APB = \Delta BPC = \frac{\Delta BPD}{2}$$
$$\Delta SDR = \Delta RDQ = \frac{\Delta RDP}{2}$$

將兩式相加，得

$$\Delta APB + \Delta SDR = \frac{\Delta BPD}{2} + \frac{\Delta RDP}{2} = \frac{\square BPRD}{2} = a + b$$

即

$$\square APQB + \square CRSD = 2\square BQRC$$

證得四邊形 $APQB, BQRC, CRSD$ 的面積構成等差數列。

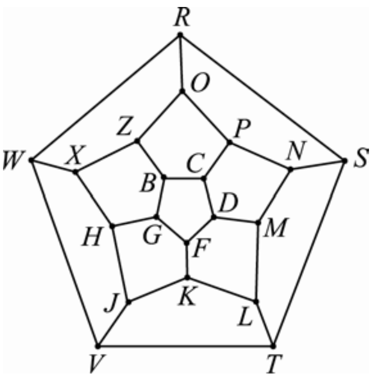
專欄 動手玩數學

◎許志農／台灣師範大學數學系

遊戲 45

☆☆

下圖是哈密頓的二十點棋盤，也就是說，有二十個城市，城市與城市之間用線段代表它們之間的路徑。是否可以找出一條路徑，剛好從某一個城市出發，在每個城市剛好經過一次的要求下，最後回到原來城市。



玩鎖・玩索

這是很有名的哈密頓二十點遊戲，多試幾次一定可以找到這樣的迴路。

遊戲 46

☆☆

喬家堡的鏢銀被放在純銅打造的長方體箱子內，這銅的厚度是一樣的，而且箱子外部的長、寬與高分別是 5，4 與 3 尺。為了預防劫鏢，將箱子設計成內部的體積與銅體的體積比例為 21:11，求打造箱子所使用的銅之厚度。

玩鎖・玩索

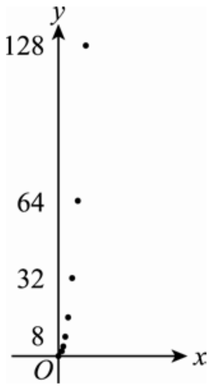
面積是長與寬相乘，而體積是長、寬與高三個量的乘積，所以利用未知數解題時，面積問題常常與二次多項方程式有關，體積問題卻和三次多項方程式扯上關係。因此，學會解高次多項式方程式

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

的根變成是重要的數學訓練。特別當係數 $a_n, \cdots, a_1, a_0$ 都是整數的情形。牛頓定理就告訴我們求解這類方程式的方法之一：若整係數一次式 $px - q$ 是 $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 的因式，則 $p \mid a_n$，$q \mid a_0$。

遊戲 47 ☆

麗山在數學課又發呆了，鴨子聽雷，有聽沒有懂，正感無聊之際，隨手拿出計算紙，摺起飛機。良禎老師看到，不但沒動怒，還隨機問麗山：「你可以將這張紙對摺多少次？」，麗山紅著臉摸摸頭，回答：「大概 20 次吧」。

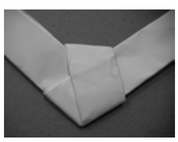


擅長摺紙遊戲的良禎老師又讓全班以自己手邊的紙張（計算紙、廣告紙、報紙或衛生紙都可以）動手實驗對摺，結果大多數只能七次或八次，當然今天的作業又多一題，回家想想原因，並試著解釋。為何對摺九次以上，這麼困難呢？你是不是也試試看，並想想其中原因。

玩鎖．玩索

摺紙與剪紙是中國最為流行的民間藝術，剪紙是一種藝術…捏泥成壺的巧手在拿捏；而摺紙是一門科學…對錯分明的數學所控制。

剪紙



摺紙

像對摺紙張這道遊戲就受限於指數函數的快速成長而無法對摺很多次，同時也讓我們想到一則波斯棋盤的故事。這個故事據說它發生在古波斯，但它也可能發生在印度甚或中國，總之是很久很久以前的故事。宰相發明一種在 8 × 8 棋盤上玩的新遊戲，國王非常高興，讓宰相提出他想要的獎賞。宰相對國王說，他是個謙遜的人，只想要一點普通的獎賞。他指著自己發明的棋盤上的格子說，希望能在第 1 個格子裡放一粒麥子，第 2 個格子增加一倍，第 3 個再增加一倍，直到所有的格子填滿。國王反對說，對這樣重要的一樁發明而言，這份獎品太寒酸了。他表示願意賞賜珠寶、舞姬、宮殿…但宰相拒絕了這些；他只想要一小堆麥子。國王暗暗對他的謙卑和節制感到驚奇，同意了他的請求。

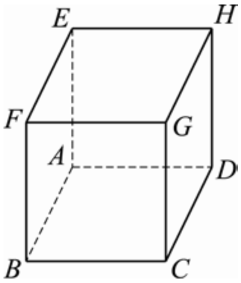
波斯的棋盤，by Patrick McDonnell

想想看，麗山情急之下的回答與國王爽快的犒賞是否一樣衝動呢？

設 *ABCD*−*EFGH* 是一個邊長為 1 的正立方體，如圖所示：

遊戲 48

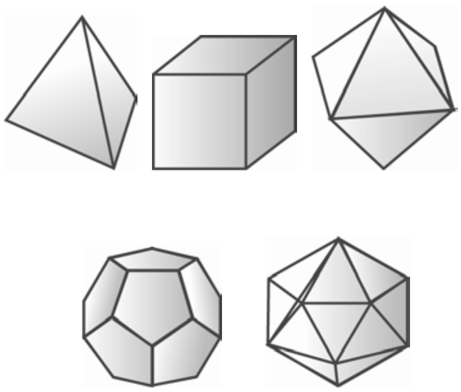
☆



在這正立方體的八個頂點 *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* 中選出四個頂點，使它們剛好構成正四面體的四個頂點，又這樣的選法有幾種？

玩鎖・玩索

正立方體是日常生活中經常碰到的立體圖形，它也是五種正方體中最常見的一種，其餘四種分別為正四面體，正八面體，正十二面體與正二十面體，其中正四面體與正立方體是考試經常使用的模型。



考試時，經常將教室或書房比擬成正立方體，身處教室作答或在書房思考的人，就如同處在正立方體內部的一點，看著整個正立方體一樣，這樣會幫助我們理解較困難的正立方體的立體幾何結構。同樣的，如果可以在正立方體模型內找到正四面體的線索，那麼也可以仿照同樣的方法思索正四面體的幾何結構。

正四面體的最重要幾何訊息便是它的四個面都是由正三角形所構成，即正四面體有六個邊，而且六邊的邊長都一樣。

動手玩數學~破解秘笈 第11期

遊戲 41

根據小茗的規律切割，可知黑點總數為

$$1+6(1+2+3+\cdots+(n-1))\ ,$$

整理，得

$$1+6\times\frac{n(n-1)}{2}=3n^2-3n+1\ .$$

遊戲 42

甲有必勝的策略，條件是一開始時在正中央的格子內寫 S 字：

	O		S			

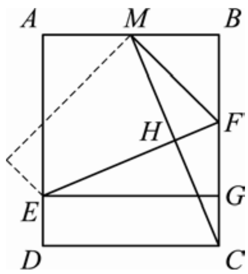
此時，乙只能在中央的左邊或右邊寫 S 或 O 的字，如上圖所示。第二輪時，若甲可以連成 SOS，則連之，若不能，則在最右邊寫上 S 字，如下圖所示：

	O		S			S

此時，乙無法連線成功，而且剩下四個空格。所以不是這次，要不然就是下次，乙非在第五或六格寫字不可，而且無論是寫 S 或 O，甲都可以完成 SOS 連線。故此七格的遊戲，甲有必勝的策略。

遊戲 43

對長方形作輔助線如下：



因為折線為 $\overline{EF}$，所以 $\overline{EF}$ 是線段 $\overline{CM}$ 的垂直平分線，並作水平線 $\overline{EG}$：

(1)利用直角三角形 CMB，得

$$\overline{CM}=\sqrt{\overline{MB}^2+\overline{BC}^2}$$
$$=\sqrt{120^2+288^2}=312\ .$$

(2)因為直角三角形 EFG 與直角三角形 CFH 相似，又直角三角形 CFH 與直角三角形 CMB 相似，所以直角三角形 EFG 與直角三角形 CMB 相似。利用相似比例，得

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{EG}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}}\ ,$$

即

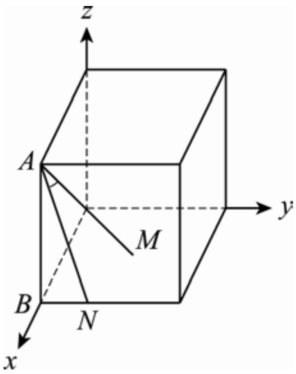
$$\frac{\overline{EF}}{240}=\frac{312}{288}\ ,$$

得

$$\overline{EF}=240\times\frac{312}{288}=260\ .$$

遊戲 44

如下圖所示 ，將邊長為 7 的正立方體擺放在空間坐標系中：



此時，$A(7,\ 0,\ 7)$，$M\left(\frac{7}{2},\ \frac{7}{2},\ 0\right)$，$N(7,\ 1,\ 0)$。因為

$\overline{AM}=\left(-\frac{7}{2},\ \frac{7}{2},\ -7\right)$，

$\overline{AN}=(0,\ 1,\ -7)$，

所以根據內積公式

$$\overline{AM}\cdot\overline{AN}=\left|\overline{AM}\right|\left|\overline{AN}\right|\cos\angle MAN$$

得

$$\left(-\frac{7}{2}\right)\times 0+\frac{7}{2}\times 1+(-7)\times(-7)=\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2+(-7)^2}\times\sqrt{0^2+1^2+(-7)^2}\times\cos\angle MAN\ ,$$

整理，得

$$\cos\angle MAN=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

解得 $\angle MAN=30^\circ$。