

許教授講故事

STORY

華容道... 關羽橫讓捉放曹操

◎許志農／台灣師範大學數學系

華容道、孔明棋和魔術方塊被喻為世界三大不可思議的益智遊戲，其中華容道是一道滑板遊戲，出自《三國演義》中「關羽橫讓捉放曹操」的情節。事實上，華容道是中國古代的一個地名，相傳當年曹操在赤壁之戰後曾經敗走此地。由於當時的華容道是一片沼澤，所以曹操大軍要割草填地，不少士兵更慘遭活埋，慘烈非常。

由於地理的變遷，到了明朝時，華容道已經由一個沼澤變成一片樹林。因此，當羅貫中撰寫《三國演義》時，亦根據當時的地理環境，寫關羽在樹林裡截擊曹操，但這件事其實並沒有歷史根據。

 1 華容道棋盤為橫四格縱五格的盤面，曹操是占四格的正方形棋子；占兩格的有五虎將的關羽、張飛、趙雲、馬超與黃忠，其中只有關羽是橫兩格，其餘四將均為豎兩格；還有四個各占一格的兵。（如下圖所示）



②

在遊戲時，只能利用盤面上留下的兩個空格來移動棋子，只要想办法將曹操移到鄰接曹營上方的正中央的位置，即表示我們已成功讓曹操逃回曹營，遊戲至此結束。可否僅透過滑板的移動，讓曹操回到曹營呢？

尋找最少的滑動步數讓曹操回到曹營，是華容道遊戲的另一種數學思維，在今日可以透過電腦的計算幫我們得到最少的滑動步數。這裡提供一種滑動的解法：

關羽左讓、兵3往下、再向左、兵4往下2格、曹操右逃1格、兵2向右、再往上、關羽上讓、兵3, 4各左移2格、曹操下逃、兵2, 1各右移2格、關羽上讓、兵3往上、再向右、張飛往上2格、馬超向左、兵4, 3各往下2格、曹操左逃1格、趙雲往上2格、黃忠右移1格、兵3向右、再往下、曹操下逃、兵1往下、再向左、兵2向左、再往下、關羽右讓、張飛, 馬超, 趙雲與黃忠分別上移1格、兵3向右、兵4向左、曹操下逃回曹營。

共計 48 步滑動。

在電腦還沒有普及與成熟之前，滑板遊戲都是用木頭做的方格來操作。現在可以用電腦動畫模擬，而且效果與方便性都不輸給實體的木頭。關於華容道遊戲的源頭有另一種說法，大陸的姜長英在他所著《科學思維鍛鍊與消遣》中說：「估計它的歷史不過有幾十年，從前人的筆記中沒有發現有華容道玩具的記載。」目前所見到關於華容道最早

的文字記載就是姜長英在 1949 年出版的
《科學消遣》。而且英國數學家哈代發明過
一道與華容道極為相似的滑板遊戲…三角
旗遊戲，在 1907 申請專利，1912 得到批准，
有人認為哈代的三角旗遊戲傳到中國，並加
上本土的故事，成為本土化的華容道遊戲。

③

華容道棋盤的陣式不只一種，本文介紹其中一
種—「左右布兵」陣式，你也可以試著自己佈
局，只要勇於接受挑戰，一定可以順利解救曹
操回曹營的。千萬不要輕易放棄！

隔19年過同一天陰陽曆生日的機率最高

陳淑娃／國立師大附中退休數學教師

很多人每年都過陰、陽曆兩次生日，但今年很多人只有一次生日，這情形正是陰、陽曆生日剛好是同一天，你是否也有想過以下這些問題：



1. 再隔幾年又會如此？
2. 是否有共同的周期？
3. 有否可能連星期數也一致？

基於好奇，參閱曆法相關書籍及萬年曆，加以對照研究並作結論，如下：



1. 最有可能是再隔 19 年，其次是 11 年。
2. 沒有，但隔 76 年的機率相當高。
3. 有，但沒有一致的周期。

譬如今年與 95 年前的公元 1914 年，共有 206 天，當陽曆日期相同時，陰曆日期及星期數也都一致。其實，在西元 1901~2099 年之間，間隔 84 或 95 年都有可能，譬如今年與 84 年前的西元 1925 也有 58 天是如此。但在西元 1643~1966 年之間，只要相隔 57 或 68 年即有可能，譬如相隔 57 年的西元 1898 及 1955 年有 81 天是如此；相隔 68 年的西元 1898 及 1966 年也有 118 天是如此。

這些依據與陰、陽曆的制定有關，請看以下的詳細說明。

自古以來，世界各地民用曆(civil calendar)的曆法大多依太陽、地球、月亮相互運轉的規律性來制定時間。根據地球繞太陽公轉的稱為陽曆(solar calendar)，月球繞地球運行的稱為陰曆(lunar calendar)。上述問題，**陽曆是指目前世界各地通用的格里曆(Gregorian Calendar)；陰曆則是現行中華民國農曆，是陰陽合曆。**

地球自轉一周所需的時間表示從地球上觀察太陽，它連續兩次升上天空某一參考點的時間長，叫做「一真太陽日」，隨季節變化而有些微差異，它們的**平均值**叫做「一平均太陽日」，**就是我們通常所說的 1 日，規定為 24(小)時，再定 1 時為 60 分，1 分為 60 秒。**

地球繞太陽公轉，從地球往上看，相對地太陽在天球上繞一圓形軌道，叫做黃道(Ecliptic)；地球繞太陽一周與太陽繞黃道一周，所需的時間相同。地球赤道所在的平面無限延伸與黃道約成 23.5 度角，在天球與黃道交於春、秋分兩點；若黃道一周是 360 度，四等分點按逆時針方向排列，則依序為春分、夏至、秋分、冬至。太陽連續兩次通過同一四等分點所經歷的時間，稱為季節年或**回歸年(tropical year)**。**格里曆的年是太陽由春分點回到春分點的時間長，我國的歲實(簡稱歲)是太陽由冬至點回到冬至點的時間長，都是回歸年。**四個回歸年有微小差距，平均值為 365.2421912 日，約為 365.2422 日，即 365 日 5 時 48 分 46 秒。($0.2422 \times 24 = 5.8128$, $60 \times 0.8128 = 48.768$, $60 \times 0.768 = 46.08$) 西元 1956 年國際天文聯盟訂此為標準年長，此後即三不五時的用閏秒來調整，使它維持不變。

※ 陽曆的制定簡史

格里曆是羅馬天主教廷的教皇格里 13 世 (Gregory the 13th) 於西元 1582 年，修正儒略凱撒 (Julius Caesar) 的儒略曆 (Julius Calendar) 所得的，而該曆則採用古埃及人的恆星年 (sidereal year 為太陽連續兩次通過某一恆星所經歷的時間，平均值為 365.25636 日)。儒略曆在西元前 45 年實施時，規定一平年 (origin year) 為 365 日，有 12 個月 (與月亮無關)，並依傳統定春分點為 3 月 25 日，又規定每四年閏 1 次，一閏年 (leap year) 為 366 日，故儒略曆的年為 365 又 $\frac{1}{4}$ 日，即 365.250 日 (因改曆的關係，西元前 45 年有 445 日是例外)。凱撒的繼承人屋大維修訂時，定 1、3、5、7、8、10、12 等月為大月，各為 31 日；4、6、9、11 等月為小月，各為 30 日；2 月為 28 日，閏年時多 1 日。西元 325 年時，教會改春分點為 3 月 21 日 (訂該日以後月圓的第一個星期日為復活節)，因而格里曆就形同是一回歸年了；一回歸年比一平年多 0.2422 日，並非 0.25 日，時間一久誤差就大了。

數量雖小，但積少成多的道理誰都知道，不可忽略；當然，若相較之下，太小了還是可以不計的。因 $0.2422 \times 4 = 0.9688$ ， $\dots$ ， $0.2422 \times 100 = 24.22$ ， $\dots$ ， $0.2422 \times 400 = 96.88$ ， $\dots$ 得知 4 歲實比 4 平年多約 1 日， $\dots$ ，100 歲實比 100 平年多約 24 日， $\dots$ ，400 歲實比 400 平年多約 97 日， $\dots$ ，因而教皇格里 13 世在西元 1582 年修定時，將 10 月 5 日改為 10 月 15 日，以消除累積的誤差；並規定從 17 世紀起，每一世紀閏 24 次，每四世紀閏 97 次，故格里曆的年有 365 又 $\frac{97}{400}$ 日，即 365.2425 日，計算閏年的方式是：凡西元年數是能被 4 整除的及能被 100 整除又能被 400 整除的都是閏年，在 2 月多一閏日，有 29 日，如 1584, 1600, 2000 等；否則為平年，如 1583, 1586, 1700 等。所以陽曆的一年比回歸年多 0.0003 日，因 $\frac{1}{0.0003} = 3333.333\dots$ ，知大約三千多年就會差 1 日；當然，那是二千九百多年以後，五十世紀初期的事，不過這可與我們的問題有關。

因教派爭鬥，歐美各國直到十八世紀後才陸續施行此曆；中華民國於元年 (西元 1912 年) 1 月 1 日正式採用為國曆，因而民國 a 年等於西元 $(1911 + a)$ 年，民前 b 年等於西元 $(1912 - b)$ 年。此後幾乎全世界通用，故西元又稱為公元。

※ 陰曆的制定簡史

陰曆將月亮繞地球一周的朔望月 (synodic month) 定為一月，就是我們從地球上看到月亮，由朔 (新月 new moon)，經望 (滿月 full moon)，再到朔的時間長；這也是不固定的，平均值約為 29.530588 日，若取近似值為 29.5306 日，則不變。

中華民國農曆沿襲自清康熙九年 (西元 1670 年) 重新推行的時憲曆；時憲曆曾於清順治二年 (西元 1645 年) 頒行，是湯若望等人制定，承自明崇禎時，徐光啓參考西洋數學所編的新法曆，這新法曆是修正自之前的大統曆；大統曆又是改自先前的授時曆， $\dots$ ，溯本究源，乃出自於最早的夏曆或稱農曆。(西漢開始又以天干搭配地支，來給年、月、日、時辰命名，因而一個人出生的年、月、日及時辰，就叫做其生辰八字。)

中國人又以冬至到大雪等 24 節氣分布於一歲實，來反應季節、氣候、農物成長的變化，就是以節氣點指出太陽在黃道的位置，24 節氣點等分黃道一周，兩節氣點相隔 15 度。這 24 節

氣為立春、雨水、驚蟄、春分、清明、穀雨、立夏、小滿、芒種、夏至、小暑、大暑、立秋、處暑、白露、秋分、寒露、霜降、立冬、小雪、大雪、冬至、小寒、大寒；其中奇數的叫做節氣或簡稱節，偶數的叫做中氣或簡稱氣。（據查我國古時的歲實是 365.250 日；南北朝大數學家祖沖之曾於西元 463 年測得 365.2428 日編成大明曆，可惜僅在西元 510~589 年間推行，之後都是 365.244... 日；到西元 1280 年，元朝頒行郭守敬編的授時曆為 365.2425 日，與格里曆相同；清康熙時憲曆採用丹麥天文學家第谷 (Brahe Tycho 1546~1601) 測定的 365.2421875 日；雍正於西元 1723 年改採牛頓 (Issac Newton 1642~1727) 測定的 365.24233442 日修成癸卯曆；民國後則是 365.24219 日。因此，一歲實我以 365.2422 日來計算。)

中國的農曆規定一年有 12 個月（以 12 個中氣依次作為月的標誌，正月含雨水，二月含春分，…，十一月含冬至，十二月含大寒），大月為 30 日，小月為 29 日；又規定每 2 或 3 年有一閏月（通常說閏月，而不說閏年），每 5 或 6 年有二閏月，…，每 19 年必有七閏月，即一年可能有 13 個月，其中若有哪個月不含中氣（若 12 個中氣等分一歲實，兩中氣間隔為 $365.2422/12 = 30.43685$ ，比一個月 29.5306 長得多，時間久了總有機會一個月剛好夾在兩中氣之間），該月就是閏月（秦及漢武帝太初前除外），不以干支命名。

若一年有 12 個月，因 $29.5306 \times 12 = 354.3672$ ，則一年為 354 或 355 日；若一年有 13 個月，因 $29.5306 \times 13 = 383.8978$ ，則為 383 或 384 日。時憲曆之前的農曆，24 節氣平均分布於一歲實，冬至一定要在陰曆 11 月，因此自古以來，閏月大致上分布均勻。但地球運行的速度，到冬至附近的近日點時最快，到夏至附近的遠日點時最慢，因而太陽轉 30 度黃道的時間，前者只要 29 日，後者則須 32 日。時憲曆改按太陽實際位置來定節氣的日期後，冬至、大寒、雨水三中氣之間隔為 29~30 日，陰曆 11、12、1 月必定含有中氣，從此這三個月就不再有閏月，而閏 3、4、5、6、7 月就較頻繁了。也就是說，西元 1645 年以前與之後的閏月方式是不一樣的，因時憲曆在康熙初年並未施行，所以我們的問題應是自西元 1670 年到公元五十世紀初，共三千多年間才有意義。

※ 為何每 19 年有七閏月？

一歲實比有 12 個（朔望）月的年多約 11 日，因 $365.2422 - 29.5306 \times 12 = 10.875$ 。用乘法運算將歲實與有 12 個月的年，逐年累積的差距日數與累積月的日數，列表作比較如下：

表一、歲實與有 12 個（朔望）月的年，經 n 年後的差距日數 $n \times 10.875$ ：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	10.875	21.75	32.625	43.5	54.375	65.25	76.125	87	97.875	108.75
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	119.625	130.5	141.375	152.25	163.125	174	184.875	195.75	206.625	217.5

表二、 m 個（朔望）月共有日數 $m \times 29.5306$ ：

m	1	2	3	4	5	6	7	8
	29.5306	59.0612	88.5918	118.1224	147.653	177.1836	206.7142	236.2448

觀察兩表中， $n \times 10.875$ 與 $m \times 29.5306$ 較接近的數據，它們顯示歲實與 12 個(朔望)月的年，累計多年的差距為：每 3 年多於一(朔望)月，每 5 年接近二(朔望)月，每 8 年約三(朔望)月，每 11 年約四(朔望)月，…，每 19 年幾乎就是七(朔望)月。與自然現象約每 2 或 3 歲實有 $12 \times 3 + 1 = 37$ 次滿月，每 5 或 6 歲實有 $12 \times 5 + 2 = 62$ 次滿月，…，每 19 歲實有 $12 \times 19 + 7 = 235$ 次滿月吻合。這就是陰曆規定閏月的規則：**每 2 或 3 年有一閏月，每 5 或 6 年有二閏月，每 8 年有三閏月，每 11 年有四閏月，每 19 年必有七閏月。**

1) 當每 3 年有一閏月時，因 $29.5306 \times (12 \times 3 + 1) - 365.2422 \times 3 = -3.0944$

知 3 年少 3 歲實約 3 日，而 $3 / -3.0944 = -0.96949$ ，相當於每 1 年少約 1 日，不好。

2) 當每 5 年有二閏月時，因 $29.5306 \times (12 \times 5 + 2) - 365.2422 \times 5 = 4.6862$

知 5 年多 5 歲實約 5 日，而 $5 / 4.6862 = 1.06696$ ，相當於每 1 年多約 1 日，也不好。

3) 當每 8 年有三閏月時，因 $29.5306 \times (12 \times 8 + 3) - 365.2422 \times 8 = 1.5918$

知 8 年多 8 歲實約 1 日到 2 日，而 $8 / 1.5918 = 5.0258$ ，相當於每 5 年多約 1 日，比起每 5 或 6 年有二閏月好得多。

4) 當每 11 年有四閏月時，由 $29.5306 \times (12 \times 11 + 4) - 365.2422 \times 11 = -1.5026$

知 11 年少 11 歲實約 1 日到 2 日，而 $11 / -1.5026 = -7.3206$ ，相當於每 7 年少 1 日，比起每 8 年有三閏月又強得多。

5) 當每 19 年有七閏月時， $29.5306 \times (12 \times 19 + 7) - 365.2422 \times 19 = 0.0892 (= 1.5918 - 1.5026)$

知 $19 (= 8 + 11)$ 年多 19 歲實僅約 0.0892 日(= 2 時 8 分 27 秒)，又 $19 / 0.0892 = 213.00$ ，相當於每 213 年才會超前歲實 1 日，比前兩者更加精密，剛好將先前 8 年與接下來的 11 年的差距一併給抵消了。

若不計較這小誤差，則陰曆就近似地每隔 19 年有一循環，由 $213 \times 29.5306 = 6290.0178$ ，知大約六千多年才可能相差一個(朔望)月。

我國的農曆製作，除以節氣反應季節、氣候、農物成長的變化外，為合乎天行法則，幾千年來不但利用閏月，又以日、月食來補證月的虧盈，日食必發生在朔、月食必在望，藉此調整月的大小。自漢朝以來，只要發現不合，必定改曆，歷朝甚至歷皇幾乎都有修曆，與歲實的誤差隨時都在修正，西元 2006 年的農曆尚有 385 天的情形出現。

至於每 19 年間七個閏月出現在哪些年？據查從西元 1645 年到 1664 年，閏月所在的各年，年距為 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3，也就是西元 1645 年閏 6 月小後，接下來的第三(1648)、五(1650)、八(1653)、十一(1656)、十四(1659)、十六(1661)、十九(1664)各年有閏月；此後，閏月有出現在接下來的第三、六、八、十一、十四、十六、十九年(西元 1664~1778、1816~1873 與 1968~1987，各年距為 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3)；或在接下來的第三、六、八、十一、十四、十七、十九年(西元 1778~1816、1873~1968 與 1987~2044，各年距為 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2)。

※ 現在來看我們的問題

在簡單的介紹後，再重申一次，今後若陰、陽曆不做大幅度改變，自西元 1670 年到公元五十世紀初期共三千多年間，我們的問題才有意義，因這段時間與之前陰曆閏月的規定互異，自然就無重複可能，而公元五十世紀，陽曆將較歲實多一日。

若考慮陽曆為每年一循環，陰曆為每 19 年一循環，當某天陽曆是 a 月 b 日而陰曆是 c 月 d 日，則每隔 19 年就會有某天陽曆是 a 月 b 日而陰曆也是 c 月 d 日的情況，也就是說：某人每隔 19 年，陽、陰曆生日重合的機率應相當高（見下表四）。但陽曆每 4 年有一閏日，11 年只閏 2 日，而 $0.2422 \times 11 = 2.6642$ ，比 11 個歲實少約 1 日；陰曆因每 11 年有四閏月，比實際也少約 1 日到 2 日，所以也有可能隔 11 年就有此情況，但這樣的機率較小（見下表三、四）；同樣，也有可能隔 8 年，或 $27(=19+8)$ 年，或 $30(=19+11)$ 年，或 $46(=19 \times 2 + 8)$ 年，…，都有這種情況，但這樣的機率更低了（礙於篇幅不列表）。

表三、西元 1976（陽曆 1976/1/31~1977/2/17 共 384 日）及 1987（陽曆 1987/1/29~1988/2/16 共 384 日）兩陰曆年中，各月初一的陽曆日期：

	1	2	3	4	5	6	閏 6	7	8	閏 8	9	10	11	12
1976	1/31	3/1	3/31	4/29	5/29	6/27		7/27	8/25	9/24	10/23	11/21	12/21	1/19
1987	1/29	2/28	3/29	4/28	5/27	6/26	7/26	8/24	9/23		10/23	11/21	12/21	1/19

相隔 11 年的西元 1976 及 1987，一年中有 118 天，當陽曆日期相同時，陰曆日期也相同。

表四、西元 1914（陽曆 1914/1/26~1915/2/13 共 384 日），1925（陽曆 1925/1/24~1926/2/12 共 385 日），1990（陽曆 1990/1/27~1991/2/14 共 384 日）及 2009（陽曆 2009/1/26~2010/2/13 共 384 日）的各陰曆年中，各月初一的陽曆日期及星期數：

	1	2	3	4	閏 4	5	閏 5	6	7	8	9	10	11	12
1914	1/26 一	2/25 三	3/27 五	4/25 六		5/25 一	6/23 二	7/23 四	8/21 五	9/20 日	10/19 一	11/17 二	12/17 四	1/15 五
1925	1/24 六	2/23 一	3/24 二	4/23 四	5/22 五	6/21 日		7/21 二	8/19 三	9/18 五	10/18 日	11/16 一	12/16 三	1/14 四
1990	1/27 六	2/25 日	3/27 二	4/25 三		5/24 四	6/23 六	7/22 日	8/20 一	9/19 三	10/18 四	11/17 六	12/17 一	1/16 三
2009	1/26 一	2/25 三	3/27 五	4/25 六		5/24 日	6/23 二	7/22 三	8/20 四	9/19 六	10/18 日	11/17 二	12/16 三	1/15 五

- 1) 相隔 19 年的西元 2009 及 1990 年，一年之中有 295 天，當陽曆日期相同時，陰曆日期也相同；但相隔 11 年的西元 1914 及 1925 年，當陽曆日期相同時，陰曆日期卻都不同。
- 2) 相隔 95 年的西元 2009 及 1914 年，一年之中有 206 天，當陽曆的日期相同時，陰曆日期及星期數也都相同。而此狀況發生在相隔 **84** 年的西元 2009 及 1925 年，一年之中則僅有 **58** 天。

表五、西元 1898 (陽曆 1898/1/22~1899/2/9 共 384 日), 1955 (陽曆 1955/1/24~1956/2/11 共 384 日) 及 1966 (陽曆 1966/1/21~1967/2/8 共 384 日) 的各陰曆年中, 各月初一的陽曆日期及星期數:

	1	2	3	閏 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1898	1/22 六	2/21 一	3/22 二	4/21 四	5/20 五	6/19 日	7/19 二	8/17 三	9/16 五	10/15 六	11/14 一	12/13 二	1/12 四
1955	1/24 一	2/22 二	3/24 四	4/22 五	5/22 日	6/20 一	7/19 二	8/18 四	9/16 五	10/16 日	11/14 一	12/14 三	1/13 五
1966	1/21 五	2/20 日	3/22 二	4/21 四	5/20 五	6/19 日	7/18 一	8/16 二	9/15 四	10/14 五	11/12 六	12/12 一	1/11 三

相隔 57 年的西元 1898 及 1955 年, 在 384 天的一年中有 81 天, 當陽曆日期相同時, 陰曆日期及星期數也都相同; 而相隔 68 年的西元 1898 及 1966 年, 在一年中有 118 天, 當陽曆日期相同時, 陰曆日期及星期數也都相同。

實際上, 陽曆是 400 年一循環, 陰曆是 19 年為一循環, 共同的周期是 $400 \times 19 = 7600$ 年, 這可超出誤差的允許範圍 3333 年, 因此問題 2 及 3 的答案都是否定的。不過, 若將陽曆看做 4 年一循環, 陰曆看做 19 年為一循環, 則問題 2 的周期可為 $4 \times 19 = 76$ 年。但是, 陰曆並非完全地以 19 年為一循環 (倘若如此, 則每 19 年閏的月份也該是循環一致的, 而參閱萬年曆, 每 19 年閏的月份皆不盡相同), 故這無絕對性。

若陽曆生日是閏日 2/29, 幾乎每隔 4 年出現一次。因 19 不能被 4 整除, 當某人某年過陽曆 2/29 生日, 19 年後並不是閏年, 故沒有陽曆生日; 從 4 的倍數來看, 須隔 $68 (= 19 \times 3 + 11)$ 、或 $76 (= 19 \times 4)$ 年、或 $84 (= 19 \times 4 + 8)$ 年、..., 才有可能碰到相同的陰曆生日, 其中間隔 76 年的, 發生的機率來得高 (見下表六)。

表六、閏日 2/29 的陰曆日期:

西元 1645 到 2044 年共 400 年間, 97 個閏日 2/29 中, 有相同陰曆日期的各年 (西元 2000 年之前的, 僅列百、十及個位數, 年旁為星期數), 無相同者省略。

陰曆	西 元 年	陰曆	西 元 年	陰曆	西 元 年	陰曆	西 元 年
1/10	852 日, 920 日	1/17	744 六, 812 六 896 六, 964 六	1/24	856 五, 932 一	2/3	664 五, 740 一 884 五, 960 一 2036 五
1/11	776 四, 996 四	1/18	668 三, 736 三 888 三, 956 三 2040 三	1/25	704 五, 780 二 848 二, 924 五 2000 二	2/4	732 五, 808 一
1/12	768 一, 844 四 912 四	1/19	660 日, 804 三 2032 日	1/26	772 六, 992 六	2/5	656 二, 876 二 952 五, 2028 二
1/13	692 五, 760 五 836 一, 988 一	1/20	652 四, 728 日 880 日, 948 日 2024 四	1/27	696 三, 840 六 916 二	2/6	724 二, 944 二

1/14	904 一, 980 五	1/21	796 一, 872 四	1/28	688 日, 764 三 832 三, 908 六 984 三	2/7	648 六, 716 六 868 六, 936 六 2020 六
1/15	752 二, 828 五 1972 二	1/22	720 四, 864 一 940 四, 2016 一	1/30	680 四, 756 日 824 日, 976 日	2/8	792 三, 860 三 2012 三
1/16	676 六, 820 二	1/23	712 一, 788 五 2008 五	2/2	672 一, 748 四 816 四, 892 一 968 四	2/9	708 三, 784 日

有相同陰曆日期的閏日 2/29，間隔 68 年的有 15 次，隔 76 年的有 29 次，隔 $84(=76+8)$ 年的有 3 次，隔 $144(=76+68)$ 年的有 6 次，隔 $152(=76\times 2)$ 年的有 6 次，隔 $220(=19\times 11+11)$ 年的有 5 次，隔 $228(=76\times 3)$ 年的有 1 次。

◎ 問題 1 的答案：

- 1) 陽曆生日為非閏日 2/29 的一般日期：每隔 19 年最有可能陰、陽曆生日是同一天發生，其次是 11 年；其他如隔 8、27、30、46…年，也都有可能發生。
- 2) 陽曆生日為閏日 2/29：須隔 68、76、84…年，才可能碰到相同的陰曆生日。

◎ 問題 2 的答案：

陰、陽曆生日重合，沒有共同的周期，但周期為 $4\times 19=76$ 年的機率最高。

※ 陽、陰曆的生日及其星期數皆重複的可能性

處理三種因素的關係，必須先考慮其中兩個；因前面所得問題 1、2 的結論過於瑣碎，再加一因素進來，將複雜無比。我們換個觀點，從慣用的時間格式，譬如公元 2009 年 2 月 14 日星期六，考量陽曆生日與其星期數的重複性，再結合前面的結論，來找出可能情況。

陽曆一星期有 7 日，而 7 與 365 及 366 都是互質，且 365 除以 7 餘 1，366 除以 7 餘 2。陽曆生日若經歷一平年，則其星期數加 1；若經歷一閏年，則其星期數加 2；當和是 7 的整數倍時，表示週而復始，星期數重複。必須仿問題 1、2，分非閏日與閏日兩種來討論。

一、非陽曆閏日 2/29 的一般日期：

本來以為陽曆每 4 年循環一次，星期數多出 $1\times 3+2=5$ ，但 5 與 7 是互質，至少 $5\times 7=35$ 日，才夠令星期數重複，因而認定 28 年為一周期；但列表實際計算，發現其星期數的重複竟然與 5, 6, 11, 6 作成的數列 $\langle \dots, 5, 6, 11, 6, 5, 6, 11, 6, 5, 6, 11, 6, \dots \rangle$ 息息相關。

I、歷經每 4 年有一閏日不間斷的各年間，譬如在西元 1583~1699 或 1901~2099。

	...	#	-	-	-	#	-	-	-	#	-	-	-	#	-	-	-	#	-	-	...
年	...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	...

(以 # 表示閏年，- 表示平年，A, B, C, ... 表示緊接的西元年)

1. 生日是 1/1~2/28 的某一天：

其星期數的逐年累加數變化如下表，當累加大於或等於 7 時，就減 7。

年	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
累加數	0	2	1	1	1	2	0	1	1	1	2	1	1	2	1
累加和	0	2	3	4	5	0	0	1	2	3	5	6	0	0	1

由上表知：以 A 年為起點，在相隔 5 年的 F 年，星期數就重複。以 B 年為起點，則在相隔 6 年的 H 年；以 C 年為起點，在相隔 6 年的 I 年；以 D 年為起點，須在相隔 11 年後的 O 年；星期數才重複。

- 1) 若生日是 A 年 1/1~2/28 的某一天，則經 5 年到 F 年重複星期數；再類似 B 到 H，經 6 年到 L 年、又經 11 年（似 D 到 O）、後經 6 年（似 C 到 I）都重複星期數，以後就以年距為 5、6、11、6 的循環，重複星期數。如…，1912, 1917, 1923, 1934, 1940, 1945, 1951, 1962, 1968, …，這些公元年的陽曆 2/18 都是星期日。
- 2) 若生日是 B 年 1/1~2/28 的某一天，則經 6 年到 H 年，再經 11 年到 S（似 D 到 O）、又經 6 年（似 C 到 I）、後經 5 年（似 A 到 F）都重複星期數，以後就以年距為 6、11、6、5 的循環，重複星期數。如…，1949, 1955, 1966, 1972, 1977, 1983, 1994, 2000, 2005, …，這些公元年的陽曆 2/1 都是星期二。
- 3) 若生日是 C 或 D 年 1/1~2/28 的某一天時，則各以年距為 6、5、6、11 或 11、6、5、6 的循環，重複星期數。

2. 生日是 3/1~12/31 的某一天：

年	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
累加數	0	1	1	1	2	1	1	0	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1	0	2	1	1	1	2
累加和	0	1	2	3	5	6	0	0	1	2	4	5	6	0	0	1	3	4	5	6	1	2	3	4	6	0

由上表知：以 A 年為起點，在相隔 6 年的 G 年，星期數就重複。以 B 年為起點，在相隔 6 年的 H 年；以 C 年為起點，在相隔 11 年的 N 年；以 D 年為起點，在相隔 5 年的 I 年；星期數才重複。

- 1) 若生日是 A 年 3/1~12/31 的某一天，則經 6 年到 G 年，再經 11 年到 R（似 C 到 N）、又經 6 年（似 B 到 H）、後經 5 年（似 D 到 I）都重複星期數，以後就以年距為 6、11、6、5 的循環重複星期數。如…，1956, 1962, 1973, 1979, 1984, 1990, 2001, 2007, 2012, …，這些公元年的陽曆 8/20 都是星期一。
- 2) 若生日是 B 年 3/1~12/31 的某一天，則以年距為 6、5、6、11 的循環，重複星期數。如…，1925, 1931, 1936, 1942, 1953, 1959, 1964, 1970, 1981, …，這些公元年的陽曆 7/1 都是星期三。
- 3) 若生日是 C 或 D 年 3/1~12/31 的某一天，則各以年距為 11、6、5、6 及 5、6、11、6 的循環，重複星期數。

由上面討論知：陽曆生日歷經 4 年一閏不間斷的各年間，如在西元 1583~1699 或 1901~2099 年，其星期數重複的共同大周期是 $5+6+11+6=28$ 年，小周期可算是 $5+6=11$ 年或 $6+11=17$ 年。

II、歷經不能被 400 整除的 100 倍數平年，即下表中 I 年（如平年 1900 年）：

	...	#	—	—	—	#	—	—	—	—	—	—	#	—	—	—	#	—	—	—	#	...	
年	...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	...

- 1) 若生日是 A 年 1/1~2/28 的某一天時，則隔 5 年到 F 年，再隔 7 平年到 M 年，星期數都重複；若生日是 E 年 1/1~2/28 的某一天時，則隔 6 年到 K 年，再隔 6 年到 Q 年，星期數都重複， $5+7=6+6=12$ ；以後再以年距為 5、6、11、6 的循環，重複星期數。前者如...，1892, 1897, 1904, 1909, 1915, 1926, 1932, ...，這些年的陽曆 2/1 都是星期一。後者如...，1896, 1902, 1908, 1913, 1919, 1930, 1936, ...，這些年的陽曆 2/1 都是星期六。

若生日是 A 年 3/1~12/31 的某一天時，則隔 6 年到 G 年，再隔 6 年到 M 年，星期數都重複；若生日是在 E 年 3/1~12/31 的某一天時，則隔 7 平年到 L 年，再隔 5 年到 Q 年，星期數都重複， $6+6=5+7=12$ ；以後兩者再以年距為 6、11、6、5 的循環，重複星期數。前者如...，1892, 1898, 1904, 1910, 1921, 1927, 1932, ...，這些年的陽曆 8/8 都是星期一。後者如...，1896, 1903, 1908, 1914, 1925, 1931, 1936, ...，這些年的陽曆 8/8 都是星期六。

- 2) 若生日是在 B 年 1/1~2/28，則隔 6 年到 H 年，再隔 6 年到 N 年，星期數都重複；再以年距為 6、11、6、5 的循環，重複星期數；如西元...，1893, 1899, 1905, 1911, 1922, 1928, 1933, ... 的陽曆 2/1 都是星期三。若在 F 年 1/1~2/28，則與在 A 年 1/1~2/28 情形相同，但可視為隔 7 年到 M 年，再隔 5 年到 R 年， $6+6=7+5=12$ ；以後再以年距為 6、11、6、5 的循環，重複星期數；如西元...，1897, 1904, 1909, 1915, 1926, 1932, 1937, ... 的陽曆 2/1 都是星期一。

若生日是在 B 年 3/1~12/31，則隔 6 年到 H 年，再隔 6 年到 N 年，星期數都重複；若在 F 年 3/1~12/31，則隔 12 到 R 年，星期數才重複， $6+6=12$ ；以後兩者再以年距為 6、5、6、11 的循環，重複星期數。前者如西元...，1893, 1899, 1905, 1911, 1916, 1922, 1933, ... 的陽曆 8/8 都是星期二。後者如西元...，1869, 1875, 1880, 1886, 1897, 1909, 1915, 1920, 1926, 1937, ... 的陽曆 8/8 都是星期日。

- 3) 其餘，生日在 C 、 D 、 G 、 H 或 A 之前等其他各年的情形類推，不再贅述。

由以上討論得知，非陽曆生日與其星期數的重複情況，顯然與 28 年、12 年相關，其他如 11、17、5、6 等年也有可能。

二、陽曆閏日 2/29：

I、歷經每四年有此一閏日不間斷的各年間，因經歷每 3 個平年與 1 閏年，星期數加 $3+2=5$ ，須累計 7 次閏年，即須隔 $(3+1) \times 7 = 28$ 年，星期數才重複。

II、歷經不能被 400 整除的 100 倍數平年，這閏日 2/29 須隔 8 年才出現，因經歷 7 個平年到此日，星期數加 2；須要再過 4 年，星期數再加 $5(=3+2)$ ，共加 $2+3+2=7$ ，才週而復始，即須隔 $8+4=12$ 年，星期數才重複。

由一及二的討論得知：陽曆生日與其星期數的重複與 28 年或 12 年有絕對關係。

◎ 問題 3 的答案：

最後合併「陽曆生日與其星期數的重複性」及問題 1 的結論來研究，照樣分非閏日與閏日兩種。

一、非陽曆閏日 2/29 的一般日期：

陽曆生日與其星期數的重複性的結論，首當考慮數據 28，次為 12，再為 5, 6, 11, 17, ...。問題 1 的結論，首當考慮數據 19，次為 11，再為 8, 27, 30, ...。仔細觀察，數據 5, 6, 11, 12, 17, 28 都與 19 互質，若要陽、陰曆日期及星期數都重複，有可能只隔 11 年（理論如此，但尚未發現）；經計算各最小公倍數及作表統計發現：

- 1) 歷經不能被 400 整除的 100 倍數平年的，須隔 $57(= 28 + 12 + 17 = 19 \times 3)$ 或 $68(= 28 \times 2 + 12 = 19 \times 3 + 11)$ 年，...

舉實例如下：（譬如歷經西元 1900 年，參見上表五）

相隔 57 年的西元 1898 及 1955 年，在 384 天的一年中有 81 天。

相隔 68 年的西元 1898 及 1966 年，在一年中則有 118 天。

- 2) 歷經 400 倍數閏年的，須隔 $84(= 28 \times 3 = 19 \times 4 + 8)$ 或 $95(= 28 \times 3 + 11 = 19 \times 5)$ 年，...

舉實例如下：（譬如歷經西元 2000 年，參見上表四）

相隔 84 年的西元 1925 及 2009 年，其陽曆從 10/18 星期日到 11/15 星期日（陰曆 9/1~9/29）及 12/16 星期三到 1/13 星期三（陰曆 11/1~11/29），共 58 天。

相隔 95 年的西元 1914 及 2009 年，一年之中有 206 天。

二、陽曆閏日 2/29：（參見上表六）

合併陽曆生日與其星期數的重複性及問題 1 的結論，當思考數據 28、12 與 68、76、84、... 的關係，經作表統計，發現隔 $68(= 28 \times 2 + 12)$ 或 $84(= 28 \times 3)$ 或 $152(= 28 \times 5 + 12)$ 或 $220(= 28 \times 7 + 12 \times 2)$ 年，都有可能。例如公元 1648, 1716, 1868, 1936, 2020 年陽曆 2/29，陰曆皆為 2/7，都是星期六。

必須強調，結論只是可能而已，並沒有絕對性！

~~~ 敬請批評指教!! ~~~

#### 《參考書籍》

- |             |                            |              |
|-------------|----------------------------|--------------|
| ◎ 天文學       | Robert H. Baker 著／厲保羅 譯    | 復漢出版社印行      |
| ◎ 實用航海天文學   | 廖中山 著                      | 徐氏基金會出版      |
| ◎ 曆法叢談增訂本   | 鄭天杰 著                      | 中國文化大學出版部印行  |
| ◎ 萬年曆       | 安人 著                       | 國家出版社印行      |
| ◎ 五術萬年曆     | 鄭景峰 著                      | 世峰出版社        |
| ◎ 兩千年中西曆對照表 | 薛仲三、歐陽頤 著                  | 華世出版社印行      |
| ◎ 阿草的曆史故事   | 曹亮吉 著                      | 天下遠見出版股份有限公司 |
| ◎ 學曆散論      | 高子平 著                      | 中央研究院數學研究所   |
| ◎ 曆法通志      | 朱文鑫 著                      | 台灣商務印書館發行    |
| ◎ 抓時間的人     | David Ewing Duncan 著／丘宏義 譯 | 雙月書屋有限公司     |

# 圓規的奧妙...

生鏽圓規搞數學工藝

◎許志農／台灣師範大學數學系

世界末日之後的地球，人類的文明將嚴重退化。末日後的猿猴即使找到以前人類使用過的圓規，也是一把生了鏽的圓規；因為圓規生了鏽，所以猿猴有可能誤以為人類畫圖用的圓規之張角是固定不變的，也就是說，同一把圓規只能畫固定半徑的圓。在這樣的誤解之下，猿猴可能做出的點或圖形顯然少很多。最簡單的情形是正三角形可以作出來嗎？

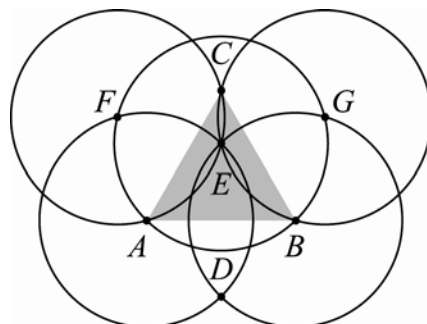


1 手上僅有一把生鏽的圓規，令其兩個尖點相距 1 單位，而紙上有兩個已知點  $A$  與  $B$ ，它們相距小於 2 單位。在作圖過程只能用這把生鏽的圓規的要求下，作出紙上的一點  $C$  使得  $\triangle ABC$  為正三角形。



作圖方法如下圖所示：

- (1) 以  $A, B$  為圓心，分別作圓  $A$  與圓  $B$ （因為生鏽的圓規只能作固定半徑的圓，所以用圓心來稱呼所作出來的圓），並令  $D, E$  是這兩圓的兩個交點。
- (2) 以  $E$  為圓心，作圓  $E$ ，並令圓  $E$  與圓  $A$  交於  $F, A$  兩點；與圓  $B$  交於  $G, B$  兩點。
- (3) 過  $F, G$  兩點分別作圓  $F$  及圓  $G$ ，並令此兩圓相交於  $E$  與  $C$  兩個點。
- (4)  $C$  點為所求，即  $\triangle ABC$  是正三角形。



證明過程：

(1) 觀察  $E, F, A$  三點得知  $\triangle EFA$  為正三角形。因此  $\angle EFA = 60^\circ$ 。

(2) 考慮圓  $F$ ，由圓周角是圓心角的一半之性質，得到

$$\angle ECA = \frac{1}{2} \angle EFA = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

同理可得， $\angle ECB = 30^\circ$ 。

(3)  $\angle ACB = \angle ECA + \angle ECB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ 。

(4) 從作圖的對稱關係可以發現  $\triangle CAB$  是等腰三角形，即  $\angle CAB = \angle CBA = 60^\circ$ 。

(5)  $\triangle ABC$  為正三角形。

生鏽圓規作正三角形是美國幾何學家佩多所提出的問題，事實上，他還提出另一道生鏽圓規的作圖題：求作  $\overline{AB}$  線段的中點。這兩個問題都是中國的教授與學生首先得到解答；特別是第二題被一個未考上大學的學生做出，他是山西自學青年侯曉榮。

# 意料之外的遊戲

◎許介彥／大葉大學電機工程學系

你喜歡看美國職棒大聯盟的比賽嗎？自從王建民幾年前開始擔任紐約洋基隊的先發投手後，台灣收看大聯盟轉播的人口頓時多了起來；筆者雖還不到「迷」的程度，對洋基隊的眾多明星球員倒也各個叫得出名字（看姿勢就知道是誰了），並不時從網路上了解洋基隊的最新戰況。今年的球季到現在（2008 年 6 月底）已經過了一半，可惜洋基隊的表現不大理想，勝率常在五成左右徘徊，投手群控球的不夠穩定及隊員們的不時受傷想必讓教練團相當傷腦筋。

不論是投球、打擊或守備，一位球員要在整個球季中維持穩定的表現是相當不容易的事，而整個球隊要時時保持在最佳狀況更是幾乎不可能。以下我們將作些簡單的計算，為了不要讓問題太複雜，讓我們假設洋基隊每次出賽獲勝的機率都固定是  $p$ （ $0 < p < 1$ ），這樣一來，當洋基隊與其他球隊進行多場比賽，它在  $n$  場中總共贏了  $k$  場的機率為

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

上式可由簡單的排列組合觀念推導而得；同樣不難推得的是在全部  $n$  場比賽中，洋基隊獲勝的場數的期望值為  $np$ 。例如：當  $p$  為 0.45 時，洋基隊若與其他球隊比賽 100 場，勝場數的期望值為  $100 \times 0.45 = 45$  場（雖然實際比賽結果的勝場數可能是 0 至 100 間的任何一數）。

大聯盟的比賽規則中，每支球隊每個球季都固定要出賽 162 場。如果如前所述，洋基隊每場比賽贏球的機率都是  $p$ ，那麼打完全部

162 場後的勝場數的期望值為  $162p$ ，而正好打到一半，也就是打完 81 場時，勝場數的期望值為  $81p$ 。請你猜猜看，洋基隊在打完 81 場時贏得至少  $81p$  場的機率和打完 162 場時贏得至少  $162p$  場的機率哪一個較大？

許多人憑直覺會認為這兩個機率應該一樣大（或者至少相當接近），然而事實並非如此；它們接近的程度隨著  $p$  的變化而有不小的起伏。如果我們將洋基隊打完  $n$  場比賽時贏得至少  $np$  場的機率記作  $P_n(p)$ ，那麼

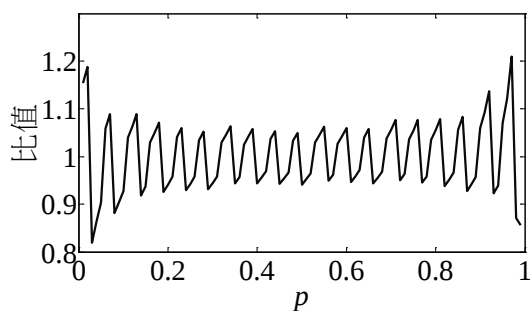
$$P_n(p) = \sum_{k=\lceil np \rceil}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

上式中，由於  $np$  有可能不是整數，因此  $k$  是從  $\lceil np \rceil$  開始取值（數學上，對任意實數  $x$ ，

$\lceil x \rceil$  表大於等於  $x$  的所有整數中最小的整數）。我們前面想要比較的兩個機率就是  $P_{81}(p)$  和  $P_{162}(p)$ ，其比值為

$$\frac{P_{81}(p)}{P_{162}(p)} = \frac{\sum_{k=\lceil 81p \rceil}^{81} \binom{81}{k} p^k (1-p)^{81-k}}{\sum_{k=\lceil 162p \rceil}^{162} \binom{162}{k} p^k (1-p)^{162-k}}.$$

如果我們將此比值對  $p$  作圖，從圖中應該能很方便地觀察到  $P_{81}(p)$  和  $P_{162}(p)$  接近的程度隨著  $p$  變化的情形，這種畫圖的工作利用數學軟體 Matlab 很容易達成；如果讓  $p$  由小而大每次遞增 0.01，所描繪出來的圖形如下：



圖中幅度不小的振盪是否讓你感到訝異呢？

（本文的最後面附有畫出上圖的 Matlab 程式供你參考。）

機率這個領域裡有不少像這樣答案出人意料的問題，這些問題不僅有趣，也讓世界各地的許多賭場得以每天門庭若市賺進大把鈔票，例如有一個有名的賭博遊戲叫做 Chuck-a-Luck，遊戲規則很簡單，首先由賭客從 1 到 6 中任選一數，然後莊家搖動一個裝著三顆骰子的骰盅，當骰子靜止後，如果三顆骰子中沒有任何一顆骰子出現賭客所選的數，賭客須付給莊家 100 元；如果有一顆骰子出現賭客所選的數，莊家須付給賭客 100 元；如果有兩顆，莊家付給賭客 200 元；如果有三顆，莊家付給賭客 300 元。請你判斷一下，這個遊戲對誰較有利？

許多人憑直覺會認為對賭客較有利，因為每顆骰子出現賭客所選的數的機率都是  $\frac{1}{6}$ ，既然有三顆骰子，賭客所選的數出現的機率為  $\frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2}$ ，機會是「一半一半」；由於賭客頂多損失 100 元，卻可能賺進 100、200、300 元，因此玩這個遊戲對賭客而言似乎挺划算的，不是嗎？

上面的想法當然是錯的，因為賭客所選的數出現的機率並不是  $\frac{1}{2}$ （儘管出現的次數的期望值的確是  $\frac{1}{2}$  次）。三顆骰子中有  $k$  顆骰子出現賭客所選的數的機率為

$$\binom{3}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}, k = 0, 1, 2, 3.$$

因此平均而言，每玩一次這個遊戲，賭客可以獲利

$$\begin{aligned} & -100 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 100 \times 3 \times \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ & + 200 \times 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) + 300 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ & \approx -7.87 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

所以這個遊戲其實是對莊家有利，而且利潤還蠻高的。

接下來請想像一個虛擬的情境：某一年，洋基隊和紅襪隊的總教練決定讓這兩隊進行一系列比賽來爭奪當年度的冠軍。他們兩人達成了共識，要讓兩隊進行  $n$  場（ $n$  為偶數）比賽，並在全部比完後由勝場數超過  $\frac{n}{2}$  的球隊取得冠軍。已知洋基隊每場比賽贏球的機率都是 0.45（紅襪隊為 0.55），如果你是洋基隊的總教練，而且你有權選擇  $n$  的值（只要是正的偶數即可），你會選擇比幾場？

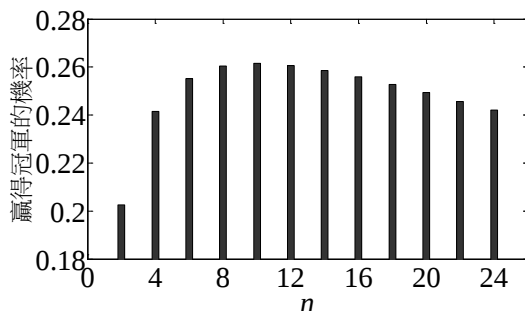
大多數人不假思索就會立刻作出決定：比兩場，因為既然洋基隊居於劣勢，賽程拖得愈久顯然對洋基隊愈不利，因此應選擇最小的可能的值。

這樣的想法雖然好像有道理，可惜對這個問題而言， $n=2$  並非正確的選擇（事實上，如果不限定  $n$  必須是偶數，那麼  $n=1$  確實是最好的選擇）。如果我們將洋基隊打完  $n$  場比賽時勝場數大於  $\frac{n}{2}$  的機率記作  $P(n)$ ，那麼

$$P(n) = \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n \binom{n}{k} (0.45)^k (0.55)^{n-k}.$$

利用 Matlab 不難計算  $P(n)$  在不同的  $n$  時的值並對  $n$  作圖，結果如下：

| $n$ | $P(n)$ |
|-----|--------|
| 2   | 0.2025 |
| 4   | 0.2415 |
| 6   | 0.2553 |
| 8   | 0.2604 |
| 10  | 0.2616 |
| 12  | 0.2607 |
| 14  | 0.2586 |
| 16  | 0.2559 |
| 18  | 0.2527 |
| 20  | 0.2493 |
| 22  | 0.2457 |
| 24  | 0.2420 |



由圖中可看出  $n=10$  才是正確的選擇；你事先大概沒料到吧？

本文所介紹的幾個例子都跟數學上所謂的「二項分布」(Binomial Distribution)有關。從這些例子我們可以體會到，善用直覺在解決問題時固然重要，但是還需輔以嚴謹的驗證。前人不是說了，要「大膽假設，小心求證」。事實上，不僅是一般人，從古到今有許多著名的數學家也都曾經在看似簡單的機率問題上栽過筋斗，種種趣聞軼事不僅豐富了數學的發展史，也在提醒我們：處理機率問題時不可不慎啊！

下面是文中提到的 Matlab 程式：

```

warning('off','all');
for p = 0.01:0.01:0.99
    s = ceil(81*p);
    t = ceil(162*p);

    num = 0;
    for k = s:81
        bc = nchoosek(81,k);
        num = num + bc * p^k * (1-p)^(81-k);
    end

    den = 0;
    for k = t:162
        bc = nchoosek(162,k);
        den = den + bc * p^k * (1-p)^(162-k);
    end

    index = round(p/0.01);
    ratio(index) = num/den;
    x(index) = p;

end
plot(x, ratio)
xlabel('p'), ylabel('比值')

```

# 關於遞迴數列的教學演示

◎周佳瑩/台中市曉明女中

筆者在今年準備教師甄試時，實習學校正在進行遞迴數列的教學，在三民版的習作簿中有著這樣的一題，讓學生苦惱許久進而於課堂中詢問我的指導老師，題目如下：「四個人互相傳球，要求接球後馬上傳出，由甲先傳第一次，求經過5次傳球後，球仍回到甲手中的傳球方式有幾種？」當時，筆者就決定如果教師甄試的試教抽到遞迴數列，此題就是筆者演示的題目了。

幸運地，在目前服務學校的考試中，筆者真的抽到了遞迴數列，而台下也有所謂的「假學生」。筆者先改題目為「四個人互相傳球，要求接球後馬上傳出，由甲先傳第一次，求經過“3”次傳球後，球仍回到甲手中的傳球方式有幾種？」這時學生還能用樹狀圖寫出答案；再來我將題目改為「四個人互相傳球，要求接球後馬上傳出，由甲先傳第一次，求經過“5”次傳球後，球仍回到甲手中的傳球方式有幾種？」學生馬上愣住，因為若使用樹狀圖就會太過複雜；這時我就引入遞迴的概念。我拿了一個盒子當球，請他們互相傳球，傳了三次，學生們就發現規則，並能理解遞迴數列的大概樣貌了。

試教結束，當中的一位評審委員，相當訝異有這樣的題目，這樣的講解方式。而我也順利考上。我想，就如同在師大的返校座談中，教授們常說：「試教要讓評審委員眼睛為之一亮。」即是如此吧！在此，提供此題一般化( $n$ 次傳球)的解法，供各位讀者參考。

## 【例題】

四個人互相傳球，要求接球後馬上傳出，由甲先傳第一次，求經過 $n$ 次傳球後，球仍回到甲手中的傳球方式有幾種？

### 《解》

設經過 $n$ 次傳球後，球仍回到甲手中的傳球方式有 $a_n$ 種 $\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 6$ 。

但傳球後，球要回到甲手中，即傳球前，球要在其他三人手中。

意即「第 $n$ 次傳球後，球仍回到甲手中的傳球方式」與「第 $n-1$ 次傳球後，球不在甲手中的傳球方式」相同。

而「第 $n-1$ 次傳球後，球不在甲手中的傳球方式」與「第 $n-1$ 次傳球後，球在甲手中的傳球方式」總和為「第 $n-1$ 次傳球後，所有的傳球方式」 $\Rightarrow a_n + a_{n-1} = 3^{n-1}$ 。

$$\begin{aligned} a_n + a_{n-1} &= 3^{n-1} \\ -(a_{n-1} + a_{n-2}) &= -3^{n-2} \\ a_{n-2} + a_{n-3} &= 3^{n-3} \\ &\vdots \\ (-1)^{n-2}(a_2 + a_1) &= (-1)^{n-2} \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{n-1} + (-1) \cdot 3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-2} \cdot 3 \\ &= \frac{3}{4}(3^{n-1} + (-1)^n). \end{aligned}$$

故經過 $n$ 次傳球後，球仍回到甲手中的傳球方式有 $\frac{3}{4}(3^{n-1} + (-1)^n)$ 種。

## 指定項目甄試試題

## 筆試二、填充題（考試時間：1.5 小時）

1. 設  $\theta$  為銳角，且滿足  $\sum_{k=1}^{\infty} \cos^k \theta = 2$ ，則  $\sin 2\theta =$  \_\_\_\_\_。
2. 設複數  $z = -\frac{5}{4}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ ，則滿足  $|z|^n > 10^7$  的最小正整數  $n =$  \_\_\_\_\_。  
(註： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 7 \approx 0.8451$ )
3. 若  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 54$  為實係數多項式，且  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  為  $f(x) = 0$  的根，其中  $\alpha, \beta$  為整數， $\alpha > \beta, 6 < |\beta| < 12, \gamma = 1 + \sqrt{2}i$ ，則  $\beta =$  \_\_\_\_\_。
4. 設  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$  是一橢圓，焦點為  $F_1, F_2$ 。若  $A, B$  為橢圓上相異兩點， $F_1$  在線段  $\overline{AB}$  上，且  $\triangle ABF_2$  的周長為 28，則  $k =$  \_\_\_\_\_。
5. 某一老鼠走迷宮的遊戲中，假設迷宮有  $A, B, C$  三個門，老鼠走進這三個門的機率都相等，且假設老鼠不去記憶走過哪些門。如果走進  $A$  門，則老鼠在 3 個小時後可以走出迷宮；如果走進  $B$  門，則老鼠經過 2 個小時後又走回原地；如果走進  $C$  門，則老鼠經過 4 個小時後又走回原地。那麼，這隻老鼠要走出迷宮所花時間的期望值為 \_\_\_\_\_ 小時。
6. 在坐標空間中，給定一圓  $\Gamma$  及三個平面  

$$E_1: x - 2y + z = 0, E_2: 3x - y - z = 1, E_3: 2x + 3y - 4z = 1,$$
其中圓  $\Gamma$  落在平面  $E_1$  上，且  $E_1, E_2$  與  $E_3$  的交點恰為圓  $\Gamma$  的圓心。若  $L$  為平面  $E_1$  上的一直線，其方向向量為  $(a, 4, b)$ ，且  $L$  與圓  $\Gamma$  相切於點  $Q(-5, 4, 7)$ ，則數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。
7. 設數列  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+3+\cdots+k}$ ，且  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ，則滿足  $|S_n - S| < 0.00001$  的最小正整數  $n$  之值為 \_\_\_\_\_。

8. 設數列  $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$  滿足  $a_0 + b_0 = 2$ ，且對每一正整數  $n$ ，恆有

$$a_n = \sqrt{3}a_{n-1} - b_{n-1} \text{ 及 } b_n = a_{n-1} + \sqrt{3}b_{n-1},$$

則  $a_{18} + b_{18} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 設  $a, b$  都是實數，且滿足行列式  $\begin{vmatrix} 3a^2 - a + 3 & b^2 + 1 & a + 3b + 2 \\ 2a^2 - 2b + 2 & 2 & a + 2b \\ ab + 2 & b + 2 & 4 - b \end{vmatrix} = 1$ ，則行列式

$$\begin{vmatrix} 3b - a & 3a^2 - 3b + 3 & ab + 2 \\ b^2 - 2 & 3 & b + 2 \\ 2 - \frac{1}{2}a & \frac{3}{2}a + 3b & 4 - b \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

10. 某校有 1000 位高三學生，其數學成績呈常態分配，平均數為 60 分，標準差為 10 分。試問下列哪些選項是正確的？答：\_\_\_\_\_。（可複選）

- (A) 高三學生中，數學成績介於 70 到 90 分之間的學生約有 150~160 位。
- (B) 若甲同學的數學成績 80 分，則他的數學成績在全部高三學生中大約排前 20~25 名。
- (C) 若甲和乙為該校兩位高三的學生，則隨機抽出 50 位高三學生時，甲和乙同時被抽中的機率小於  $\frac{1}{400}$ 。
- (D) 若將每一位學生的原始數學成績乘上 1.1 倍當作最終的成績，則調整後的數學最終成績仍呈常態分配。
- (E) 承(D)，若調整後，乙同學的數學最終成績為 80 分，則他的數學成績在全部高三學生中大約排前 20~25 名。

（註：在常態分配下，估算大約有 68% 的資料落在以平均數為中心的一個標準差之內；大約有 95% 的資料落在兩個標準差之內；大約有 99.7% 的資料落在三個標準差之內。）

# 國立台灣師範大學數學系 97 學年度 甄選入學

## 指定項目甄試試題填充題詳解

◎ 填充題答案：

|                       |                 |           |               |      |
|-----------------------|-----------------|-----------|---------------|------|
| 1.                    | 2.              | 3.        | 4.            | 5.   |
| $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ | 73              | -9        | 49            | 9    |
| 6.                    | 7.              | 8.        | 9.            | 10.  |
| (4, 4)                | $2 \times 10^5$ | $-2^{19}$ | $\frac{3}{2}$ | ABCD |

筆試二、填充題：

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \cos^k \theta = 2$$

$$\Rightarrow \cos^1 \theta + \cos^2 \theta + \cos^3 \theta + \cdots = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta} = 2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\because 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}),$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9} \sqrt{5}.$$

$$2. \quad z = -\frac{5}{4}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \frac{5}{4}(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) \Rightarrow |z| = \frac{5}{4},$$

$$|z|^n = \left(\frac{5}{4}\right)^n > 10^7, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot \log\left(\frac{5}{4}\right) > 7 \Rightarrow n > 72.16,$$

$\therefore n$  之最小值為 73。

$$3. \quad f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 54, a, b, c \in \mathbb{C} \text{ 且 } \alpha\beta\gamma\delta = -54, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\because \gamma = 1 + \sqrt{2}i, \therefore \delta = 1 - \sqrt{2}i \Rightarrow \gamma\delta = 3 \Rightarrow \alpha\beta = -18,$$

$$\because 6 < |\beta| < 12, \beta \in \mathbb{R}, \therefore |\beta| = 9, \beta = \pm 9,$$

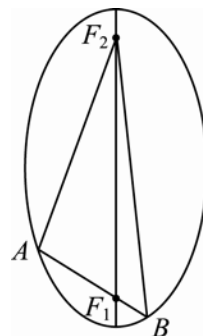
如果  $\beta = +9 \Rightarrow \alpha = -2$  (不合,  $\because \alpha > \beta$ ), 如果  $\beta = -9 \Rightarrow \alpha = 2$ ,

$\therefore \beta = -9$ .

4. 參考圖如右，

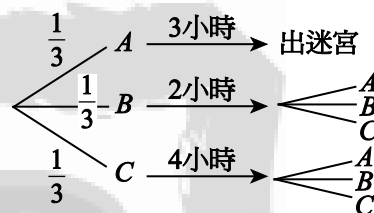
$$\overline{AB} + \overline{BF_2} + \overline{AF_2} = 2a + 2a = 28 \Rightarrow a = 7,$$

$$\therefore k = a^2 = 49.$$



$$5. E = E(A) + E(B) + E(C) = \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times (2 + E) + \frac{1}{3} \times (4 + E),$$

$$E = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}E \Rightarrow E = 9.$$



6. 因為直線  $L$  在平面  $E_1$  上，所以平面  $E_1$  的法向量與直線  $L$  的方向向量垂直，也就是兩向量的內積為 0，即

$$(1, -2, 1) \cdot (a, 4, b) = 1 \Rightarrow a + b = 8.$$

已知圓  $\Gamma$  的圓心為平面  $E_1$ 、平面  $E_2$  與平面  $E_3$  的交點，求得圓  $\Gamma$  的圓心為  $(1, 1, 1)$ 。

又已知直線  $L$  與圓  $\Gamma$  相切，可得

$$(2 - 1, 1 - 1, 0 - 1) \cdot (a, 4, b) = 1 \Rightarrow a - b = 0.$$

因此，將兩方程聯立可解得  $a = b = 4$ 。

$$7. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \cdot \frac{n}{n+1},$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2,$$

$$\therefore |S_n - S| = \left| 2 - \frac{2}{n+1} - 2 \right| = \frac{2}{n+1} < 10^{-5}, \therefore n > 2 \times 10^5 - 1,$$

$n$  之最小正整數解為  $2 \times 10^5$ 。

8.  $\because a_n = \sqrt{3}a_{n-1} - b_{n-1}$  及  $b_n = a_{n-1} + \sqrt{3}b_{n-1}$ ,

$$\therefore \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\text{令 } \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = A \Rightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = 2A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = (2A)(2A) \begin{bmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{bmatrix} = \cdots = (2A)^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix},$$

$$\text{則 } \begin{bmatrix} a_{18} \\ b_{18} \end{bmatrix} = 2^{18} \cdot A^{18} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = 2^{18} \cdot \begin{bmatrix} \cos 3\pi & -\sin 3\pi \\ \sin 3\pi & \cos 3\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = 2^{18} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = -2^{18} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix},$$

$$\therefore a_{18} = -2^{18}a_0, b_{18} = -2^{18}b_0 \Rightarrow a_{18} + b_{18} = -2^{18}(a_0 + b_0) = -2^{19}.$$

9. 
$$\begin{vmatrix} 3a^2 - a + 3 & b^2 + 1 & a + 3b + 2 \\ 3a^2 - 3b + 3 & 3 & \frac{3}{2}a + 3b \\ ab + 2 & b + 2 & 4 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3b - a & b^2 - 2 & 2 - \frac{1}{2}a \\ 3a^2 - 3b + 3 & 3 & \frac{3}{2}a + 3b \\ ab + 2 & b + 2 & 4 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3b - a & 3a^2 - 3b + 3 & ab + 2 \\ b^2 - 2 & 3 & b + 2 \\ 2 - \frac{1}{2}a & \frac{3}{2}a + 3b & 4 - b \end{vmatrix},$$

$$\text{又 } \begin{vmatrix} 3a^2 - a + 3 & b^2 + 1 & a + 3b + 2 \\ 3a^2 - 3b + 3 & 3 & \frac{3}{2}a + 3b \\ ab + 2 & b + 2 & 4 - b \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3a^2 - a + 3 & b^2 + 1 & a + 3b + 2 \\ 2a^2 - 2b + 2 & 2 & a + 2b \\ ab + 2 & b + 2 & 4 - b \end{vmatrix} = \frac{3}{2}.$$

10. (A)  $1000 \times (49.85\% - 34\%) = 158.5$ .

(B)  $1000 \times \left( \frac{1 - 0.95}{2} \right) = 25$ , 80 分約第 25 名。

(C)  $P = \frac{C_{48}^{998}}{C_{50}^{1000}} = \frac{\frac{998!}{48!950!}}{\frac{1000!}{50!950!}} = \frac{50 \times 49}{1000 \times 999} = \frac{49}{19980} < \frac{1}{400}.$

(D)(E)  $X \sim N(60, 100)$ , 如果  $Y = 1.1X$ ,

$$E(Y) = 1.1 \times E(X) = 66, \text{Var}(Y) = 1.1^2 \times \text{Var}(X) = 121, \therefore Y \sim N(66, 121),$$

平移後距平均數約兩倍標準差之 88 分，排名為 25 名；

故平移後的 80 分，排名必於 25 名之後。



# 動手玩數學

◎許志農／台灣師範大學數學系



一夫、二郎、三吉、四祥和五平五個人，是青梅竹馬的好朋友，如今長大成人，各自當上麵包店老闆、理髮師、肉店老闆、菸酒經銷商和公司職員。（上面的名字和職業是任意安排的，所以不能跟名字互相對照！）

提示：

1. 麵包店老闆不是三吉，也不是四祥。
2. 菸酒經銷商不是四祥，也不是一夫。
3. 此外，三吉和五平住在同一棟公寓，隔壁是公司職員的家。
4. 三吉娶理髮師女兒時，二郎是他們的媒人。
5. 一夫和三吉有空時就和肉店老闆、麵包店老闆打牌。
6. 而且，每隔十天，四吉和五平一定要到理髮店修個臉。
7. 但是，公司職員則一向自己刮鬍子，從來不到理髮店去。

問題：

請將這五個人的名字和職業連接起來！

- |      |         |
|------|---------|
| ◎ 一夫 | ◆ 麵包店老闆 |
| ◎ 二郎 | ◆ 理髮師   |
| ◎ 三吉 | ◆ 肉店老闆  |
| ◎ 四祥 | ◆ 菸酒經銷商 |
| ◎ 五平 | ◆ 公司職員  |

## 〔玩鎖・玩索〕

這是我高中同學傳給我的一道推理數學題，據說是台積電這家公司的智力測驗題。

許多人在做連連看問題時，都拿筆在連連看的圖形上直接畫線嘗試找正確的對應。當題目比較複雜時，所畫的線會愈來愈多，以致於混亂完全分不清楚。事實上，應該將左右兩邊的項目分別排列在紙張的橫軸與縱軸上，再根據提議去掉不可能的對應，最後就可以看出初步的端倪來。簡單講就是利用二維的平面圖來分析題目，進而獲得答案。



中國明朝數學家朱載堉被譽為鋼琴理論鼻祖，他在 1581 年創立十二平均律理論：就是用第一弦的長度除以  $\sqrt[12]{2}$  得到第二個音的弦長，將第二個弦的長度除以  $\sqrt[12]{2}$  得到第三個音的弦長，以下用相同的方法求得各個音的弦長。

遊戲 30

☆☆☆☆



設第一個音的弦長為 1，則

- (1) 已知第  $m$  個音的弦長為  $\frac{1}{4}$ ，求  $m$  的值。
- (2) 經測量後發現第  $n$  個音的弦長最接近  $\frac{1}{3}$ ，求正整數  $n$  的值。

### 〔玩鎖・玩索〕

這是鋼琴理論鼻祖朱載堉的故事，他比西方還早發現音樂的規律，直到現在，鋼琴的弦長還是以這樣的數學原理製作。



在西元 1960 年時，一條裹屍布的一小部分被剪下來做碳—14 判定法，而碳—14 的半衰期是 5600 年。

遊戲 31

☆☆☆



檢驗發現放射性元素只剩原來的  $\frac{14}{15}$ ，根據這項檢

測，裹屍布的年代最接近下列哪一時期？

- (1) 西元前 500 年附近。
- (2) 西元 40 年附近。
- (3) 西元 800 年附近。
- (4) 西元 1400 年附近。
- (5) 西元 1560 年附近。

### 〔玩鎖・玩索〕

這道問題改編自有名的都靈耶穌裹屍布迷團，它是人類史上最仔細研究的一件古物。放射性元素的半衰期是用來鑑定古物年代的一種好方法，但是這道方法需要指對數函數的幫忙。

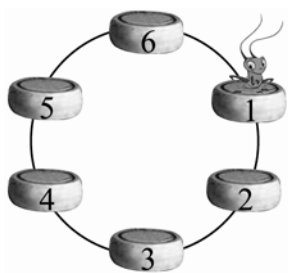


跳蟲依下列的規律，從 1 號位置往順時針的方向開始跳動：

遊戲 32

☆☆☆

- (1) 如果跳蟲所在的位置是奇數，那麼牠下一次將跳動 1 格，如由 1 號跳到 2 號。
- (2) 如果跳蟲所在的位置是偶數，那麼牠下一次將跳動 3 格，如由 2 號跳到 5 號。



問：跳蟲在跳動 99 下後，其所在位置的號碼是幾號？

### 〔玩鎖・玩索〕

尋找跳動規律是這道跳蟲問題的核心。不妨試試跳蟲前幾次跳動的情形，以便掌控一般的跳動公式。

# 動手玩數學~破解秘笈

第7期

## 遊戲 25

圖片中記錄的是正整數

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

乘以 9 的運算結果，第一列是這 14 個正整數，第二與第三列是運算結果。所以

$$\nabla=1, \triangleleft=10, \triangleright=60.$$

## 玩鎖・玩索解答

如下圖所示，將左邊是偶數的數字所平行對應過去的數字劃掉，再將右邊留下的數字相加，就得到乘積

$$73 \times 217 = 217 + 1736 + 13888 = 15841.$$

$$\begin{array}{r} 73 \quad 217 \\ 36 \quad \cancel{434} \\ 18 \quad \cancel{868} \\ 9 \quad 1736 \\ 4 \quad \cancel{3472} \\ 2 \quad \cancel{6944} \\ 1 \quad 13888 \\ \hline 15841 \end{array}$$

不相信的話，可以試試看其他別的例子。這法則的證明與數字的 2 進位有關。

## 遊戲 26

把六隻青蛙依左至右編號為 1, 2, 3, 4, 5, 6，並把跳到下一顆石頭記為「跳」，躍過前一顆臥著青蛙的石頭，到達下一顆石頭記為「躍」。下面是完成青蛙交換的 15 個步驟：

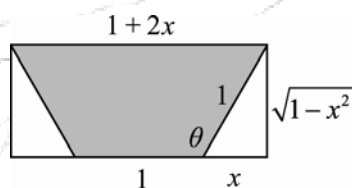
4 跳；3 躍；2 跳；3 躍；5 躍；6 跳；3 躍；2 躍；  
1 躍；4 跳；5 躍；6 躍；2 跳；1 躍；6 跳。

## 遊戲 27

先玩者有必勝的策略，方法為拔 2, 5 或 7 號的樹。

## 遊戲 28

如下圖所示，灰色區域為橫截面，



因為橫截面是梯形，所以其面積  $\Delta$  為

$$\Delta = \frac{(2+2x) \times \sqrt{1-x^2}}{2} = \sqrt{(1-x)(1+x)^3}.$$

利用算幾不等式

$$\frac{(1-x) + \frac{1+x}{3} + \frac{1+x}{3} + \frac{1+x}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{(1-x)(1+x)^3}{27}},$$

得

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \geq \sqrt{(1-x)(1+x)^3} = \Delta,$$

而等號成立的條件為

$$1-x = \frac{1+x}{3},$$

$$\text{即 } x = \frac{1}{2}.$$

故當  $\theta = 120^\circ$  時，橫截面的面積達到最大，為  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  平方公尺。