

許教授講故事

柯西的手臂遊戲

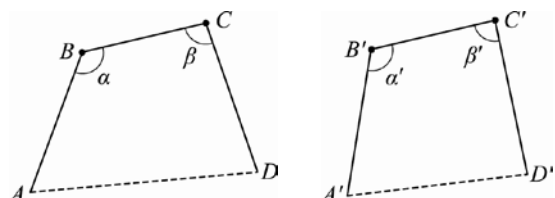
◎許志農／台灣師範大學數學系

每一個人將拳頭握緊，雙手的手臂張開，張得愈開，兩拳頭間的距離就愈大；這是大家都可以親身體驗的常識。這種手臂遊戲可以延伸成一個有趣的數學定理嗎？兩百年前的柯西，就是發現而且證明這個數學定理的學者，但有趣的是，他的證明有瑕疵，或者說，是有漏洞的。這個漏洞直到苟白克給薩林巴的一封信時，才被發現及填補起來。

為了便於了解，我們將手臂遊戲設計成四邊形：



1 如下圖所示，左、右兩圖是將同一條三節棍做不同角度彎曲的情況：

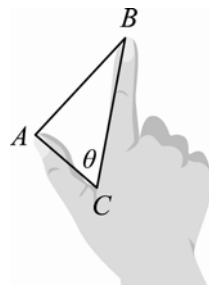


已知左、右兩圖都是凸四邊形，而且角度 $\alpha \geq \alpha'$ 及 $\beta \geq \beta'$ ，試問：三節棍兩端的距離（虛線長度），何者比較長？

這個問題解題關鍵在三角形的情形，而三角形的情形就是所謂的樞紐定理（或稱大角對大邊，小角對小邊定理）：給兩個三角形，有相同的兩個邊，這兩個相同邊夾角較大的三角形，其對應的第三個邊也較大。

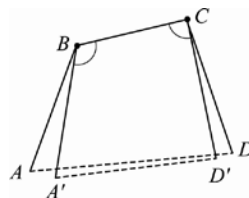
如果將你的大拇指與食指當成相同的兩個邊，那麼樞紐定理是在講一件大家都清楚的事實：「當虎口張角 θ 張得愈大時，兩指尖的距離 $\overline{AB}$ 就愈大。」雖然這樣的比喻很容易了解，但是為了嚴密性，我們還是利用餘弦定理來證明樞紐定理。根據餘弦定理，兩指尖的距離 $\overline{AB}$ 會滿足

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos \theta.$$



因為大拇指長度 $\overline{AC}$ 與食指長度 $\overline{BC}$ 是固定的，又虎口張角 θ 愈大時， $\cos \theta$ 愈小；所以虎口張角 θ 張得愈大時，兩指尖的距離 $\overline{AB}$ 就愈大。

接下來利用樞紐定理來處理凸四邊形的情形，首先將左、右兩圖中的 $\overline{BC}$ 與 $\overline{B'C'}$ 疊在一起，如下圖所示：



(1) 比較三角形 ABD 與三角形 $A'BD$ ：

因為 $\overline{AB} = \overline{A'B}$ 及 $\overline{BD} = \overline{BD}$ ，所以根據樞紐定理得

$$\overline{AD} \geq \overline{A'D}.$$

(2) 比較三角形 $A'BD$ 與三角形 $A'BD'$ ：

因為 $\overline{A'B} = \overline{A'B}$ 及 $\overline{BD} = \overline{BD'}$ ，所以根據樞紐定理得

$$\overline{A'D} \geq \overline{A'D'}.$$

綜合(1)與(2)得

$$\overline{AD} \geq \overline{A'D'}.$$

因此，張角比較大的三節棍兩端之距離也比較長；同樣的情形也可以類推到手臂張開的情形或凸多邊形的情形。但是，你是否注意到「凸」的條件在哪裡用到了；如果沒有注意到，那將會跟數學家柯西一樣，犯了一個不容易察覺的錯誤。

對數的查表

之淺見

◎葉善雲／台北市東山高中

筆者在課餘樂於拿歷屆（尤其是近年來）大學入學考試題目反覆推敲，嘗試從不同的角度尋求各種解法，偶爾有些心得。茲有關高中數學第二冊指數與對數部分，提供一些個人的淺見，期盼引起各界的迴響或共鳴。

一、來源

【第 1 題】〔取材自 90 年自然組數學選擇第 3 題〕

根據內政部統計，台灣地區在西元 2000 年底有 2228 萬人，而最近九年人口平均年增加率皆為 0.0087。假設此後一世紀內，人口的年增加率皆為 0.0087，試問台灣地區將在哪一年人口增加 50%而達到 3342 萬人？

【第 2 題】〔模仿 92 年學測補考選擇第 4 題〕

試問有多少個正整數 n 滿足 $100 \leq 1.28^n \leq 1000$ ？

對 數 表 $\log N$						
N	0	1	...	8		8 9
10	0000	0043			表尾差	33 37
12				1072		
20	3010					
30	4771					

二、列式

【第 1 題】自西元 2000 年底起算 k 年後，台灣地區的人口數為 $2228 \cdot (1 + 0.0087)^k \geq 3342$ ，

取對數以 10 為底得 $k \geq \frac{\log 3 - \log 2}{\log 1.0087}$ 。

【第 2 題】取對數以 10 為底得 $\frac{2}{\log 1.28} \leq n \leq \frac{3}{\log 1.28}$ 。

三、評析與解法

在高中數學指數與對數的教材中，利用對數表作數的計算是介紹對數的重點。現今各版本教科書附錄的常用對數表，提供 1 到 10 之間每隔 0.01 的數之對數近似值到小數點後 4 位；若再配合所謂**表尾差**，可得 1 到 10 之間每隔 0.001 的數之對數近似值到小數點後 4 位。至於其他的數之對數值，要用對數的運算性質或內插法（利用直線上的點取代對數圖形上的點）求得。

【第 1 題】

解法一 由附表查表到小數 2 位，得 $\log 1.00 = 0.0000$, $\log 1.01 \approx 0.0043$ ，

再用內插法估算得 $\log 1.0087 \approx 0.003741$ ，於是 $k \geq \frac{\log 3 - \log 2}{\log 1.0087} \approx \frac{0.1761}{0.003741} \approx 47.07$ 。

解法二 由附表查表（加表尾差）到小數第 3 位，得 $\log 1.008 \approx 0.0033$, $\log 1.009 \approx 0.0037$ ，

再用內插法估算得 $\log 1.0087 \approx 0.00358$ ，於是 $k \geq \frac{\log 3 - \log 2}{\log 1.0087} \approx \frac{0.1761}{0.00358} \approx 49.19$ 。

【第 2 題】

解法一》 利用 $2^7 = 128$ 及對數的運算性質，得

$$\log 1.28 = \log \frac{2^7}{100} = 7 \log 2 - 2 \approx 7 \times 0.3010 - 2 \approx 0.1070，$$

$$\text{於是 } \frac{2}{\log 1.28} \approx \frac{2}{0.1070} \approx 18.69 \leq n \leq \frac{3}{\log 1.28} \approx \frac{3}{0.1070} \approx 28.04，$$

可取 $n = 19, 20, \dots, 28$ 共 10 個整數。

解法二》 查對數表得 $\log 1.28 \approx 0.1072$ ，

$$\text{於是 } \frac{2}{\log 1.28} \approx \frac{2}{0.1072} \approx 18.66 \leq n \leq \frac{3}{\log 1.28} \approx \frac{3}{0.1072} \approx 27.99，$$

可取 $n = 19, 20, \dots, 27$ 共 9 個整數。

讀者不難發現上述解法的差異，但要如何面對上述不同的結論呢？也許有些人認為：求近似值，結果產生誤差是正常的事！筆者卻不以為然，曾努力嘗試找出為什麼會產生上述差異的原因，並設法弭平歧異，茲提供一些心得供大家參考，並請先進們不吝賜教。

四、現象

- (1) 用電算器檢驗（ $\log 1.0087 \approx 0.003762$ ）發現第 1 題之「解法一」優於「解法二」，出乎意料之外，竟然多算了一位小數，反而不準。原來是在「解法二」中， $\log 1.008 \approx 0.0033$ 和 $\log 1.009 \approx 0.0037$ 錯了，也就是說，教科書中「表尾差」所給的數值錯了（誤差已超出取 4 位小數的標準 5×10^{-5} ）。
- (2) 用電算器檢驗顯示（ $\log 1.28 \approx 0.107210$ ），第 2 題之「解法二」優於「解法一」，實際上 $1.28^{28} \approx 1004.34 > 1000$ 。

五、展望

1. 對數表中的「表尾差」欄位應為區間範圍，而非單一整數值，以 1~4 之間「表尾差 9」為例：

N	範圍	教科書的表尾差	N	範圍	教科書的表尾差	N	範圍	教科書的表尾差
1.0*	35.7~38.9	37	2.0*	18.7~19.5	19	3.0*	12.6~13.0	13
1.1*	32.7~35.4	34	2.1*	17.8~18.6	18	3.1*	12.2~12.6	12
1.2*	30.2~32.5	31	2.2*	17.0~17.7	17	3.2*	11.9~12.2	12
1.3*	28.0~30.0	29	2.3*	16.3~17.0	17	3.3*	11.5~11.8	12
1.4*	26.2~27.8	27	2.4*	15.7~16.3	16	3.4*	11.2~11.5	11
1.5*	24.5~26.0	25	2.5*	15.1~15.6	15	3.5*	10.9~11.2	11
1.6*	23.1~24.4	24	2.6*	14.5~15.0	15	3.6*	10.6~10.8	11
1.7*	21.8~22.9	22	2.7*	14.0~14.5	14	3.7*	10.3~10.6	10
1.8*	20.6~21.7	21	2.8*	13.5~13.9	14	3.8*	10.0~10.3	10
1.9*	19.6~20.5	20	2.9*	13.1~13.5	13	3.9*	9.8~10.0	10

2. 使用對數表尾差，不切實際，應刪除「表尾差」的用法。

- (1) 使用對數表尾差，不如增加一位近似值（可取近似值到小數點後 5 位或 6 位）。以 $\log 3.60^*$, $\log 3.67^*$, $\log 3.68^*$ 為例：

對 數 表 $\log N$															
N	0	1	7	8	9		1	2	3	4	5	6	7	8	9
36	5563	5575				表尾差	1	2	4	5	6	7	8	10	11
						內插法	1.2	2.4	3.6	4.8	6.0	7.2	8.4	9.6	10.8
						實際上	1.21	2.41	3.62	4.82	6.03	7.23	8.44	9.64	10.84
36			5647	5658		內插法	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.6	7.7	8.8	9.9
						實際上	1.18	2.37	3.55	4.73	5.91	7.09	8.28	9.46	10.64
36(修正)			56467	56585		內插法	1.18	2.36	3.54	4.72	5.90	7.08	8.26	9.44	10.62
36				5658	5670	內插法	1.2	2.4	3.6	4.8	6.0	7.2	8.4	9.6	10.8
						實際上	1.18	2.36	3.54	4.72	5.90	7.08	8.25	9.43	10.61
36(修正)				565848	567026	內插法	1.18	2.36	3.53	4.71	5.89	7.07	8.25	9.42	10.60

- (2) 如果「表尾差」在 10 以內（ $\log 4$ 到 $\log 10$ 之間的數），「表尾差」形同虛設，因為我們會選擇使用內插法，以降低誤差值。以 $\log 3.9^{**}$, $\log 4.3^{**}$, $\log 5.4^{**}$, $\log 7.1^{**}$, $\log 8.6^{**}$ 為例：

對 數 表 $\log N$																				
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9										
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	表尾差	1	2	3	4	5	7	8	9	10
											內插法	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.6	7.7	8.8	9.9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	表尾差	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											內插法	1	2	3	4	5	6	7	8	9
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	表尾差	1	2	2	3	4	5	6	6	7
											內插法	0.8	1.6	2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4	7.2
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	表尾差	1	1	2	2	3	4	4	5	5
											內插法	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	表尾差	1	1	2	2	3	3	4	4	5
											內插法	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5

3. 科技發達，計算強的電算器已相當普遍，對於近似值的精確性更受重視，取到小數點後 4 位的常用對數表（現行高中數學教科書中的附表，誤差在 6×10^{-5} 範圍內），應當作修正，建議可採用下列對數表（取對數近似值到小數點後 6 位，誤差在 6×10^{-6} 範圍內），取代教科書中的常用對數表。

- (1) 常用對數表前半： $\log 1.00 \sim \log 5.00$ ；提供 1~2 之間每隔 0.01 的數之對數近似值到小數點後 6 位，及 2~5 之間每隔 0.02 的數之對數近似值到小數點後 6 位，其餘未提供的數可由內插法求得，此時誤差小於 6×10^{-6} 。

常用對數表前半 $\log N (1.00 \leq N < 5)$										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	000000	004321	008600	012837	017033	021189	025306	029384	033424	037426
11	041393	045323	049218	053078	056905	060698	064458	068186	071882	075547
12	079181	082785	086360	089905	093422	096910	100371	103804	107210	110590
13	113943	117271	120574	123852	127105	130334	133539	136721	139879	143015
14	146128	149219	152288	155336	158362	161368	164353	167317	170262	173186
15	176091	178977	181844	184691	187521	190332	193125	195900	198657	201397
16	204120	206826	209515	212188	214844	217484	220108	222716	225309	227887
17	230449	232996	235528	238046	240549	243038	245513	247973	250420	252853
18	255273	257679	260071	262451	264818	267172	269513	271842	274158	276462
19	278754	281033	283301	285557	287802	290035	292256	294466	296665	298853
20	301030		305351		309630		313867		318063	
21	322219		326336		330414		334454		338456	
22	342423		346353		350248		354108		357935	
23	361728		365488		369216		372912		376577	
24	380211		383815		387390		390935		394452	
25	397940		401401		404834		408240		411620	
26	414973		418301		421604		424882		428135	
27	431364		434569		437751		440909		444045	
28	447158		450249		453318		456366		459392	
29	462398		465383		468347		471292		474216	
30	477121		480007		482874		485721		488551	
31	491362		494155		496930		499687		502427	
32	505150		507856		510545		513218		515874	
33	518514		521138		523746		526339		528917	
34	531479		534026		536558		539076		541579	
35	544068		546543		549003		551450		553883	
36	556303		558709		561101		563481		565848	
37	568202		570543		572872		575188		577492	
38	579784		582063		584331		586587		588832	
39	591065		593286		595496		597695		599883	
40	602060		604226		606381		608526		610660	
41	612784		614897		617000		619093		621176	
42	623249		625312		627366		629410		631444	
43	633468		635484		637490		639486		641474	
44	643453		645422		647383		649335		651278	

45	653213		655138		657056		658965		660865	
46	662758		664642		666518		668386		670246	
47	672098		673942		675778		677607		679428	
48	681241		683047		684845		686636		688420	
49	690196		691965		693727		695482		697229	

- (2) 常用對數表後半： $\log 5.00 \sim \log 10.00$ ；提供 5~10 之間每隔 0.05 的數之對數近似值到小數點後 6 位，其餘未提供的數可由內插法求得，此時誤差小於 6×10^{-6} 。

常用對數表後半 $\log N (5.00 \leq N < 10)$											
N	5	6	7	8	9	N	5	6	7	8	9
00	698970	778151	845098	903090	954243	50	740363	812913	875061	929419	977724
05	703291	781755	848189	905796	956649	55	744293	816241	877947	931966	980003
10	707570	785330	851258	908485	959041	60	748188	819544	880814	934498	982271
15	711807	788875	854306	911158	961421	65	752048	822822	883661	937016	984527
20	716003	792392	857332	913814	963788	70	755875	826075	886491	939519	986772
25	720159	795880	860338	916454	966142	75	759668	829304	889302	942008	989005
30	724276	799341	863323	919078	968483	80	763428	832509	892095	944483	991226
35	728354	802774	866287	921686	970812	85	767156	835691	894870	946943	993436
40	732394	806180	869232	924279	973128	90	770852	838849	897627	949390	995635
45	736397	809560	872156	926857	975432	95	774517	841985	900367	951823	997823

六、結論

- 現有的常用對數表應淘汰。由於常用對數函數 $f(N) = \log N$ 的圖形為遞增且凹向下，對數表中的值應符合：當 $h > 0$ 時， $\log(N+h) - \log N < \log N - \log(N-h)$ 。也就是說，當真數間隔 h 相同時，對數值的差距隨著 N 增加愈來愈小。但現今教科書中的常用對數表竟不符合此性質。請觀察我們所建議的對數表，計算的結果列表如下：

$\log(N + 0.01) - \log N$ (其中 N 介於 1~2 之間)										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	4321	4279	4237	4196	4156	4117	4078	4040	4002	3967
	4300	4300	4200	4200	4200	4100	4100	4000	4000	4000
11	3930	3895	3860	3827	3793	3760	3728	3696	3665	3634
	3900	3900	3900	3800	3800	3800	3700	3700	3600	3700
12	3604	3575	3545	3517	3488	3461	3433	3406	3380	3353
	3600	3600	3500	3500	3500	3500	3400	3400	3400	3300
13	3328	3303	3278	3253	3229	3205	3182	3158	3136	3113
	3400	3300	3300	3200	3200	3200	3200	3200	3100	3100
14	3091	3069	3048	3026	3006	2985	2964	2945	2924	2905
	3100	3100	3000	3100	3000	3000	2900	3000	2900	2900

15	2886	2867	2847	2830	2811	2793	2775	2757	2740	2723
	2900	2800	2900	2800	2800	2800	2800	2800	2700	2700
16	2706	2689	2673	2656	2640	2624	2608	2593	2578	2562
	2700	2700	2700	2600	2700	2600	2600	2600	2600	2500
17	2547	2532	2518	2503	2489	2475	2460	2447	2433	2420
	2600	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2400	2500	2400
18	2406	2392	2380	2367	2354	2341	2329	2316	2304	2292
	2400	2400	2400	2300	2400	2300	2300	2400	2300	2300
19	2279	2268	2256	2245	2233	2221	2210	2199	2188	2177
	2200	2300	2300	2200	2300	2200	2200	2200	2200	2100

說明：(1) $\log 1.09 - \log 1.08 \approx 0.0040027$

(2) 表中粗體部份為教科書中常用對數表的「差值」；框線部份不符合上述「圖形凹向下的遞減性質」。

2. 對數取近似值到小數點後第 6 位最恰當。在取真數到小數兩位的前提下，內插法的誤差已接近 6×10^{-6} 。使用計算器實際操作得 $\log 1 = 0$ 與 $\log 1.01 = 0.004321373783$ ；由內插法得 $\log 1.005 = 0.002160686891$ ，與實際操作計算器得 $\log 1.005 = 0.002166061757$ ，其誤差小於 5.38×10^{-6} （此應為最大誤差）。

3. 由 101 對數表可導出常用對數表。

(1) 101 對數表提供 1~2 之間每隔 0.01 的數（共有 101 個數）之對數近似值到小數點後 6 位。

101 對數表 $\log N (1.00 \leq N \leq 2)$										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	000000	004321	008600	012837	017033	021189	025306	029384	033424	037426
11	041393	045323	049218	053078	056905	060698	064458	068186	071882	075547
12	079181	082785	086360	089905	093422	096910	100371	103804	107210	110590
13	113943	117271	120574	123852	127105	130334	133539	136721	139879	143015
14	146128	149219	152288	155336	158362	161368	164353	167317	170262	173186
15	176091	178977	181844	184691	187521	190332	193125	195900	198657	201397
16	204120	206826	209515	212188	214844	217484	220108	222716	225309	227887
17	230449	232996	235528	238046	240549	243038	245513	247973	250420	252853
18	255273	257679	260071	262451	264818	267172	269513	271842	274158	276462
19	278754	281033	283301	285557	287802	290035	292256	294466	296665	298853
20	301030									

(2) 2~4 之間每隔 0.02 的數之對數近似值由下列關係式導出：

$\log(2 + 0.02 \times h) = \log 2 + \log(1 + 0.01 \times h)$, $h = 0, 1, 2, \dots, 99$ ，其中 $\log 2$ 與 $\log(1 + 0.01 \times h)$ 為 101 對數表中的值。

對 數 表 $\log N (2 \leq N < 4)$										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	301030		305351		309630		313867		318063	
21	322219		326336		330414		334454		338456	
22	342423		346353		350248		354108		357935	
23	361728		365488		369216		372912		376577	
24	380211		383815		387390		390935		394452	
25	397940		401401		404834		408240		411620	
26	414973		418301		421604		424882		428135	
27	431364		434569		437751		440909		444045	
28	447158		450249		453318		456366		459392	
29	462398		465383		468347		471292		474216	
30	477121		480007		482874		485721		488551	
31	491362		494155		496930		499687		502427	
32	505150		507856		510545		513218		515874	
33	518514		521138		523746		526339		528917	
34	531479		534026		536558		539076		541579	
35	544068		546543		549003		551450		553883	
36	556303		558709		561101		563481		565848	
37	568202		570543		572872		575188		577492	
38	579784		582063		584331		586587		588832	
39	591065		593286		595496		597695		599883	

(3) 4~5 之間每隔 0.025 的數之對數近似值由下列關係式導出：

$\log(5 - 0.025 \times h) = 1 - 2\log 2 + \log(2 - 0.01 \times h)$, $h = 0, 1, 2, \dots, 40$ ，其中 $\log 2$ 與 $\log(2 - 0.01 \times h)$ 為 101 對數表中的值。

對 數 表 $\log N (4 \leq N \leq 5)$									
N	00	25	50	75	N	00	25	50	75
40	602060	604766	607455	610128	46	662758	665112	667453	669782
41	612784	615424	618048	620656	47	672098	674402	676694	678973
42	623249	625827	628389	630936	48	681241	683497	685742	687975
43	633468	635986	638489	640978	49	690196	692406	694605	696793
44	643453	645913	648360	650793	50	698970			
45	653213	655619	658011	660391					

(4) 5~10 之間每隔 0.05 的數之對數近似值由下列關係式導出：

$\log(5 + 0.05 \times h) = 1 - \log 2 + \log(1 + 0.01 \times h)$, $h = 0, 1, 2, \dots, 99$ ，其中 $\log 2$ 與 $\log(1 + 0.01 \times h)$ 為 101 對數表中的值。

對 數 表 $\log N$ ($5.00 \leq N < 10$)											
N	5	6	7	8	9	N	5	6	7	8	9
00	698970	778151	845098	903090	954243	50	740363	812913	875061	929419	977724
05	703291	781755	848189	905796	956649	55	744293	816241	877947	931966	980003
10	707570	785330	851258	908485	959041	60	748188	819544	880814	934498	982271
15	711807	788875	854306	911158	961421	65	752048	822822	883661	937016	984527
20	716003	792392	857332	913814	963788	70	755875	826075	886491	939519	986772
25	720159	795880	860338	916454	966142	75	759668	829304	889302	942008	989005
30	724276	799341	863323	919078	968483	80	763428	832509	892095	944483	991226
35	728354	802774	866287	921686	970812	85	767156	835691	894870	946943	993436
40	732394	806180	869232	924279	973128	90	770852	838849	897627	949390	995635
45	736397	809560	872156	926857	975432	95	774517	841985	900367	951823	997823

七、後記：

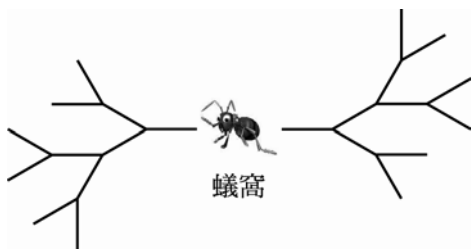
據悉高中數學 98 綱要已刪除「表尾差」教學，屆時教科書附錄的對數表不應該出現表尾差的欄位（此部分猶如畫蛇添足），各界何不趁此時機附上 6 位小數的常用對數表。

三用瓶塞...三度空間的設計大師

◎許志農／台灣師範大學數學系

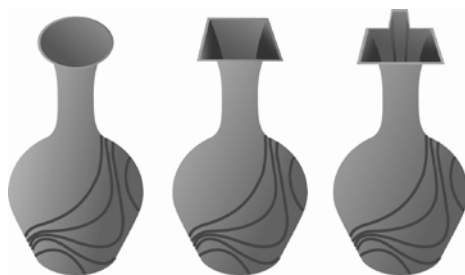
螞蟻只能看到平面(二維空間)的事物，只能在二維空間內做 360° 方向上的任意運動。雖然螞蟻只生活在平面上，但是科學家卻發現螞蟻天生具有某種幾何的洞悟力，能利用幾何原則尋找回窩的路。螞蟻的路線系統就像羅馬人的道路一樣…條條道路通羅馬；對螞蟻來說…條條路線通蟻窩。

要了解螞蟻尋找方向的訣竅，可以假想有一個「Y」字母的交叉點，而一隻離開蟻窩的螞蟻從「Y」字母底下往上爬，碰到這樣一個叉路，發現有兩條以狹窄角度交叉的路線。相反地，回窩的螞蟻會碰到兩條叉路：一條的交叉角度較小，而另一條的角度大得多，角度較大的那一條路才是回家的路。也就是說，螞蟻的網路是由「Y」字來構成，而且較小的交叉角是 60° 左右，科學家稱它為「六十度法則」。如下圖所示，一隻螞蟻從蟻窩出來，朝東邊方向以六十度法則向外覓食，而這蟻窩的螞蟻構造了向東及向西兩個方向的覓食網：

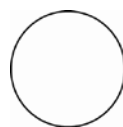


雖然螞蟻的世界只有二維，但是牠們卻會使用二維的幾何原則來辨識方向。同樣的，身處三維空間的人們，是否也會妥善利用立體空間的幾何所帶來的好處呢？

1. 某人收集了三只瓶子，形狀如下圖所示：



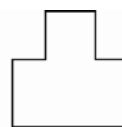
它們的瓶口形狀分別如圖一、二及三。現在他想只做一個立體瓶塞，對三個瓶子都能適用。



圖一



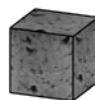
圖二



圖三

請你幫他設計一下。

拜我們生活的三維空間所賜，可以利用三個維度來設計一個一體適用的瓶塞。取一個正立方體木塞，因為立方體有上下，前後及左右等六個面，所以可以讓這三種面向各自成為三種瓶子的瓶塞。首先，讓上下面與方形瓶口一樣大小，接著讓前後面與凸形瓶口一致，最後讓左右面跟圓形瓶口相同，這個特製的瓶塞剛好可以用來當這三種瓶子的瓶塞，如下圖所示：



利用 **雙十字交乘法** 來剖析：

為何 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 且 $b^2 - 4ac > 0$ 的圖形

為雙曲線或相交的兩直線？

◎李維昌／國立宜蘭高中

研究目的

教師在學生無平移及旋轉觀念的前提下，利用雙十字交乘法來解釋

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \text{ 且 } b^2 - 4ac > 0,$$

其圖形為雙曲線或相交的兩直線。

研究過程

分成兩種情況來討論。

一、 $b^2 - 4ac > 0$ 且 $c \neq 0$ ：

利用雙十字交乘法，可將 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 表為

$$c \left(y + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} x + \alpha \right) \left(y + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} x + \beta \right) = c\alpha\beta - f,$$

$$cy^2 + bxy + ax^2 = c \left(y + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} x \right) \left(y + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} x \right),$$

$$\text{且 } \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{e}{c} \\ \left(\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right) \alpha + \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right) \beta = \frac{d}{c} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \alpha = \frac{e + \frac{be - 2cd}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2c} \\ \beta = \frac{e - \frac{be - 2cd}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2c} \end{cases}.$$

又

$$c\alpha\beta - f = c \left(\frac{e + \frac{be - 2cd}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2c} \right) \left(\frac{e - \frac{be - 2cd}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2c} \right) - f = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix}}{b^2 - 4ac}.$$

因此 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 等價為

$$c \begin{pmatrix} y + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}x + \frac{e + \frac{be - 2cd}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2c} \\ y + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}x + \frac{e - \frac{be - 2cd}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2c} \end{pmatrix} \\ = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix}}{b^2 - 4ac}.$$

$$(1) \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 0, \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \text{ 的圖形為相交兩直線,}$$

其方程式分別為

$$y + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}x + \frac{e + \frac{be - 2cd}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2c} = 0 \quad \text{及} \\ y + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}x + \frac{e - \frac{be - 2cd}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2c} = 0,$$

交點坐標為

$$\left(\frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}, \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac} \right).$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \neq 0, \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \text{ 的圖形為雙曲線,}$$

兩漸近線的方程式分別為

$$y + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}x + \frac{e + \frac{be - 2cd}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2c} = 0 \quad \text{及} \\ y + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}x + \frac{e - \frac{be - 2cd}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2c} = 0,$$

交點坐標為

$$\left(\frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}, \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac} \right).$$

此交點坐標亦為雙曲線的中心點坐標。

二、 $b^2 - 4ac > 0$ 且 $c = 0 \Rightarrow b \neq 0$:

利用雙十字交乘法，可將 $ax^2 + bxy + dx + ey + f = 0$ 表為

$$(x + \alpha)(ax + by + \beta) = \alpha\beta - f,$$

$$ax^2 + bxy = x(ax + by) \text{ 且 } \begin{cases} a\alpha + \beta = d \\ b\alpha = e \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \alpha = \frac{e}{b} \\ \beta = \frac{bd - ae}{b} \end{cases}.$$

又

$$\alpha\beta - f = \left(\frac{e}{b}\right)\left(\frac{bd - ae}{b}\right) - f = \frac{bde - ae^2 - b^2f}{b^2} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix}}{b^2 - 4ac}.$$

因此 $ax^2 + bxy + dx + ey + f = 0$ 等價為

$$\left(x + \frac{e}{b}\right)\left(ax + by + \frac{bd - ae}{b}\right) = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix}}{b^2 - 4ac}.$$

$$(1) \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 0, \quad ax^2 + bxy + dx + ey + f = 0 \text{ 的圖形為相交兩直線,}$$

其方程式分別為

$$x + \frac{e}{b} = 0 \quad \text{及} \quad ax + by + \frac{bd - ae}{b} = 0,$$

交點坐標為

$$\left(-\frac{e}{b}, \frac{2ae - bd}{b^2}\right) = \left(\frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}, \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}\right).$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \neq 0, \quad ax^2 + bxy + dx + ey + f = 0 \text{ 的圖形為雙曲線,}$$

兩漸近線其方程式分別為

$$x + \frac{e}{b} = 0 \quad \text{及} \quad ax + by + \frac{bd - ae}{b} = 0,$$

交點坐標為

$$\left(-\frac{e}{b}, \frac{2ae - bd}{b^2}\right) = \left(\frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}, \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}\right).$$

此交點坐標亦為雙曲線的中心點坐標。

●
結論

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 且 $b^2 - 4ac > 0$,

(1) $\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 0$, 其圖形為相交的兩直線。

(2) $\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \neq 0$, 其圖形為雙曲線。



康托爾 (Cantor, Georg, 1845 - 1918)

《在數學的領域中，提出問題的藝術比解答問題的藝術更為重要》



台北縣公立高中89學年度第二屆數學競賽

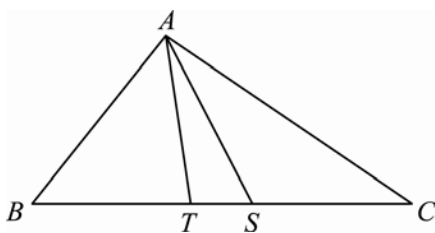
《版本一》

1 試證： $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{12}$. (15%)

2 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 為六個相異的整數，若 k 為 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 六數的算術平均， r 為 $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)(x-a_6)=1989$ 的整數根，試證： $|k-r|=5$. (15%)

3 若 p, q, r 為三個相異質數且 $p^2 + 35 = q^2 r$ ，試求： $(p, q, r) = ?$ (20%)

4 如下圖， $\triangle ABC$ 中 $\angle B > \angle C$ ，若 T 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{AT}$ 為 $\angle CAB$ 的內角平分線，若 S 在 $\overline{AT}$ 上使得 $\overline{SB} = \overline{TC}$ ，試證： $(\overline{AC} - \overline{AB})^2 = (\overline{AS})^2 - (\overline{AT})^2$. (20%)



5 (a) $a, b, c > 0$ 且 $a+b+c=1$ ，試證： $\left(\frac{a}{1+b+c} + \frac{b}{a+1+c} + \frac{c}{a+b+1}\right) \geq \frac{3}{5}$. (15%)

(b) 若 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 均大於零且 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = k$ ，請你推廣(a)的結果，試估計

$\left(\frac{a_1}{k+a_2+a_3+\dots+a_n} + \frac{a_2}{a_1+k+a_3+\dots+a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+k}\right)$ 的下界。(15%)

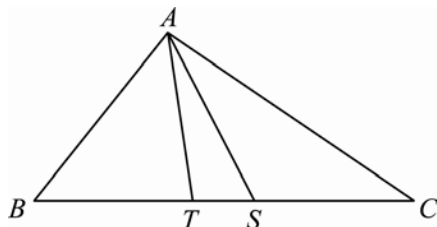
《版本二》

1 試證： $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{12}$. (15%)

2 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 為六個相異的整數，若 k 為 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 六數的算術平均， r 為 $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)(x-a_6)=1989$ 的整數根，試證： $|k-r|=5$. (15%)

3 若 p, q, r 為三個相異質數且 $p^2 + 35 = q^2 r$ ，試求： $(p, q, r) = ?$ (15%)

4 如下圖， $\triangle ABC$ 中 $\angle B > \angle C$ ，若 T 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{AT}$ 為 $\angle CAB$ 的內角平分線，若 S 在 $\overline{AT}$ 上使得 $\overline{SB} = \overline{TC}$ ，試證： $(\overline{AC} - \overline{AB})^2 = (\overline{AS})^2 - (\overline{AT})^2$. (20%)



5 題組：以下三小題中(a)、(b)是獨立的，但卻是(c)小題證明的重要關鍵。

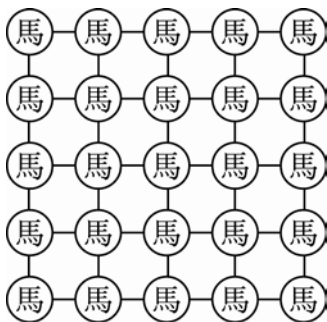
(a) x, y, z 為正實數，試證： $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$. (10%)

(b) $\triangle ABC$ 內部一點 P ，若 $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}$ 的延長線分別交 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 於 D, E, F 三點，
試證： $\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CF}} = 2$. (15%)

(c) 銳角三角形的外心為 O ，其外接圓半徑為 R ，若 $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$ 的延長線分別交對邊於 D, E, F 三點，試證： $\overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF} \geq \frac{3}{2}R$. (10%)

《版本三》

- 1 不論 a, b 是任何相異整數， $ab^5 - a^5b$ 必為正整數 m 的倍數，則 m 最大可能為何？（15%）
- 2 若 n 為 10^9 之正因數個數， $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ 表示 10^9 之所有正因數，試求： $\sum_{k=1}^n \log \frac{1}{3k}$ 之值。（15%）
- 3 試證： $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{12}$ 。（15%）
- 4 三角形之外接圓半徑 R 和內切圓半徑 r 之間，有不等式： $R \geq 2r$ 之關係。若 a, b, c 代表任一三角形之三邊長，請你根據這個事實證明： $(a-b-c)(a-b+c)(b+c-a) \leq abc$ 。（20%）
- 5 若 p, q, r 為三個相異質數且 $p^2 - 35 = q^2 r$ ，試求： $(p, q, r) = ?$ （20%）
- 6 在象棋的規則中：「馬」的走法是要走「日」的字形；如下圖，在 5×5 的棋盤上，每個位置中都放一隻馬，若所有的「馬」同時起跳，跳往下一個位置，請問是否所有的「馬」都有落腳處？而不會有兩隻「馬」跳到同一格中？（15%）



test

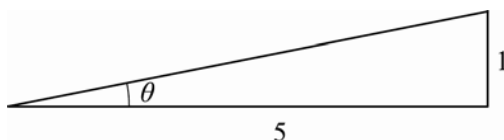
國立成功大學數學系 96 學年度 申請入學

數學科試題 B 卷

一、已知 $a \neq b$ ，求以下方程式之解

$$\begin{vmatrix} a+b & x & (a+b)^2 \\ x+b & a & (x+b)^2 \\ x+a & b & (x+a)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

二、下圖為一直角三角形。請問 8θ 是銳角、直角或鈍角？



三、假設你在進行一個遊戲節目：有三扇門供你選擇，一扇門後面是一輛轎車，另兩扇門後面分別都是一頭山羊。你的目的當然是想得到比較值錢的轎車，但你並不能看到門後面的真實情況。主持人先讓你作第一次選擇；在你選擇了一扇門後，知道其餘兩扇門後面是什麼的主持人，打開了另一扇門給你看，裡面是一頭山羊。現在主持人告訴你，你還有一次選擇的機會。那麼，請你考慮一下，你是堅持第一次的選擇不變，還是改變第一次的選擇，而選擇另一扇門，會更有可能得到轎車？為什麼？

四、已知 f 是從實數映至實數的函數，滿足 $f(1) = \sqrt{2}$ 且對所有的有理數 a, b ，等式

$$f(a-b) = \frac{f(a)}{f(b)}$$

恆成立，求下列各值

(a) $f(0) = ?$ (b) $f\left(\frac{4}{3}\right) = ?$

五、 $\triangle ABC$ 中，若外心為 O ，垂心為 H ，試證

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$$

【提示】可使用外心、垂心的向量公式：

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2, \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}^2,$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2).$$

六、定義 $\sigma(n)$ 為 n 的所有正因數之和，例如：

$$\sigma(3) = 1 + 3 = 4, \sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7.$$

證明：如果 m, n 互質，那麼 $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ 。

七、有一 10×10 公分的正方形。

(a) 設有 101 點在正方形內部，證明：必存在兩點，其距離 $\leq \sqrt{2}$ 公分。

(b) 設有 90 點在正方形內部，證明：必存在兩點，其距離 $\leq \sqrt{2}$ 公分。

【提示】 $\pi > 3$ ，而 $\sqrt{2} < 1.5$ 。

八、令 S 為球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ， L 為直線 $\{x = 3, y = 0\}$ ， R 為點 $(1, 3, 2)$ 。考慮一

動點 P 在球 S 上移動，另一動點 Q 在線 L 上移動，請問 $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ 的最小值為何？

國立成功大學數學系 96 學年度 申請入學

數學科試題 B 卷詳解

- 一、利用三階行列式的公式得知，展開式至多為 x 的四次式，但 x^4 項的係數互相消掉（為 0），因此展開式至多為 x 的三次式。將 $x = a, b$ 及 $x = -a - b$ 分別代入，各有兩列相等，即三階行列式為 0。又將 $x = 0$ 代入，得行列式為 $2ab(b^2 - a^2) \neq 0$ 。所以展開式為 x 的三次式，而且該三次式的兩根為 a, b 與 $-a - b$ 。故方程式的解為 a, b 與 $-a - b$ 。

【註】本題亦可直接利用三階行列式的展開公式求方程式的解。

- 二、利用正切的倍角公式，得

$$\tan \theta = \frac{1}{5};$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{5}{12};$$

$$\tan 4\theta = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{5^2}{12^2}} = \frac{120}{119}.$$

因為 $\tan 4\theta = \frac{120}{119} > 1$ ，所以

$$4\theta > 45^\circ,$$

即 $8\theta > 90^\circ$ 。故 8θ 是鈍角。

- 三、顯然第一次選擇得轎車的機率為 $\frac{1}{3}$ ，沒得的機率為 $\frac{2}{3}$ 。因此，選擇後不改變，獲得轎車的機率為 $\frac{1}{3}$ 。但選擇後改變的話，分兩種情形討論：

- (1) 當第一次選到轎車時，這種情形在改變後無法得到轎車。所以這種情形獲得轎車的機率為 0。

(2) 當第一次沒選到轎車時，這種情形在改變後一定得到轎車。而因為第一次沒選

到轎車的機率有 $\frac{2}{3}$ ，所以這種情形獲得轎車的機率為 $\frac{2}{3}$ 。

改變得到轎車機率為

$$0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

因此，改變第一次的選擇更有可能得到轎車。

四、(a) 利用 $f(1) = \sqrt{2}$ ，得

$$f(0) = f(1-1) = \frac{f(1)}{f(1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

(b) 由 $f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{f\left(\frac{2}{3}\right)}{f\left(\frac{1}{3}\right)}$ ，得

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

由 $f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{f(1)}{f\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{f\left(\frac{1}{3}\right)}$ ，得

$$\sqrt{2} = f\left(\frac{2}{3}\right) f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

因為 $f\left(\frac{1}{3}\right)$ 是實數，所以 $f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{2}$ 。

再由 $\sqrt{2} = f(1) = f\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{f\left(\frac{4}{3}\right)}{f\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{f\left(\frac{4}{3}\right)}{\sqrt[3]{2}}$ ，得

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt[3]{16}.$$

五、令 G 是重心，尤拉線性質說： H, G, O 三點共線，且 $\overline{HG}:\overline{GO}=2:1$ 。利用

$$\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\vec{0}$$

及尤拉線性質，得

$$\begin{aligned}\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC} &= (\overline{OG}+\overline{GA})+(\overline{OG}+\overline{GB})+(\overline{OG}+\overline{GC}) \\ &= 3\overline{OG} \\ &= \overline{OH}.\end{aligned}$$

【另解】設 $\overline{AH}=x\overline{OB}+y\overline{OC}$ 。因為 $\overline{AH}\cdot\overline{AB}=x\overline{OB}\cdot\overline{AB}+y(\overline{OA}+\overline{AC})\cdot\overline{AB}$ ，所以

$$\frac{1}{2}(c^2+b^2-a^2)=x\overline{BO}\cdot\overline{BA}+y(\overline{AB}\cdot\overline{AC}-\overline{AO}\cdot\overline{AB}),$$

即

$$\frac{1}{2}(c^2+b^2-a^2)=x\cdot\frac{1}{2}c^2+y\left(\frac{1}{2}(c^2+b^2-a^2)-\frac{1}{2}c^2\right).$$

整理，得

$$c^2x+(b^2-a^2)y=b^2+c^2-a^2.$$

同理，利用 $\overline{AH}\cdot\overline{AC}=x(\overline{CA}\cdot\overline{CO}-\overline{CA}\cdot\overline{CB})+y\overline{CA}\cdot\overline{CO}$ ，可以推得

$$\frac{1}{2}(c^2+b^2-a^2)=x\left(\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}(b^2+a^2-c^2)\right)+\frac{1}{2}b^2y,$$

整理，得

$$(c^2-a^2)x+b^2y=b^2+c^2-a^2.$$

將上述兩個式子相減，得 $x=y$ ，再代入第一個式子，得 $x=y=1$ ，即

$$\overline{AH}=\overline{OB}+\overline{OC}.$$

故

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{AH}=\overline{OH}.$$

六、將 m, n 因式分解，得

$$m=p_1^{d_1}p_2^{d_2}\cdots p_r^{d_r}, n=q_1^{e_1}q_2^{e_2}\cdots q_s^{e_s}.$$

因為 m, n 互質，所以 $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_s$ 是不同的質數，而且

$$\sigma(m) = (1 + p_1^1 + p_1^2 + \dots + p_1^{d_1}) \cdots (1 + p_r^1 + p_r^2 + \dots + p_r^{d_r}),$$

$$\sigma(n) = (1 + q_1^1 + q_1^2 + \dots + q_1^{e_1}) \cdots (1 + q_s^1 + q_s^2 + \dots + q_s^{e_s}).$$

又因為 mn 的因式分解為 $p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_r^{d_r} \cdot q_1^{e_1} q_2^{e_2} \cdots q_s^{e_s}$ ，所以 $\sigma(mn)$ 為

$$(1 + p_1^1 + p_1^2 + \dots + p_1^{d_1}) \cdots (1 + p_r^1 + p_r^2 + \dots + p_r^{d_r}) \\ \times (1 + q_1^1 + q_1^2 + \dots + q_1^{e_1}) \cdots (1 + q_s^1 + q_s^2 + \dots + q_s^{e_s}),$$

即

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n).$$

七、分析如下：

- (a) 將正方形的長與寬各平分 10 等分，此時正方形被分成 100 個邊長 1 公分的小正方形。因為有 101 點在正方形內部，所以必定有一個小正方形內有 2 點或超過 2 點。這兩點的距離 $\leq$ 小正方形的對角線長 $\sqrt{2}$ 公分，得證。
- (b) 把 90 個點放進正方形後，以每個點為圓心， $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 為半徑作圓。假設任兩圓都不重疊，也就是說，這 90 個圓所覆蓋的總面積為

$$90 \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \geq 90 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 135.$$

又把原先的正方形往上下左右四方向再延伸 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 後，成為邊長 $10 + \sqrt{2}$ 的正方形，而且這 90 個圓都落在這新的正方形內，所以這 90 個圓所覆蓋的總面積小於或等於新的正方形面積，即

$$\leq (10 + \sqrt{2})^2 \leq (10 + 1.5)^2 = 132.5.$$

上述兩個不等式顯然互相矛盾，故假設錯誤，這 90 個圓中，會有兩個互相重疊，即這兩個圓的圓心距離不超過 $\sqrt{2}$ ，得證。

八、將 $R(1,3,2)$ 繞直線 L 一圈，這一圈的半徑為

$$\sqrt{(3-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}.$$

因為這圈上的任一點至直線 L 的動點 Q 之距離都一樣，所以 R 可以用這圈上的其他點取代。因為直線 L 在 $y=0$ 的平面上，又這一圈與平面 $y=0$ 的交點為 $(3 \pm \sqrt{13}, 0, 2)$ ，令 $R'(3 + \sqrt{13}, 0, 2)$ 。此時

$$\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PQ} + \overline{QR'} \leq \overline{OR'} - 1,$$

這裡的 O 是原點，而且等號在 O, P, Q, R' 共同在一直線時成立。故最小值為

$$\sqrt{(3 + \sqrt{13})^2 + 2^2} - 1 = \sqrt{26 + 6\sqrt{13}} - 1.$$

專欄

動手玩數學

◎許志農／台灣師範大學數學系



印度間諜南星在前往拉薩的途中遇到搶匪，南星落荒而逃，轉往一條小路。翌日發現太陽在他逃亡小路正前方偏右 120° 的方向升起。南星回想被搶當晚，北極星出現在前往拉薩之路正前方偏左 50° 的方位上。

遊戲 21
☆☆



問南星前往拉薩之路與落荒而逃的小路夾角是幾度？（太陽升起的方向算為正東，北極星出現的方向算為正北。）

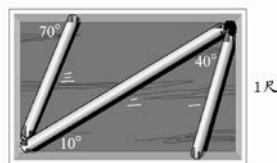
〔玩鎖・玩索〕

笛卡爾創立直角坐標系，可以將許多平面幾何問題代數化處理，但是，哪些應該定坐標系解決，哪些不需要，是最難拿捏的地方。這是一道同時使用「直角坐標」與「有向角」這兩個數學概念的題目。設計這題目的想法是 Discovery 曾經介紹過這位有名的印度間諜。



霍師父的三節棍被收藏在高度 1 尺的矩形木框內供遊客欣賞，如下圖所示：

遊戲 22
☆☆☆☆☆



霍師父的徒弟追憶說：「師父習武時，都會把前兩節直立，讓第三節自然下垂，垂下的點剛好在師父的頭頂位置。」試求霍師父的身高。



〔玩鎖・玩索〕

利用銳角三角函數將三節棍的三小節表成三角函數的形式，再利用和差化積的公式求得霍師父的身高。在求霍師父的身高過程中，知道 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ 的值是有幫助的，而且這個連乘積的求法很有名，也很特別。因為

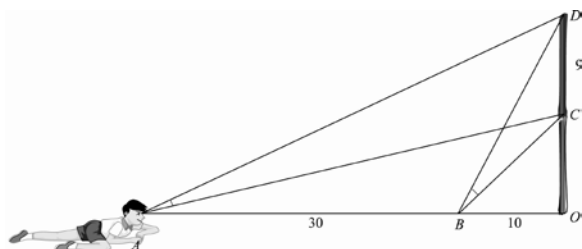
$$\begin{aligned} & 8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ \\ &= \sin 160^\circ = \sin 20^\circ, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$



小傻瓜在離竹竿 40 公尺的 A 點與爬行前進 30 公尺後的 B 點，仰望竹竿上方的黑色竹竿部分，感覺黑色竹竿的視角都一樣。如下圖所示：

☆☆☆

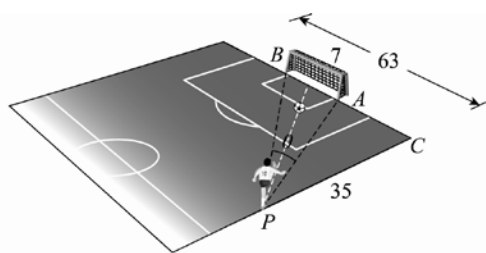


已知黑色竹竿長 9 公尺，而且整根竹竿直立在地面上，讓我們以引導的方式求竹竿白色部分的長度。

- (1) 四點 A, B, C, D 有何特殊性質，解釋之。
- (2) 求竹竿白色部分的長度。
- (3) 小傻瓜在爬向竹竿的路上，在離竹竿多遠處會是仰望黑色竹竿所張的視角最大之地點。

〔玩鎖・玩索〕

「視角問題」是日常生活中經常碰到的問題，例如到畫廊看掛在牆壁上的畫，或者欣賞立在台柱上的雕刻品，總是要選擇所張視角最大的點站立，才可以一窺藝術品的全貌與精髓。又如下圖中，足球選手在邊線的哪一個點起腳射門會有最大的視角，也是球員會碰到的問題。



到底哪一個點所張的視角最大，這可是中學生就能解決的數學問題。

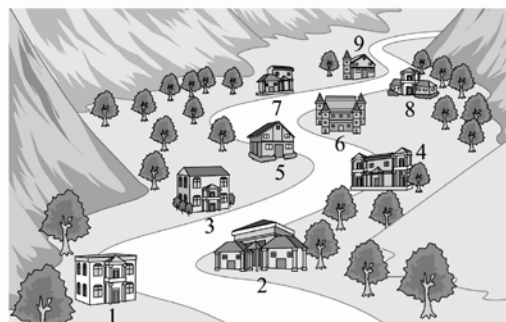
問題(3)就是所謂的「所張的視角最大問題」，它是法國數學家雷吉蒙塔努斯在 1471 年提出的，這也可能是自古以來第一個極值問題。雖然是極值問題，但是中學所學過有關「圓」的知識就足以解決這道問題。



一般街道門牌號碼的編碼原則是從 1, 2, 3, 4, ... 編起，奇數號門牌與偶數號門牌編在街道的不同邊。

遊戲 24

☆☆



汀菱的別墅座落在環山路偶數號門牌的最後一棟，學數學的汀菱常使用數學語言自豪的說：「對邊所有門牌號碼的總和比我家門牌號碼還多出 323 號。」

已知環山路兩邊的門牌號碼依 1, 2, 3, 4, 5, ... 的次序編排，而且完全沒有跳號或漏號，求汀菱的別墅門牌號碼是幾號？

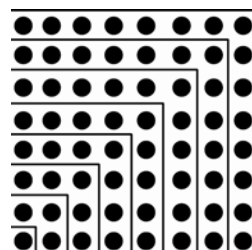
〔玩鎖・玩索〕

級數

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

可以透過等差級數的求和公式得到，也可以利用數學歸納法證明，甚至可以使用下圖的「無字證明」模式來詮釋：

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$



談到「無字證明」，必須介紹尼爾森所寫的兩本無字證明的書（Proof Without Words I & II）。所謂的無字證明就是透過簡易的幾何規律，讓讀者相信或看出欲證明的式子是明顯成立的。當讀者還無法領悟時，只需少許的提示或解說就可以明白。想要達到這樣的神奇效果，必須有很簡易且巧妙的幾何圖形才辦得到。透過這道級數和，應該不難算出汀菱家的門牌號碼。

動手玩數學~破解秘笈

第5期

遊戲 17

設兩根蠟燭原本長度都是 1，斷電時間為 t 小時。
列式為

$$\left(1 - \frac{t}{5}\right) = 4\left(1 - \frac{t}{4}\right) \Rightarrow 1 - \frac{t}{5} = 4 - t,$$

解得 $t = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ ，即斷電時間 3 小時 45 分。

遊戲 18

設藍布料買了 x 俄尺，黑布料買了 y 俄尺；此時，
買藍布料花了 $3x$ 盧布，買黑布料花了 $5y$ 盧布。列
式得

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + y = 138 \\ 3x + 5y = 540 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} 5x + 5y = 690 \\ 3x + 5y = 540 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} x = 75 \\ y = 63. \end{cases} \end{aligned}$$

遊戲 19

(1) 由計算機或電腦知黃金比值

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

(2) 設志玲應穿 x 公分（整數）高的高跟鞋，由黃
金比值知

$$\frac{x + 173}{x + 105} = 1.618$$

$$\Rightarrow 0.618x = 173 - 105 \times 1.618$$

解得 $x \approx 5.03$ ，志玲應該穿 5 公分高的高跟
鞋。

遊戲 20

將蝸牛爬行的平面坐標化，並令蝸牛原來的位置為
原點 $(0,0)$ ，從題意得知，蝸牛向東前行 1 公尺相
當於移動向量 $\vec{a} = (1,0)$ ，蝸牛向西 60° 北的方向前

行 1 公尺相當於移動向量 $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 。

令蝸牛有 p 天向東前行 1 公尺， q 天向西 60° 北的
方向前行 1 公尺，即蝸牛移動了向量

$$p\vec{a} + q\vec{b} = (p, 0) + \left(-\frac{q}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}q\right) = \left(p - \frac{q}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}q\right),$$

而且 $n = p + q$ 。因為 n 天後，蝸牛在正北方，所

以 $p - \frac{q}{2} = 0$ ，即 $p = \frac{q}{2}$ 。代入 $n = p + q$ ，得

$$q = \frac{2}{3}n。此時$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}q = \frac{\sqrt{3}}{3}n。$$

故經過 n 個晚上的爬行之後，蝸牛的位置在原來位
置的正北方 $\frac{\sqrt{3}}{3}n$ 公尺處。