

許教授講故事

STORY

◎許志農／台灣師範大學數學系

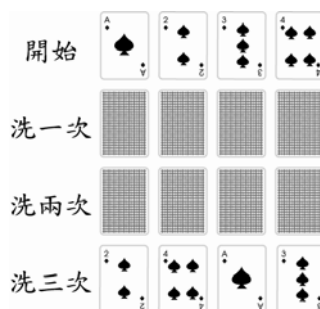
尼采在《拜火教教主如是說》這本書裡，有一段耐人咀嚼的哲學思考：「當你見到猴子笨拙的行為時，你該覺得好笑還是自卑呢？到底是取笑猴子的不靈活，笨手笨腳的行為，還是對笨拙的猴子可以演化出人類，而我們似乎很難比牠們進步得更多感到自卑呢？」

人類之所以異於動物，主要是具有靈巧的雙手與聰明的大腦。據說一百多年前當科學家還無法了解頭腦內部結構時，就以頭殼的外型來測量智商的多寡。就是科學昌明的現代，還是有很多人相信皮指紋分析可以找出孩子的才能，用指紋的「渦紋」和「蹄狀紋」兩種紋路來判斷性格及命運傾向。

就讓我們來欣賞一道具有靈巧雙手，但頭腦普通的猴子所玩的把戲：



1 有一隻會洗牌的猴子，牠只會洗四張牌，而且每次都用同樣的模式洗牌。猴子的主人拿出分別寫著 1,2,3,4 的四張牌給猴子，並將牌子排好，讓由上而下順序為編號 1,2,3,4 的四張牌，如下圖的第一列所示。



猴子洗第一次牌後不讓主人看牌子的順序，接著洗第二次牌仍然不給主人看，然後猴子洗第三次牌並讓主人看牌號的順序。這時主人發現從上而下的牌號為

2, 4, 1, 3.

猴子的主人想了一下說：「我知道猴子洗第一次牌後，牌號從上而下的順序。」你知道嗎？

洗牌的方式有很多種，但無論如何洗，最後它總是 1,2,3,4 這四個數字重新排列，又四個數字排成一列計有

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

種不同的排法，所以只需仔細討論這 24 種排法中，哪一種可以在經歷三次同樣操作後，順序變成 2,4,1,3 即可。我們把這 24 種排列（以下稱為洗牌法）根據其特性分成三大類：

(1) 有固定點的洗牌法

如下圖所示，在洗一次牌後，順序為

2, 4, 3, 1.

將這順序跟開始的

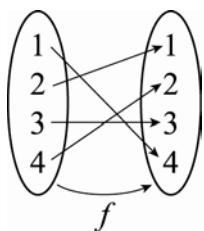
1, 2, 3, 4

比較，將會發現 3 號牌沒有變動。

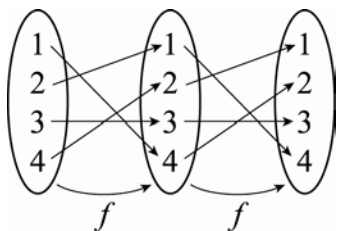


像這種有固定點的洗牌法，無論洗幾次，固定的牌還是紋風不動。在猴子洗牌遊戲中，洗三次之後並沒有固定不動的牌，所以猴子會的洗牌法不屬於這種。

為了節省操作空間及方便解釋，在這裡我們引入函數的關係來解釋洗牌；前面所提的洗牌法（將 1 洗到 4 的位置，2 洗到 1 的位置，3 洗到 3 的位置，4 洗到 2 的位置）也可以用如下的函數 f 來表示。



從圖中不難發現水平的對應箭號→就是不動牌 3 的位置。當以這樣的洗牌方式洗兩次時，會對應到合成函數 $f^2 = f \circ f$ 的結果，圖示如下。



此時，

1 號牌會洗到

$$f^2(1) = f(f(1)) = f(4) = 2 \text{ 的位置，}$$

2 號牌會洗到

$$f^2(2) = f(f(2)) = f(1) = 4 \text{ 的位置，}$$

3 號牌會洗到

$$f^2(3) = f(f(3)) = f(3) = 3 \text{ 的位置，}$$

4 號牌會洗到

$$f^2(4) = f(f(4)) = f(2) = 1 \text{ 的位置。}$$

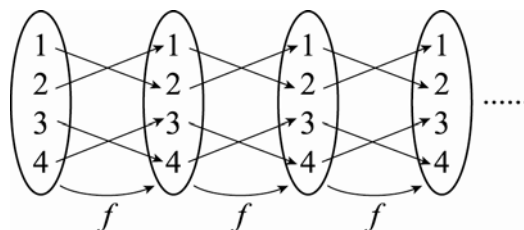
不過，從圖中的合成更容易看到這樣的洗牌效果。

(2) 分成兩群的洗牌法

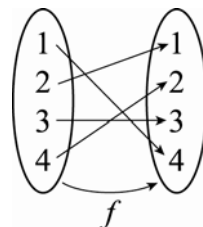
有一種比較奇怪的洗牌方法，例如洗完之後從上而下的牌號為

2, 1, 4, 3.

這種洗牌法所對應的洗牌函數 f 為

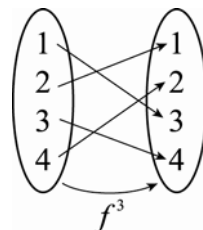


從洗牌函數 f 的合成中發現，無論洗幾次總是 1 與 2 位置的牌互相輪換，3 與 4 位置的牌互相輪換。又(1)中所舉例的洗牌函數



因為 3 的位置固定不動，其餘位置是 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 的輪換，所以也算是分成 {3} 與 {1, 2, 4} 兩群的洗牌法。

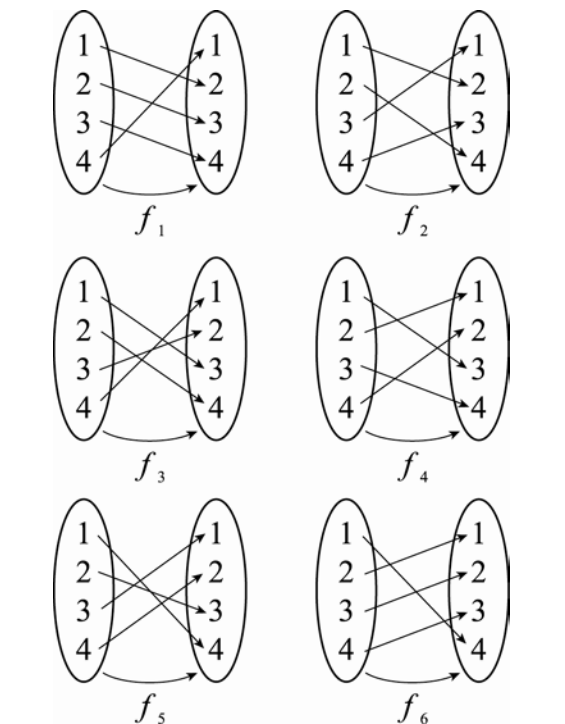
猴子所對應的洗牌函數 f ，因為合成三次之後為



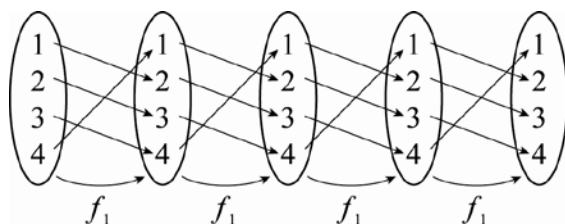
它是 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 的輪換，所以猴子洗牌的函數也不屬於這一類。

(3) 輪換式的洗牌法

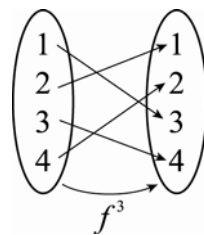
這一類型的洗牌法就是沒有固定點，也沒有分成兩群自己輪換的洗牌方法，即四張牌一起輪換的意思。我們可以用窮舉法將四張牌一起輪換的洗牌函數 f 列舉如下，共計六種。



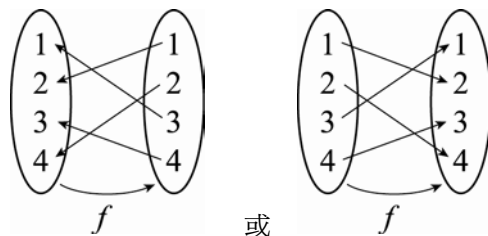
因為是四張牌輪換，所以四次之後會輪到原來的位，以 f_1 驗算如下。



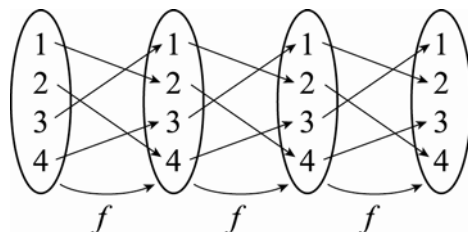
也就是說， $f_1^4(i) = i (i = 1, 2, 3, 4)$ ，即 f_1^4 是把每個元素對到自己的函數，稱它為單位函數。因為 $f_1^4, f_2^4, f_3^4, f_4^4, f_5^4, f_6^4$ 都是單位函數，又猴子洗牌函數 f 也是其中之一，所以 $f^4(i) = i (i = 1, 2, 3, 4)$ 。利用合成函數的性質 $f^4(i) = f^3 \circ f(i) = i (i = 1, 2, 3, 4)$ 知道 f 與 f^3 互為反函數。因為



所以



也就是說，猴子的洗牌函數 $f = f_2$ 。我們驗算它的三次合成，得



此與猴子洗牌三次之後給主人看的順序一致。故猴子洗一次牌後的順序為



再生羊皮書的時光之旅

□◎ 洪萬生／台灣師範大學數學系

在一些數學史的著作中，阿基米德總是被視為積分學的先驅人物。誠然，阿基米德所使用的逼近法，的確具有現代積分的意義。不過，如果仔細對比定積分(definite integral)與他的曲線形求積（譬如拋物線截區求面積），我們可以發現阿基米德的逼近法與現代的方法，有著本質的差異。這種「對比」容易被忽略的原因之一，似乎就在於他為了避開取極限而使用的窮盡法(the method of exhaustion)，由於涉及古希臘哲學家亞里斯多德的「潛在無窮」(potential infinity)，而成為眾所矚目的焦點。事實上，這也可以解釋斯坦(Sherman Stein)的《阿基米德幹了什麼好事？》何以將窮盡法列為討論單元之一。

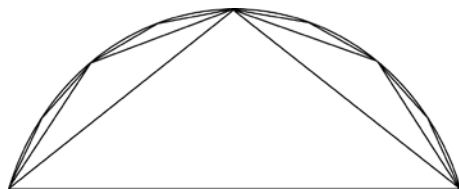
針對級數求和而言，所謂潛在無窮，是指吾人不能將無窮多項加起來。因此，當阿基米德考慮拋物線截區求面積時，他利用「有限多項的等比級數之和」逼近這一面積，然後，利用窮盡法證明它們最終必須相等。在這個論證中，阿基米德正如同稍早的歐幾里得一樣，是不可能將無窮多個正量加起來，而這正是「真正無窮」(actual infinity)的意涵。

然則，阿基米德的潛在無窮究竟是什麼呢？以曲線區域面積的逼近為例（參考圖一有關拋物線截區之逼近），《阿基米德寶典—失落的羊皮書》(The Archimedean Codex, 2007)提供了一個「想像的對話」：

阿基米德在曲線區域內塞進一些三角形，而留下空白處之大小大於一顆沙粒。來了一位批評者說：「還是有一顆沙粒的差別。」「哦！是這樣？」阿基米德喊道：「好吧！我就再重複使用我

的機制更多次。」結果空白處之大小小於一顆沙粒。「等一等，」批評者說：「空白處還是比頭髮寬。」阿基米德就（用同樣的機制）繼續下去。空白處總是小於批評者所提的大小。這樣的對話可以無止境的繼續下去。這是潛在無窮。

顯然，根據這種進路以及歸謬法（合起來通稱為窮盡法），阿基米德完成了許多重要的求（面 / 體）積工作，而締造了希臘數學的高峰。



〈圖一〉

上述這一類論述，是在 2001 年 1 月以前，有關希臘數學史的大要。讓我們引述《阿基米德寶典—失落的羊皮書》的作者之論斷如下：

希臘人把數學發展成精確的、嚴格的科學。他們避免了矛盾及錯誤。這麼做的過程之中，他們也避開了無窮的陷阱。他們的科學立基於你想要怎麼大就怎麼大，或你想要怎麼小就怎麼小的數目，但絕對不是無窮大或無窮小。想要怎麼大就怎麼大的數目，是為「潛在無窮大」，但不是真正的無窮大。希臘人不用真正的無窮大。

本書作者之一雷維爾·內茲(Reviel Netz)為舉世知名的阿基米德權威學者，目前任教於史丹佛大學。他出身劍橋大學科學史系，曾受教於希臘科學史大師洛伊德(Geoffrey Lloyd)，因此，這一版本應該是希臘數學史的標準敘事。

現在，《阿基米德寶典—失落的羊皮書》的再度問世，加上二十世紀才誕生的同步加速器、資訊與顯影等高科技之應用，我們乃得以揭露了前所未知的秘密，而敦促數學史家改寫這一重要的篇章。那就是：阿基米德竟然實際上將無窮多項加起來，還有，他甚至進一步去比較兩個無窮集合。後者這一極有膽識的運算，史家原本認為直到十九世紀，德國偉大數學家康托（Georg Cantor, 1845-1918）創造超限集合理論時，才正式進入數學舞臺。

這一部於 1998 年 10 月 29 日在紐約佳士得拍賣場，以高價 220 萬美金售出的古書，是教士約翰·麥隆納斯（Ioannes Mylonas）在西元 1229 年 4 月 14 日所抄寫的祈禱書，為的是在耶穌復活週年日，當作禮物獻給教會。至於所使用的再生羊皮紙，則是取原載有阿基米德的著作《平衡平面》、《球及圓柱》、《圓的測量》、《螺線》、《浮體》、《方法》以及《胃痛》，以及其他內容的羊皮書，刮掉文字再度使用，因而這部祈禱書也稱為再生羊皮書。還有，這些再生羊皮紙原先書寫的文章，則大約是出現在西元 970 年。除了阿基米德的上述著作之外，這一本再生羊皮書還保存了雅典一位最偉大演說家的講稿、古代對亞里斯多德的評論，也包括了一些拜占庭的文章、十世紀末的聖歌，和一位聖人的傳記。另有七張書頁之手稿，目前還無法辨別身分。因此，這一本再生羊皮書，簡直就是「一座擁有特殊古代手稿的小圖書館」。

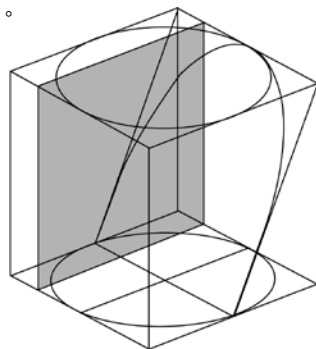
2001 年 1 月，雷維爾·內茲邀請日本大阪大學的希臘數學史家齊藤憲（Ken Saito）一起研究阿基米德的《方法》（The Method）。這一份西元 970 年的手抄稿當然是《阿基米德寶典—失落的羊皮書》在 1998 年再度問世時，數學史家頗感興奮的原因。這是因為 1906 年海柏格（Johan Ludwig Heiberg）在君士坦丁堡發現此一再生羊皮書時，最震撼希臘史家的就是它見證了阿基米德運用機械方法（mechanical method），而發現了他另外再以幾何方法嚴格證明的很多面積與

體積公式。後者這一嚴密證明，無疑結合了前述的逼近法與窮盡法，其中主要牽涉到潛在無窮的概念。然而，海柏格在再生羊皮書上無法讀到的，但經由 2001 年 3 月以紫外線照射的高解析數值影像，卻足以顯示它運用了不折不扣的真正無窮的概念。

根據內茲的報導（見《阿基米德寶典—失落的羊皮書》第 8 章），當阿基米德證明《方法》第 14 命題：「圓柱截體體積等於外圍正立方體體積的六分之一」時，他三度指出：某某幾何量的集合會與其他幾何量的集合，在數目上相等。就本例而言（請參考圖二），請看內茲的解說如下：

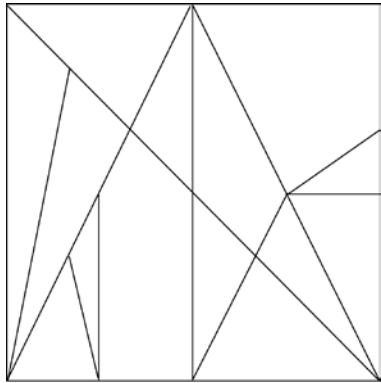
任取一切片，就產生立方體的一個三角形，它立於長方形的一個線段之上。而阿基米德指出，組成三角柱的各個三角形的數目，與組成長方形的各線段的數目，兩者是一樣的。

這一進路令人想到十六世紀的卡瓦列利（B. Cavalieri, 1598-1647）所提出的所謂「卡瓦列利原理」：「給定兩個立體一般高，如果等高處的截面面積相等，則這兩個立體體積相等。」不過，卡瓦列利卻小心翼翼地避開了「那些無窮多個截面是否可以疊回成為原來立體」之問題，理由無他，他正是不敢觸及真正無窮之概念。^②相反地，顯然由於連結到真正無窮之概念，於是，阿基米德毫不猶豫地將無窮多個項加起來。總之，內茲告訴我們說：「命題 14 不再用到物理—但在那裡，無窮個東西相加再也不是隱藏式的，而是明確的，立基於無窮求和的法則。」而這，也就是 2001 年 3 月史家得以確定的阿基米德現代性表現之一。



〈圖二〉

阿基米德數學的另一個現代性，則是一個他稱之為「胃痛」的組合學問題：將給定正方形切割成 14 片之後（參考圖三），再重新拼湊成為正方形的的方法有多少種？



〈圖三〉

阿基米德的答案是：17152 種！這個組合問題，它出現在這一本再生羊皮書的最後一頁，現在就以《胃痛》來表示，卻是讓內茲花了很多力氣、並且得到數學家的最多幫忙，最後才得以釐清。至於成功解讀的關鍵，則在於吾人「對於將要解讀的文章的可能意義，能夠做某種猜測，你才可能有所解讀。」因此，「海柏格之所以無法解讀《方法》之有關無窮的段落或《胃痛》，這是最大的原因；他不曾預期有真正的無窮，或者組合學。」這個問題的正確答案，是電腦科學家比爾·卡特勒(Bill Cutler)率先提出，後來，幾位著名的數學家包括鼎鼎大名的隆·格拉罕(Ron Graham)及金芙蓉夫婦檔，都只靠紙與筆，好比阿基米德只靠紙莎草及蘆葦筆一樣，而給出了同樣的答案。

本書作者除了前述的雷維爾·內茲之外，還有修復此一再生羊皮書的計畫主持人威廉·諾爾(William Noel)，他是華特絲美術館(Walters Museum)手稿及珍本部門策展人，學術專長為 1020 年代來自英國坎特伯利的教會手抄本裝飾畫。諾爾自稱是「阿基米德的雜役」，凡是修復的協調分工與尋求高科技的支援，甚至於訪問這一再生羊皮書曾經典藏之處，都由諾爾負責。事實上，他也是接受這本再生羊皮書擁有者（在本書中被稱為 B 先生）委託的主要負責人，所以，

他對於這一再生羊皮書的整個修復及解讀過程，提供了鉅細靡遺的報導，其中甚至引述了他們的團隊之一些相關的電子郵件之內容，再現了部分研究活動，頗讓讀者有親臨其境之感。

另一方面，數學史家內茲則專司解讀工作。由於他曾出版《希臘數學演繹法的形成：認知歷史的研究》(The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History, 1999)，所以，內茲研究古代數學文本時，基於認知科學之洞識，總是想知道：

數學經驗是什麼？它怎樣印入心（靈）眼（the mind's eye）中？我確信要了解其意涵，我們必須能夠閱讀正確翻譯的數學，此種翻譯必須保持原作者的架構，因為從此架構我們可看出古人是怎樣看待他們的科學的。

簡單地說，從認知科學觀點切入，文本的形式(form)與內容(content)同樣重要，認知與邏輯，抽象觀念與具體圖像，終究無法分離！因此，「經由研究圖形及符號、書頁及手稿的認知歷史，我們可能會進一步倒回去了解敘拉古的阿基米德的頭腦。」總之，內茲在獲邀參與這一研究計畫時，他曾「狂野幼稚、狂喜而令人受不了的尖叫……」難怪他在解釋過阿基米德的名字的由來後，提供了如下的「粉絲物語」(fans' note)：

在其純科學的作品中，阿基米德一直讓東西溢出浴缸：藝術與科學，美麗與秩序。讓我們開始觀看，這些元素如何在阿基米德的作品中聯手出現。

誠然，在內茲的書寫中，我們總可以讀到他的研究過程中所流露的狂喜，這對於一位歷史學家的「隔離的智慧」而言，的確是一大考驗，不過，看起來內茲倒是蠻甘之如飴。

最後，我們針對本書的書寫策略，提供一點簡要的評論。兩位作者在書寫本書時分工合作，其中涉及希臘數學史與阿基米德手稿解讀工作者，一概由內茲負責，其他則由諾爾執筆。就此

而言，本書可以說是科普寫作的一個創舉。譬如說吧，本書第 1、3、5、7、9、11 等奇數章，都出自諾爾，至於偶數章第 2、4、6、8、10 以及（第 12 章）結語章，則是內茲的創作。序文則是兩人共同創作。這種安排顯然是經過精心設計。通常，諾爾書寫的部分比較像「偵探」報告，其中有帶著電視節目製作人走訪伊士坦堡、聖城耶路撒冷以及西西里（阿基米德的故鄉），也有多方面說明如何利用各種人力資源與高科技，以利於再生羊皮書之解讀工作。相對地，內茲書寫的部分則側重阿基米德數學之相關論述，幫助讀者深入了解希臘數學史，內容則極有質感。由於內茲認為文本內容離不開形式，因此，他在說明如何解讀此一再生羊皮書時，總是一再強調手抄本形式的重要性。這一進路無形中呼應了高科技的顯影工作之策略，因而可以和諾爾所書寫的比較具有實作(practice)特色的奇數章融洽銜接。換句話說，由於內茲強調古代文本的認知意義，因此，它的內容 vs. 形式的意義得以凸顯，同時，古代文本的一個現代詮釋，顯然也必須顧及詮釋者的理論與實作之結合。這一點，當然也讓本書的數學內容說明，顯得「家常可口」，而不致於乾澀難以下嚥。

總之，面對本書，外行人當然可以看熱鬧——至少可以發思古之幽情，分享世界文化遺產，至於內行人呢，則一定可以看出門道。這本來就是一般科普書籍期望獲得的讀者反應。不過，本書論述阿基米德數學時，堅持實質內容之鋪陳（譬如第 6 章），而且，也沒有在提及達文西時東拉西扯（科普作家通常喜歡談論名人軼事，以降低內容的硬度），的確是科普書籍少見的氣魄，值得我們欽佩與效法。還有，筆者希望中小學數學教師有機會精讀本書第 4 章〈視覺科學〉，從容領會「希臘圖形的邏輯」以分享阿基米德的數學經驗，那麼，在教學上一定可以帶來很多的啟發才是！

參考文獻：

洪萬生(2007).

《好個阿基米德》科學月刊 38(8): 630-632

斯坦 (2004).

《阿基米德幹了什麼好事！》台北：天下文化

Dijksterhuis, E. J. (1987).

Archimedes.

Princeton, NJ: Princeton University Press.

Netz, Reviel and William Noel (2007).

The Archimedes Codex.

London: Weidenfeld & Nicolson.

Stein, Sherman (1999).

Archimedes:

What Did He Do Besides Cry Eureka?

Washington, DC: MAA.

註

第五世紀中國的祖沖之(429-500)在證明球體積公式時，也提出此一原理的類似版本：「夫疊棊成立積，緣冪勢既同，則積不容異。」只是他的無窮觀念究竟如何，我們還無以索解。

GeoGebra

◎ 陳禾凱／台北縣立錦和高中

GeoGebra 簡介

GeoGebra 是由 Markus Hohenwarter 所設計的數學繪圖軟體，曾榮獲歐洲多項軟體大獎，一開始是他在 2001 年於奧地利 Salzburg 大學寫有關數學教育博士論文的程式計畫，現在已發展成多國語言(30 多種)，跨平台(Window、Mac、Linux)的數學繪圖軟體，並有美國科學基金會的資助，繪圖功能持續加強中。

GeoGebra 這軟體的名稱拆開來是 Geo+Gebra，顧名思義是結合了幾何(Geometry)與代數(Algebra)的教育軟體，若在繪圖區畫出圓或直線，代數視窗就會出現對應的方程式，反過來若是輸入代數方程式，繪圖區便出現其圖形，操作的感覺就像是把 GSP 及 Graphmatica^①融合在一起，代數算式和圖形，一左一右，兩個同時出現，既生瑜又生亮。GeoGebra 把幾何圖形和代數方程式的關係緊密的結合在一起。

GeoGebra 和 GSP 的比較

提到數學的繪圖教學軟體，大家第一個想到的便是 GSP(Geometry Sketch Pad)，因此筆者特地在此將兩種軟體比較一下(如附表)，並針對其中數項發表個人的看法。

1. 首先是價格，這可是很重要的！教學軟體要能夠普級，影響很大，筆者在電腦教室以學校所購買的 GSP 教導班上同學們繪製圓錐曲線的圖形，一堂課短短的 50 分鐘，學生們均

意猶未盡，紛紛詢問何處可下載試用版軟體，當我告訴他們網路上沒有試用版可供下載^②，要回家用只有自行購買，學生們均十分失望，無法想像擁抱數學竟如此痛苦，要花費 1600 元，才能享受繪圖樂趣。如此一來，教師若在學校以 GSP 教授數學繪圖，無異成為推銷員。若是以 GeoGebra 來進行教學就沒這個困擾。

2. 由於 GeoGebra 是以 Java 程式語言撰寫，Java 的優缺點，如支援多國語言、跨平台、執行速度慢，GeoGebra 也都有，不過在比較舊的電腦才感覺出速度慢的困擾，以筆者的 Acer 512TE 筆記型電腦為例(7 年前的機型)，硬體配備：CPU：Pentium III 680HZ 256MB memory，第一次執行 GeoGebra 時，以為是當機，費時 15 秒才見繪圖畫面出來，在繪圖過程中若按 Delete 鍵要刪除某物件，或是按 Ctrl-Z 要回復前一步驟，都要停個 1 秒多才會顯示結果，還好其他的繪圖操作一切順暢，當然若使用的電腦機型不要那麼舊，如 Pentium IV 512MB memory 等級以上的電腦，就感覺不出上述的情形。
3. GeoGebra 以 Java 撰寫的最大好處是將圖形儲存成網頁時，可以 100%轉換為網頁畫面，GeoGebra 還支援 Latex 語法，可在畫面上顯示根號、次方及分數，這都是 GSP 所望塵莫及的，因此數學家在網路上要討論數學問題

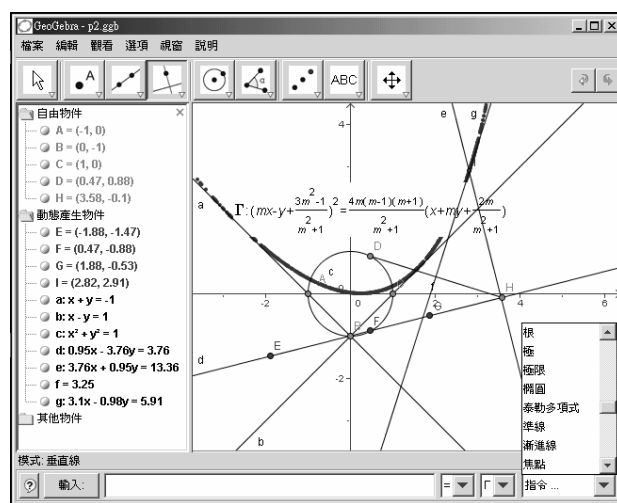
時，用 GeoGebra 來繪圖是一個很好的選擇。

- 國內引進 GSP 較早，使用 GSP 的師生較多，相對之下 GeoGebra 似乎乏人問津，這可以由 Google 蒐尋相關的中文網頁看出來，但若看看世界各地的使用情形，以 Google 輸入 Geometry sketchpad 及 GeoGebra 分別所找到的網頁數 387000 及 362000 來看，兩者在這世界的使用人口差不多，但以 GeoGebra 的支援多國語言特性，使用 GeoGebra 可稱的上是與世界接軌。
- GeoGebra 號稱是高中數學的教學軟體，當然有許多和高中數學直接相關的指令，如輸入 $x^2 - xy + y^2 = 1$ ，可畫出來斜方向的橢圓，右下方有指令視窗，以滑鼠下拉可看到一大串的指令，如極限、單位向量、切線…等，另外還有許多指令有待更正以符合我國現行高中教材，如：單位垂直向量（單位法向量）、第一軸線（長軸）、第二軸線（短軸）…等，不過瑕不掩瑜，這些小問題是可以克服的。
- 若對 GeoGebra 的使用有任何問題，可上 GeoGebra 的討論區和世界各地的使用者請教解決方法，也可對 GeoGebra 的未來發展提出建議，是要多加些什麼功能或指令，程式設計者 Markus Hohenwarter 還會親自回答。
- 學習數學繪圖軟體並不難，主要是利用滑鼠

來點選圓規或直尺工具來畫圖，因此操作 GSP 和操作 GeoGebra 其實大同小異，若是有操作過 GSP 的經驗，學習 GeoGebra 應很快就可熟悉，此外筆者針對高中課程常見的數學題目圖形以 GeoGebra 繪製，並用 Wink（哦！又是一個好用的 freeware）錄下畫面，讓初學者看一眼也知道如何來使用 GeoGebra，有興趣的人歡迎來錦和高中數學網學習。

後記

資訊科技的進步及網路的無遠弗界大大地改變了我們的生活、及學習方式，回想二十年前筆者念大學時對於數學繪圖軟體的印象，是系上工作站中一個神 軟體，如今任何人只要利用網路就可輕鬆下載回來安裝，實在不可同日而語。



相關網址

- 錦和高中數學學習網 GeoGebra 教學 <http://learn.jhsh.tpc.edu.tw/~smath/link1.html>
- GeoGebra 官方網站 <http://www.geogebra.org>
- GeoGebra 的中文翻譯討論區 <http://enjoy.phy.ntnu.edu.tw/course/index.php?category=3>
- GeoGebra 的使用討論區（英法德） <http://www.geogebra.org/forum/>
- GeoGebra Wiki GeoGebra 的維基百科全書 <http://www.geogebra.org/en/wiki/>
- Wink 的下載網址 <http://www.debugmode.com>

②

1. Graphmatica 也是一個免費數學繪圖軟體，可輸入函數或方程式，立即顯示出圖形，建中數學科網站有中文使用手冊可供下載。
2. GSP 的一般試用版已不准放在網頁中供人下載，故師大數學、建中數學網站中的試用版，已悄悄的取消，GSP 的官方網站有提供 Instructor Evaluation Edition 以供教師評估是否購買作為教學用途之用，有效期限 60 天。

GSP 及 GeoGebra 的對照表（評分最高 5 分，最低 1 分，個人主觀意見，僅供各位參考）

項 目	GSP	評 分	GeoGebra	評 分
價 格	校園版 50000 元、個人版 6000 元。 學生版 1600 元。	1	免費，自行至網站下載安裝。	5
執行速度	良好。	5	較舊的電腦機型會有： 起動稍慢，按 Ctrl-Z 會停頓一下才復原到 前一動作，其餘一般運作良好。 若硬體為 Pentium IV 512MB memory 以上配 備，則沒有上述問題。	4
繪圖工具	基本的線及圓。	3	有較多的繪圖工具，如：半圓、切線、極限、 中垂線、角平分線，過 5 點的圓錐曲線…等	4
自訂工具	可。	5	可。	1
相關書籍資源	中文書： 聯經出版社：國中幾何動動動 網站： 陳創義、官長壽等有豐富的範例檔案 Gsp 的官方網站 http://www.dynamicgeometry.com/	4	中文書：無。 網站： 錦和高中數學教學網。 GeoGebra Forum：討論區（英文、法文…等） GeoGebraWiki：任何人均可上傳提供檔案， 分享教育資源（中文、英文、法文…等）。	3
輸出為網頁	轉換為 JavaSketchPad，但對於某些 繪圖指令不支援。	3	GeoGebra 是以 Java 語言設計的，100%可轉 換為網頁。	5
可畫出的高中 數學圖	1. 函數圖，動點軌跡圖。 2. 能用動點軌跡來畫拋物線、橢圓、 雙曲線。 3. 空間圖形可利用 3d 坐標架模擬描 繪。	4	1. 函數圖，動點軌跡圖。 2. 可輸入代數方程式把拋物線、橢圓、雙曲 線等的圖形畫出來（類似 Graphmatica） 3. 有指令可直接畫出積分的上下和的連續 矩形。 4. 空間圖形需另外下載 GeoGebra3D 來繪圖	5
文字工具	可在圖形上加入文字（不支援 Latex 語法）。	3	可在圖形上加入文字（支援 Latex 語法，可 顯示 $\sqrt{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、根號及分數）。	5

兩條歪斜線必存在一條公垂線

◎ 吳孝仁／國立政大附中

探討空間中兩條相異直線的關係，在教學的過程中一般都是從這樣的分類開始：

1. 兩條直線在同一個平面上

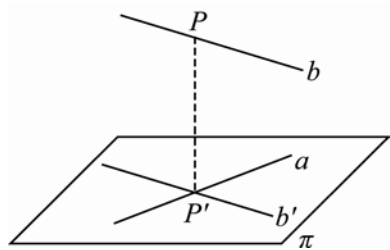
這時候直線的關係對學生來說是明顯的舊經驗，平行或不平行，不平行會相交，交點也在兩條直線所處的平面上。

2. 兩條直線不在同一個平面上

這時候兩條直線不平行但也不相交，歪歪斜斜的，所以叫一組歪斜線。

再來從課本裡學習到經典例題：如何去計算一組歪斜線的公垂線？這也讓學生了解到確實有公垂線的存在；如果再加上幾何上的觀察，那學生應該會更有感覺了。

幾何上是這樣解釋的：假設有兩條歪斜線 a, b 。考慮包含 a 而平行 b 的平面 π ，把直線 b 投影到 π 上為 b' ，那麼 a 與 b' 會有交點 P' 。因為投影的關係，所以 P' 會是 b 上的某個點 P 的投影，那麼直線 PP' 就是歪斜線 a, b 的公垂線。



這篇文章想要做的是，由一些代數條件來看一組歪斜線與其公垂線之間的關係；希望能提供給各位先進作為深入教學或是概念連結的一些素材。

在這裡先規定一些符號，兩條相異的直線

a, b 。方向（向量）分別為 a^*, b^* 。另外 a, b 上各有一個點 A, B ，於是如此一來我們就可以寫出

a, b 的直線方程式，但是這待會再談。先觀察到一件事：如果 a, b 是一組歪斜線，那麼 a^*, b^* 不會平行。另外， $\overline{AB}$ 也不會與 a^*, b^* 共平面，否則 a, b 是同一個平面上的不平行直線，這樣會有交點。

換句話說：

a, b 是一組歪斜線 $\Rightarrow a^*, b^*, \overline{AB}$ 不共平面

事實上， $a^*, b^*, \overline{AB}$ 不共平面也是充分的，即

a, b 是一組歪斜線 $\Leftrightarrow a^*, b^*, \overline{AB}$ 不共平面

我們注意到了 $a^*, b^*, \overline{AB}$ 不共平面可以轉化為代數條件，即是 $a^*, b^*, \overline{AB}$ 所張的平行六面體體積非零。

換句話說：

$$a, b \text{ 是一組歪斜線} \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \\ \overline{AB} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (\#)$$

既然 a, b 間有一條公垂線，所以條件（#）似乎保證了公垂線的存在性。我們繼續討論下去，取 a^*, b^* 的外積 $a^* \times b^*$ ，方向上垂直 a, b 。所以公垂線的方向有了，但是要成為 a, b 的公垂線，還必須保證以 $a^* \times b^*$ 為方向的直線與 a, b 各有一個交點，所以這兩個交點存在與否就決定了 a, b 的公垂線。

假設兩條直線 a, b 的參數方程式：

$$\begin{cases} a: X = A + a^*t \\ b: X = B + b^*s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

直線 c 的方向為 $a^* \times b^*$ 。試想，如果 a, b 上各有一點 A_0, B_0 落在直線 c 上，那麼由前述討論，直線 c 就是 a, b 的公垂線。

考慮方程組

$$\begin{aligned} A + a^*t &= (B + b^*s) + (a^* \times b^*) \\ \Leftrightarrow a^*t - b^*s + (A - B) &= a^* \times b^* \\ \Leftrightarrow [t, s, 1] \begin{bmatrix} a^* \\ -b^* \\ \overline{AB} \end{bmatrix} &= a^* \times b^* \quad (##) \end{aligned}$$

因為 a, b 是一組歪斜線

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \\ \overline{AB} \end{bmatrix} &\neq 0 \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} a^* \\ -b^* \\ \overline{AB} \end{bmatrix} &\text{是可逆矩陣} \\ \Rightarrow (##) &\text{有實數解 } [t_0, s_0, 1] \end{aligned}$$

假設

$$\begin{aligned} A_0 &= A + a^*t_0 \\ B_0 &= B + b^*s_0 \end{aligned}$$

以及直線 c

$$c: X = \frac{(A_0 + B_0)}{2} + (a^* \times b^*)r, \quad r \in \mathbb{R}$$

於是 A_0, B_0 分別落在 a, b 上而且

$$A_0 - B_0 = a^* \times b^*$$

另外

$$\begin{aligned} \text{當 } r = \frac{1}{2}, X &= \frac{(A_0 + B_0)}{2} + \frac{(a^* \times b^*)}{2} = A_0 \\ \text{當 } r = -\frac{1}{2}, X &= \frac{(A_0 + B_0)}{2} - \frac{(a^* \times b^*)}{2} = B_0 \end{aligned}$$

這意謂著直線 c 通過 A_0, B_0 ，所以 c 為 a, b 的公垂線。至此，已經完成我們的論證。

繼承之前的符號，在這裡下個結論：

1. a, b 是一組歪斜線 $\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \\ \overline{AB} \end{bmatrix} \neq 0$ (#)
2. 條件(#)提供了以 $a^* \times b^*$ 為方向的直線和 a, b 各有一個交點的充分性
3. $\det \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \\ \overline{AB} \end{bmatrix} \neq 0$ 蘊含了公垂線的存在

②

1. 文中直線參數式 $X = A + a^*t$ 是以向量的形式來表示， t 是 a^* 的係數積。
2. A, B 個別來看是點，但是表示成 $(A - B)$ 時則視為向量 $\overline{AB}$ 。

test

國立台灣師範大學數學系 96 學年度 推薦甄選入學

指定項目甄試試題

一、計算證明題（考試時間：2 小時）

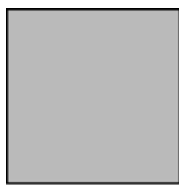
1. 在電影「詭絲」中，一位物理學家以孟傑海綿（Menger sponge）來捕捉鬼魂；下面是平面上孟傑海綿的製作方法。

第一階段：取一個邊長為 a 的正方形（參看下圖一），將正方形等分成九個邊長為 $\frac{a}{3}$ 的小正方形，再將中央的小正方形切除（參看下圖二）。

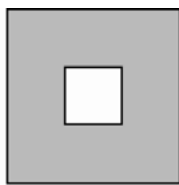
第二階段：對前階段留下的所有邊長為 $\frac{a}{3}$ 的小正方形，每個都等分成九個邊長為 $\frac{a}{9}$ 的小正方形，再將中央的小正方形切除（參看下圖三）。

以下依此類推。

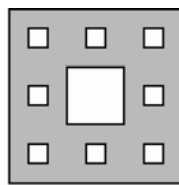
- (1) 若孟傑海綿是完成第五階段後所製成的，則製作過程中共切除多少個各種大小的正方形？
- (2) 若孟傑海綿是完成第 n 階段後所製成的，則製作過程中共切除多少個各種大小的正方形？
- 被切除的正方形周長共多少？被切除的正方形面積共多少？



圖一



圖二



圖三

2. (1) 試證：若 x , y 與 z 都是不等於 0 的正實數，則下述不等式恆成立：

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{x+y+z}{xyz}.$$

- (2) 設 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 a, b 與 c ，而其內切圓半徑為 r 。若 s 表示 $\triangle ABC$ 周長的一半，試證：

$$\frac{1}{(s-a)^2} + \frac{1}{(s-b)^2} + \frac{1}{(s-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}.$$

3. 設2007次整係數多項式 $f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2007)-1$ 等於兩個整係數多項式 $g(x)$ 與 $h(x)$ 的乘積，令 $k(x) = g(x) + h(x)$ 。
- (1) 試證： $k(1) = k(2) = \cdots = k(2007) = 0$ 。
- (2) 試證：兩多項式 $g(x)$ 與 $h(x)$ 中必有一是常數多項式。
4. 設甲袋原有 $k-1$ 個白球與1個黑球($k \geq 2$)，而乙袋原有 k 個白球。今自甲袋與乙袋中同時各取出一球放入對方袋中，這動作我們稱之為一次換球；對每個正整數 n ，令 P_n 表示 n 次換球後黑球仍在甲袋的機率。
- (1) 試求 P_2 與 P_3 。
- (2) 設 n 為正整數，試求 P_n 。
- (3) 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ 之值。
5. 已知：拋物線的焦點對此拋物線所有切線的對稱點都在拋物線的準線上。
- (1) 試證：若一拋物線過切點 P 的切線為 l ，而焦點 F 對切線 l 的對稱點為 D ，則 $\overline{PD}$ 與準線垂直。
- (2) 設一拋物線的準線方程式為 $3x - 2y - 4 = 0$ ，且與直線 $3x + 11y + 6 = 0$ 相切於點 $(-2, 0)$ ，試求其焦點坐標。

二、填充題（考試時間：2 小時）

1. 設 ω 為方程式 $x^3 - 1 = 0$ 之一虛根。若無窮級數

$$1 + \frac{1}{3}\omega + \frac{1}{3^2}\omega^2 + \cdots + \frac{1}{3^n}\omega^n + \cdots$$

之和為 $\alpha + \beta\omega$ ，其中 α, β 為實數，則 $\alpha + \beta =$ _____。

2. 函數 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 10}$ 的最小值為_____。

3. 在平面坐標系中， $\|x| - 1| + \|y| - 2| = 3$ 之圖形所圍區域的面積為_____。

4. 考慮數列

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \dots,$$

其中值為 $\frac{1}{3^{k-1}}$ 的項共有 3^{k-1} 個 ($k = 1, 2, 3, \dots$)。若前 n 項之和為 50，則 n 為_____位

數。(log 2 = 0.3010, log 3 = 0.4771, log 7 = 0.8451)

5. 設實數 α, β 滿足 $-\pi < \alpha < \pi, -\pi < \beta < \pi$ ，且 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \tan \frac{\beta}{2} = -4$ ，則

$$\frac{1}{1 + \cos \alpha + \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \beta + \sin \beta} = \text{_____}。$$

6. 設 $A = \begin{bmatrix} 7 & a_1 & a_2 \\ a_3 & 4 & 6 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix}$ 為 3×3 的矩陣，且 A 的每一列、每一行、每一對角線的總和皆相等，則

方程組

$$\begin{cases} 7x + a_1y + a_2z = -2 \\ a_3x + 4y + 6z = 2 \\ a_4x + a_5y + a_6z = -6 \end{cases}$$

的解 (x, y, z) 為_____。

7. 給定三直線 $L_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$, $L_2: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+3}{4}$ 與 $L_3: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ 。令

點 P 為直線 L_1 與 L_2 的交點，點 Q 為直線 L_2 與 L_3 的交點，則線段 $\overline{PQ}$ 在平面

$E: x + y + z + 3 = 0$ 上的正射影長度為_____。

8. 空間中位於點 $(0, 2, 2)$ 的光源，將 xz 平面上的圓

$$\begin{cases} x^2 + (z-1)^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

照射在 xy 平面上，則這個影像的曲線方程式為_____。

9. 給定正整數 $n \geq 2$ ；持續擲一公正的骰子，若連續兩次擲出的點數相同或擲滿 n 次即停止，則一連串擲骰子的所有可能結果有_____種。

10. 擲一公正的硬幣 8 次；已知擲出正面的次數小於或等於 4 次，則第一次與第二次都擲出正面的機率為_____。

國立台灣師範大學數學系 96 學年度 推薦甄選入學

指定項目甄試試題詳解

一、計算證明題：

1. 令 a_n 代表第 n 階段所切除的正方形個數。因為第一階段切除的正方形邊長為 $\frac{a}{3}$ ，第二階段切

除的正方形邊長為 $\frac{a}{3^2}$ ， $\dots$ ，所以第 n 階段所切除的正方形邊長為 $\frac{a}{3^n}$ ；又因為第一階段切除

$a_1 = 1$ 個正方形，第二階段切除 $a_2 = 8$ 個正方形，第三階段切除 $a_3 = 8^2$ 個正方形， $\dots$ ，所以第 n 階段切除 $a_n = 8^{n-1}$ 個正方形。

- (1) 依題意，一共切除 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 個正方形，計算得

$$1 + 8^1 + 8^2 + 8^3 + 8^4 = 4681 \text{ (個)}。$$

- (2) 孟傑海綿在完成第 n 階段後一共切除

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

個各種大小的正方形。計算，得

$$1 + 8^1 + \dots + 8^{n-1} = \frac{8^n - 1}{8 - 1} = \frac{8^n - 1}{7} \text{ (個)}。$$

被切除的正方形周長為

$$\begin{aligned} & 4 \left(1 \cdot \frac{a}{3} + 8^1 \cdot \frac{a}{3^2} + \dots + 8^{n-1} \cdot \frac{a}{3^n} \right) \\ &= \frac{4}{3} a \left(1 + \frac{8^1}{3^1} + \dots + \frac{8^{n-1}}{3^{n-1}} \right) = \frac{4}{3} a \left(\frac{\frac{8^n}{3} - 1}{\frac{8}{3} - 1} \right) = \frac{4}{5} \left(\left(\frac{8}{3} \right)^n - 1 \right) a. \end{aligned}$$

被切除的正方形面積為

$$\begin{aligned} & \left(1 \cdot \left(\frac{a}{3} \right)^2 + 8^1 \cdot \left(\frac{a}{3^2} \right)^2 + \dots + 8^{n-1} \cdot \left(\frac{a}{3^n} \right)^2 \right) \\ &= \frac{a^2}{9} \left(1 + \frac{8^1}{9^1} + \dots + \frac{8^{n-1}}{9^{n-1}} \right) = \frac{a^2}{9} \left(\frac{1 - \frac{8^n}{9^n}}{1 - \frac{8}{9}} \right) = \left(1 - \left(\frac{8}{9} \right)^n \right) a^2. \end{aligned}$$

2. (1) 將下列三個算幾不等式

$$\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2}} = \frac{z}{xyz}$$

$$\frac{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{z^2}} = \frac{x}{xyz}$$

$$\frac{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{y}{xyz}$$

相加，得

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{x+y+z}{xyz}.$$

(2) 設 Δ 為 $\triangle ABC$ 的面積，根據海龍公式及面積公式，得

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = sr,$$

即

$$\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{r^2}$$

利用(1)，得

$$\frac{1}{(s-a)^2} + \frac{1}{(s-b)^2} + \frac{1}{(s-c)^2} \geq \frac{3s - (a+b+c)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{r^2}.$$

3. 設 2007 次整係數多項式 $f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2007) - 1$ 等於兩個整係數多項式 $g(x)$ 與 $h(x)$ 的乘積，令 $k(x) = g(x) + h(x)$ 。

(1) 因為

$$f(1) = f(2) = \cdots = f(2007) = -1,$$

所以

$$g(1)h(1) = g(2)h(2) = \cdots = g(2007)h(2007) = -1.$$

又因為 $g(x)$ 與 $h(x)$ 都是整係數多項式，

所以

$$g(1), g(2), \cdots, g(2007)$$

與

$$h(1), h(2), \dots, h(2007)$$

都是整數。

因此， $g(1)$ 與 $h(1)$ 必是一個 1，而另一個為 -1， $g(2)$ 與 $h(2)$ ， $\dots$ ， $g(2007)$ 與 $h(2007)$

都是一個 1，而另一個為 -1。也就是說，

$$g(1) + h(1) = g(2) + h(2) = \dots = g(2007) + h(2007) = 0,$$

即

$$k(1) = k(2) = \dots = k(2007) = 0.$$

- (2) 考慮 $g(x)$ 與 $h(x)$ 的次數 $m = \deg g(x)$ 與 $n = \deg h(x)$ ；為了方便起見，不妨設 $m \geq n \geq 0$ 。因為 $f(x) = g(x)h(x)$ 的次數是 2007 次，所以 $m + n = 2007$ ；又由 $k(1) = k(2) = \dots = k(2007) = 0$ 知， $g(x) + h(x)$ 被 $(x-1)(x-2)\dots(x-2007)$ 整除，即 $m \geq \deg(g(x) + h(x)) \geq 2007$ 。由 $m + n = 2007$ 及 $m \geq 2007$ 得 $m = 2007$ ， $n = 0$ ，故 $h(x)$ 是常數多項式。

4. 考慮 P_n 與 P_{n-1} 的遞迴關係，因為 n 次換球後黑球仍在甲袋的機率等於 $(n-1)$ 次換球後黑球仍在甲袋，且第 n 次換球後黑球仍在甲袋的機率 + $(n-1)$ 次換球後黑球跑到乙袋，且第 n 次換球後黑球在甲袋的機率，即

$$P_n = P_{n-1} \times \frac{k-1}{k} + (1 - P_{n-1}) \times \frac{1}{k}.$$

整理，得

$$\left(P_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{k-2}{k} \left(P_{n-1} - \frac{1}{2}\right).$$

因此

$$P_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{k-2}{k}\right)^{n-1} \left(P_1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{k-2}{k}\right)^{n-1} \left(\frac{k-1}{k} - \frac{1}{2}\right).$$

整理，得

$$P_n = \frac{(k-2)^n}{2k^n} + \frac{1}{2} = \frac{(k-2)^n + k^n}{2k^n}.$$

(1) 利用前面的公式，得

$$P_2 = \frac{(k-2)^2 + k^2}{2k^2} = \frac{k^2 - 2k + 2}{k^2}, \quad P_3 = \frac{(k-2)^3 + k^3}{2k^3} = \frac{k^3 - 3k^2 + 6k - 4}{k^3}.$$

(2) 利用前面的公式，得

$$P_n = \frac{(k-2)^n}{2k^n} + \frac{1}{2} = \frac{(k-2)^n + k^n}{2k^n}.$$

(3) 根據(2)的公式，得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k-2)^n + k^n}{2k^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k} \right)^n + \frac{1}{2}.$$

因為 $\frac{1}{2} - \frac{1}{k}$ 是小於 1 的定正數，所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k} \right)^n = 0.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{2}.$$

5. (1) 設 P 至準線的垂足為 H ，即 $\overline{PH}$ 是 P 到準線的最短距離，又根據拋物線的定義

$\overline{PF} = \overline{PH}$ ；已知， D 在準線上，且因為對稱點的關係，所以 $\overline{PF} = \overline{PD}$ 。因此

$$\overline{PH} = \overline{PD}.$$

由 $\overline{PH}$ 是 P 到準線的最短距離知 $D = H$ ， $\overline{PD}$ 與準線垂直。

(2) 通過點 $(-2, 0)$ ，又與準線 $3x - 2y - 4 = 0$ 垂直的直線方程式為

$$L_1: 2x + 3y = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = -4.$$

準線與直線 L_1 的交點坐標為 $D\left(\frac{4}{13}, -\frac{20}{13}\right)$ 。

現在求 $D\left(\frac{4}{13}, -\frac{20}{13}\right)$ 點對切線 $3x + 11y + 6 = 0$ 的對稱點，

過 D 與切線相垂直的直線方程式為

$$L_2: 11x - 3y = 11 \cdot \left(\frac{4}{13}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{20}{13}\right) = 8.$$

切線與直線 L_2 的交點為 $M\left(\frac{7}{13}, -\frac{9}{13}\right)$ 。利用 FD 的中點為 M ，得焦點 F 的坐標為

$$\left(\frac{10}{13}, \frac{2}{13}\right).$$

二、填充題：

1.	2.	3.	4.	5.
$\frac{15}{13}$	$\sqrt{26}$	52	24	$-\frac{29}{12}$
6.	7.	8.	9.	10.
$\left(-1, -\frac{1}{2}, 1\right)$	$\frac{2}{3}\sqrt{78}$	$x^2 + 2y = 0$ 或 $\begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\frac{3}{2}(5^n - 1)$	$\frac{22}{163}$

1. 令此級數為 S ，套用無窮等比級數公式，得

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\omega} = \frac{3}{3 - \omega}.$$

將分子與分母同乘 $4 + \omega$ ，得

$$S = \frac{3(4 + \omega)}{(3 - \omega)(4 + \omega)} = \frac{3\omega + 12}{-\omega^2 - \omega + 12}.$$

因為 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ，所以

$$S = \frac{3\omega + 12}{1 + 12} = \frac{12}{13} + \frac{3}{13}\omega.$$

$$\text{故 } \alpha + \beta = \frac{12}{13} + \frac{3}{13} = \frac{15}{13}.$$

2. 將 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 10}$ 表為

$$f(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-(-2))^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (0-3)^2},$$

即 $f(x)$ 代表 x 軸上的動點 $P(x, 0)$ 至定點 $A(0, -2)$ 與 $B(1, 3)$ 的距離和。其最小值發生在當

P 是 x 軸與直線 AB 的交點時，又直線 AB 的方程式為

$$5x - y = 2.$$

將 $P(x, 0)$ 代入解得 $x = \frac{2}{5}$ ，而最小值為

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26}.$$

3. 因為 $||x|-1|+||y|-2|=3$ 的圖形對稱 x 軸與 y 軸，所以只需畫 $||x|-1|+||y|-2|=3$ 在第一象限

的圖形即可知道整個圖形。現在設 $x \geq 0, y \geq 0$ ，此時 $||x|-1|+||y|-2|=3$ 變成

$$|x-1|+|y-2|=3.$$

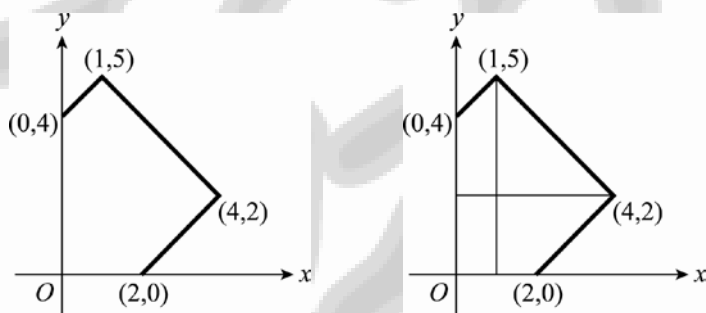
(1) 當 $x \geq 1, y \geq 2$ 時， $x+y=6$ 。

(2) 當 $x \geq 1, y \leq 2$ 時， $x-y=2$ 。

(3) 當 $x \leq 1, y \geq 2$ 時， $x-y=-4$ 。

(4) 當 $x \leq 1, y \leq 2$ 時， $x+y=0$ 。

將這四部分畫圖如下左圖，



現在算它們的面積：畫直線 $x=1$ 及 $y=2$ 將該區域分成一三角形、一矩形、兩個梯形等四個

可以算面積的形狀（如上右圖），其中三角形的面積為 $\frac{9}{2}$ ，矩形面積為 2，兩個梯形面積分別為 4 與 $\frac{5}{2}$ 。故在第一象限所圍出的面積為

$$\frac{9}{2} + 2 + 4 + \frac{5}{2} = 13$$

因為對稱的關係，所以圖形圍出的總面積為 $4 \cdot 13 = 52$ 。

4. 將數列分成每 3^{k-1} ($k=1, 2, 3, \dots$) 個一組，根據題意每組和皆為 1。若前 n 項和為 50，則 n

是第 50 組的最後一項；又因為第一組有 1 項，第二組有 3^1 項， $\dots$ ，第 50 組有 3^{49} 項，所以

$$n = 1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{49} = \frac{3^{50} - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2} \cdot 3^{50} - \frac{1}{2}.$$

因為

$$\log \frac{1}{2} \cdot 3^{50} = -0.3010 + 50 \cdot 0.4771 = 23.5540 ,$$

所以 n 為 24 位數。

5. 令 $a = \tan \frac{\theta}{2}$ ，可得

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} .$$

又利用 $\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}$ 及 $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ ，可得

$$\cos \theta = \frac{1-a^2}{1+a^2}, \quad \sin \theta = \frac{2a}{1+a^2} .$$

將上述公式代入所求的式子，得

$$\text{所求的和} = \frac{1}{1 + \frac{1-0.5^2}{1+0.5^2} + \frac{2 \cdot 0.5}{1+0.5^2}} + \frac{1}{1 + \frac{1-(-4)^2}{1+(-4)^2} + \frac{2 \cdot (-4)}{1+(-4)^2}} = \frac{5}{12} - \frac{17}{6} = -\frac{29}{12} .$$

6. 從假設條件可得等式

$$\begin{aligned} 7 + a_3 + a_4 &= a_1 + 4 + a_5 = a_2 + 6 + a_6 = 7 + a_1 + a_2 \\ &= a_3 + 10 = a_4 + a_5 + a_6 = 4 + a_2 + a_4 = 11 + a_6 , \end{aligned}$$

其中 $7 + a_3 + a_4 = 10 + a_3$ 推得 $a_4 = 3$ ， $a_2 + 6 + a_6 = 11 + a_6$ 再推得 $a_2 = 5$ ，即總和為

$$4 + a_2 + a_4 = 4 + 5 + 3 = 12 .$$

將其和代入關係式 $12 = 11 + a_6 = 10 + a_3$ 得 $a_3 = 2$ ， $a_6 = 1$ ，

代入關係式 $12 = 7 + a_1 + a_2 = 12 + a_1$ 得 $a_1 = 0$ ，

代入關係式 $12 = a_1 + 4 + a_5 = 4 + a_5$ 得 $a_5 = 8$ 。

綜合這些計算，方程組為

$$\begin{cases} 7x + 5z = -2 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 8y + z = -6 \end{cases}$$

利用高斯消去法或加減消去法，可以解得 $x = -1$ ， $y = -\frac{1}{2}$ ， $z = 1$ 。

7. 首先求 P, Q 兩點的坐標，

P 點坐標為

$$\begin{cases} \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} \\ \frac{x-1}{-4} = \frac{y-3}{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=-7 \\ x-2y=-5 \end{cases} \Rightarrow P=(1, 3, -3).$$

Q 點坐標為

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-4} = \frac{y-3}{-2} \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-5 \\ x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow Q=(-3, 1, 1).$$

接下來計算線段 $\overline{PQ}$ ， P 點至平面 E 的距離 $d(P, E)$ 及 Q 點至平面 E 的距離 $d(Q, E)$ 如下：

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-(-3))^2 + (3-1)^2 + (-3-1)^2} = 6;$$

$$d(P, E) = \frac{|1+3-3+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}};$$

$$d(Q, E) = \frac{|-3+1+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

利用畢氏定理，線段 $\overline{PQ}$ 在平面 $E: x+y+z+3=0$ 上的正射影長為

$$\sqrt{\overline{PQ}^2 - (d(P, E) - d(Q, E))^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{78}.$$

8. 將 xz 平面上的圓

$$\begin{cases} x^2 + (z-1)^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

表為參數式

$$(x, y, z) = (\cos t, 0, 1 + \sin t), \quad t \text{ 為實數}.$$

若通過點 $(0, 2, 2)$ 與 $(\cos t, 0, 1 + \sin t)$ 的直線與 xy 平面相交於點 $(x, y, 0)$ ，則

$$\frac{\cos t - 0}{x - 0} = \frac{0 - 2}{y - 2} = \frac{(1 + \sin t) - 2}{0 - 2},$$

解得

$$\cos t = -\frac{2x}{y-2}, \quad \sin t = \frac{y+2}{y-2}.$$

利用 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ，得

$$\left(-\frac{2x}{y-2}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{y-2}\right)^2 = 1,$$

整理，得

$$x^2 + 2y = 0.$$

9. 設總共擲骰子 k 次，討論如下：

(1) $i < n$ 的擲法

第一次擲有 6 種可能，之後的每一回都不能與上一回相同，故有 5 種可能，而最後第 i 回與第 $i-1$ 回相同，只有 1 種，所以共有 $6 \times 5^{i-2} \times 1$ 種。

(2) $i = n$ 的擲法

表示到了第 $n-1$ 回時還沒有重複的點數，而最後一回不管重複與否都要結束，故有

$6 \times 5^{n-2} \times 6$ 種結果。

一共有

$$\sum_{i=2}^{n-1} 6 \times 5^{i-2} \times 1 + 6 \times 5^{n-2} \times 6 = \frac{3}{2}(5^n - 1)$$

種。

10. 設 A 代表前兩次都擲出正面的事件， B 代表擲出小於或等於 4 次的事件。

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} \sum_{i=0}^2 C_i^6 \frac{1}{2^6}}{\sum_{i=0}^4 C_i^8 \frac{1}{2^8}} = \frac{1+6+15}{1+8+28+56+70} = \frac{22}{163}.$$

專欄

動手玩數學

◎許志農／台灣師範大學數學系



伸出你的左手，從大拇指開始，如下圖所示那樣數數字

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... :

遊戲 13

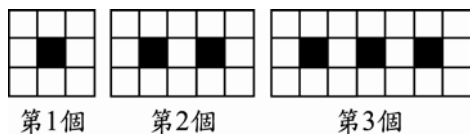
☆☆



- (1) 求大拇指所數的第 n 個數為何？並描述大拇指所數的數之規律。
- (2) 數到 999 時，你數在哪個手指上？
(以大拇指、食指、中指、無名指或小指回答)

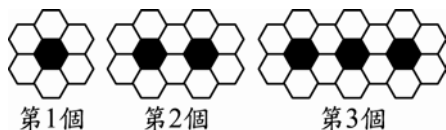
〔玩鎖・玩索〕

尋找規律或發現公式一直是數學活動中很受重視的一環。例如 95 學年度學測第 G 題就是幾何規律的尋找問題：
用黑、白兩種顏色的正方形地磚，依照如下的規律拼成若干圖形。



試問：拼第 95 個圖需用到幾塊白色地磚？

又如下圖，求第 n 個圖的白色正六邊形個數？這也是一道尋找規律問題。



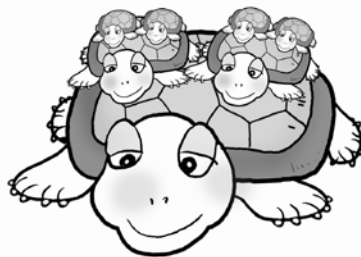
這道數數問題是取自第三屆《華羅庚金杯...少年數學邀請賽》的團體決賽口試試題。



一隻大烏龜馱上兩隻中烏龜，這兩隻中烏龜的重量都是大烏龜的八分之一，又每隻中烏龜又背著兩隻小烏龜，這兩隻小烏龜的重量也都是中烏龜的八分之一，如此疊上去。已知最底下的大烏龜有 3 公斤重，求所有烏龜的總重量？

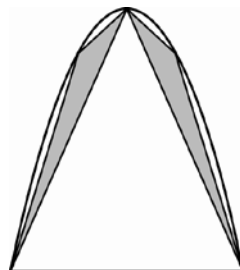
遊戲 14

☆☆



〔玩鎖・玩索〕

拋物線與弦所圍的區域稱為拋物線的弓形，世界上第一位會算拋物線弓形面積的人是兩千多年前的阿基米德。阿基米德以弦為底畫出一個三角形，之後在兩邊再各畫一個三角形，如下圖所示：



阿基米德說：「如果依照這樣的規律一直畫下去，那麼這些三角形的面積總和就會是拋物線的弓形面積。」直觀看來，兩者的差異愈來愈小，問題是，這些三角形有無窮多個，而且不知道其面積總和該如何求？阿基米德進一步說：「馱在上面的兩個三角形之面積和是底下這個三角形面積的四分之一，由此可推得拋物線的弓形面積是最大三角形面

積的三分之二倍。」

在沒有微積分的幫忙之下，能夠算出這樣的結果，算是出類拔萃之人，在我們學會多項式的微積分之後，就很容易驗證阿基米德的這些結果。

將上述情境中的三角形改成烏龜，面積視為烏龜的重量，就是這裡所談的問題！利用無窮等比級數的求和公式算烏龜的重量總和。



遊戲 15

☆☆☆☆

阿基米德、歐幾里得、費馬與高斯參加一場四道题目的數學競賽。賽後四人圍在一起討論，對話如下：

阿基米德說：「第一題及第四題都沒答對。」

歐幾里得說：「第四題沒答對。」

費馬說：「答對第一題。」

高斯說：「答對第四題。」

四人各答對一題，而且每人答對的题目都不一樣；已知四人中，三人說了實話。

問誰答對第一題，又誰答對第四題？



〔玩鎖・玩索〕

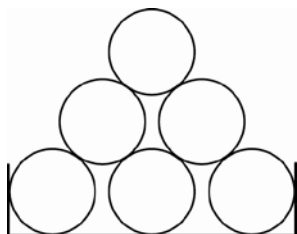
這是馬里蘭大學舉辦，高中數學競賽第 26 屆第二部分五個题目中的第一題；這是一道邏輯演繹與推理的問題，只是這道题目稍微複雜一點。不過，將所有可能情形討論一遍，必定可以找出答案。



遊戲 16

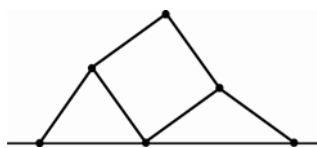
☆☆☆

下圖是施工單位將半徑相同的大型水管堆疊在一起的截面圖(底層的三個水管是隨意擺放的)，圖中是六個半徑相同的圓相切的情形。最左側、最右側與最上邊的這三個圓之圓心所形成的三角形為何種三角形？可以證明你的答案嗎？



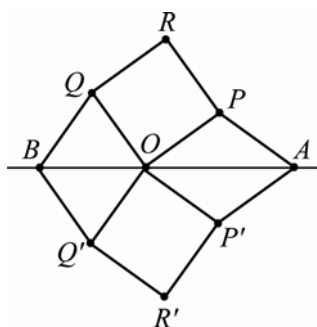
〔玩鎖・玩索〕

下圖是由長度一樣的 6 根木材架設起來的平面圖：



在這平面圖中，最左側、最右側與最上邊的這三個點所形成的三角形為何種三角形？可以證明你的答案嗎？又它與遊戲的關係為何？

將上述圖形對稱於直線 AB ，得到下圖：看見對稱之美了嗎？



此時，

$$|\overline{CR}| = |\overline{CR'}| = |\overline{CQ'} + \overline{Q'R'}| = \cdots = |\overline{AR}|.$$

試著完成上述…的部分。

動手玩數學~破解秘笈

第3期

遊戲 9

利用天平平衡時，兩邊力矩相等，得

$$Qa = m_1b, Qb = m_2a,$$

解得

$$m_1 = \frac{a}{b}Q, m_2 = \frac{b}{a}Q.$$

因此

$$P = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{\frac{a}{b}Q + \frac{b}{a}Q}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}Q.$$

將 P 與 Q 相減，得

$$\begin{aligned} P - Q &= \frac{a^2 + b^2}{2ab}Q - Q \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2ab}Q \\ &= \frac{(a - b)^2}{2ab}Q > 0. \end{aligned}$$

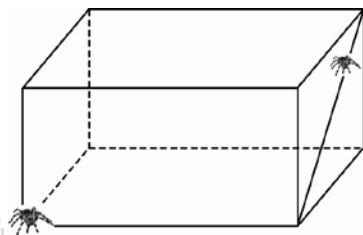
故估算重量 P 比物品實際重量 Q 重。

如果將上述攤平的左下角定坐標為 $(0, 0)$ ，右上角定坐標為 $(8, 4)$ ，那麼 $P = (8, 3)$ ， $Q = (0, 1)$ 。螞蟻爬行的距離為

$$\sqrt{(8-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

玩鎖·玩索解答

這是一道不容易的挑戰題，答案跟直覺相違背。如圖所示，在右側面對角線四分之一處。

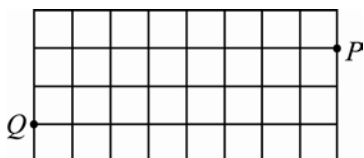


遊戲 10

- (1) 將魔術方塊定坐標，左後下角定為原點，右後下角定為 $(4, 0, 0)$ ，左前下角定為 $(0, 4, 0)$ 。此時 $P = (4, 1, 4)$ ， $Q = (0, 3, 0)$ ，兩點的直線距離為

$$\sqrt{(4-0)^2 + (1-3)^2 + (4-0)^2} = 6.$$

- (2) 因為螞蟻在魔術方塊表面爬行，所以必須將魔術方塊攤平考慮。



遊戲 11

(1) $a_3 = 9, l_3 = \frac{1}{2^3}.$

- (2) 因為每個灰色小正方形的旁邊伴隨著 3 個相同大小且未塗色的正方形，所以 a_n 是首項 1，公比 3 的等比數列，即

$$a_n = 3^{n-1}.$$

又因為每次分割時，邊長減半，所以 l_n 是首項 $\frac{1}{2}$ ，公比 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，即

$$l_n = \frac{1}{2^n}.$$

(3) 設所有被塗成灰色的正方形面積和為 S ，由(2)

知道，第 n 個圖所新增的灰色正方形面積為

$$a_n \cdot l_n^2 = 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

所以

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(4) 由(3)知道，被塗成灰色的面積與正方形面積一樣，所以正方形內的每一個點都會被塗成灰色。

遊戲 12

機率問題必須先求出樣本空間，兩人猜拳的樣本空間可以用序對表示，序對的第一位置代表一人出拳情形，第二位置代表另一人出拳情形。因此，會有（剪刀，剪刀），（剪刀，石頭），（剪刀，布），（石頭，剪刀），（石頭，石頭），（石頭，布），（布，剪刀），（布，石頭），（布，布）共 9 種情形。所以平手有 3 種，分出勝負有 6 種，即猜一次拳平手的機率為 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ，而分出勝負的機率為 $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。

由上述分析，得猜 n 次拳才分出勝負的機率，即前 $n-1$ 次平手，第 n 次分出勝負的機率為

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right).$$

因此，兩人猜拳分出勝負的期望次數為

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}.$$

又

$$3S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^{n-1}}.$$

將後式減去前式，得

$$2S = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2 + \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 3.$$

故兩人猜拳，平均要猜 1.5 次才分勝負。

玩鎖·玩索解答

如前面解答，可以將三人一起猜拳（三人一起出拳）的樣本空間表成三個位置的序對。將樣本空間列出，共有 $3^3 = 27$ 種，其中兩人勝一人有 9 種，一人勝兩人有 9 種，而平手有 9 種，即兩人勝一人、一人勝兩人、平手的機率都是 $\frac{1}{3}$ 。

現在分成兩種情形討論：

(1) 前 $n-1$ 次平手，第 n 次一人勝兩人的機率為

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

這種情形的期望值為

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

(2) 前 $n-1$ 次平手，第 n 次兩人勝一人的機率為

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

接下來剩兩人猜拳，根據遊戲知道期望值為 1.5。這種情形的期望值為

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1.5) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1.5}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} + \frac{3}{4}.$$

故三人一起猜拳，平均要猜

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} + \frac{3}{4} = 1.5 + 0.75 = 2.25.$$

次，才剛好有一人勝出。