91 年 數學科 學科能力測驗試卷

總　　　分

___________科___________班　學號___________姓名___________

第一部分：選擇題

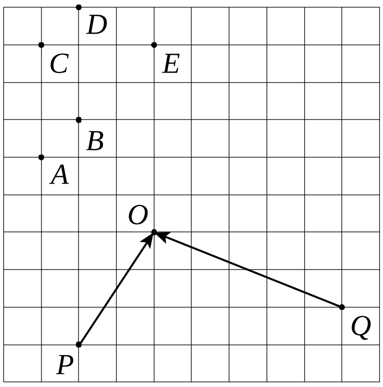
一、單一選擇題

說明：第 1 至 6 題，每題選出最適當的一個選項，每題答對得 5 分，答錯不倒扣．

(　　) 1. 設 $P(x, y)$為坐標平面上一點，且滿足 $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}$，那麼 P 點的位置在哪裡？ (A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E)x 軸或 y 軸上．

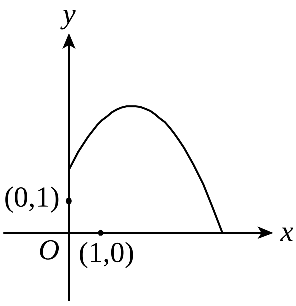
(　　) 2. 一群登山友，在山上發現一棵巨樹，隊中 10 位身高 170 公分的男生，手拉著手剛好環抱大樹一圈.問樹幹的直徑最接近下列何值？ (A)3 公尺 (B)5 公尺 (C)7 公尺 (D)9 公尺 (E)11 公尺．

(　　) 3. 如圖，下面哪一選項中的向量與另兩個向量 $\overline{PO}$、$\overline{QO}$ 之和等於零向量？ (A)$\overline{AO}$ (B)$\overline{BO}$ (C)$\overline{CO}$ (D)$\overline{DO}$ (E)$\overline{EO}$ ．



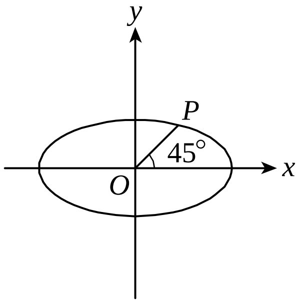
(　　) 4. 若某校 1000 位學生的數學段考成績平均分數是 65.24 分，樣本標準差是 5.24 分，而且已知成績分布呈現常態分配，試問全校約有多少人數學成績低於 60 分？ (A)約 80 人 (B)約 160 人 (C)約 240 人 (D)約 320 人 (E)約 400 人．

(　　) 5. 試問用下列哪一個函數的部分圖形來描述右圖較恰當？ (A)$(x-2)^2-2$ (B)$2\sin(x)+2$ (C)$2\cos(x)$ (D)$-0.5(x-2)^2+4$ (E)$3-2^x$ ．



(　　) 6. 在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4、2．如圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 45 度的直線在第一象限跟橢圓相交於 P．則此交點 P 與中心 O 的

距離為 (A)1.5 (B)$\sqrt{1.6}$ (C)$\sqrt{2}$ (D)$\sqrt{2.5}$ (E)$\sqrt{3.2}$.



二、多重選擇題

說明：第 1 至 6 題，每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項．每題答對得 5 分，答錯不倒扣，未答者不給分．只錯一個可獲 2.5 分，錯兩個或兩個以上不給分．

( ) 1. 若實數 a, b, c 滿足 $abc>0$, $ab+bc+ca<0$, $a+b+c>0$, $a>b>c$, 則下列選項何者為真? (A)$a>0$ (B)$b>0$ (C)$c>0$ (D)$|a|>|b|$ (E)$a^2>c^2$.

( ) 2. 一機器狗每秒鐘前進或者後退一步，程式設計師讓機器狗以前進 3 步，然後再後退 2 步的規律移動．如果將此機器狗放在數線的原點，面向正的方向，以 1 步的距離為 1 單位長．令 $P(n)$表示第 n 秒時機器狗所在位置的坐標，且 $P(0)=0$，那麼下列選項何者為真? (A)$P(3)=3$ (B)$P(5)=1$ (C)$P(10)=2$ (D)$P(101)=21$ (E)$P(103)<P(104)$.

( ) 3. 下列哪些選項與方程組$\begin{cases}2x+y+3z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$的解集合相同? (A)$y=0$ (B)$\begin{cases}2x+3z=0\\y=0\end{cases}$ (C)$x=y=0$ (D)$\begin{cases}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$ (E)$\begin{cases}6x+4y+9z=0\\2x+y+3z=0\end{cases}$.

( ) 4. 觀察相關的函數圖形,判斷下列選項何者為真? (A)$10^x=x$ 有實數解 (B)$10^x=x^2$ 有實數解 (C)為實數時，$10^x>x$ 恆成立 (D)$x>0$ 時，$10^x>x^2$ 恆成立 (E)$10^x=-x$ 有實數解．

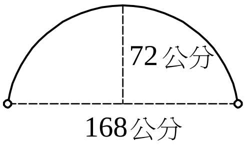
( ) 5. 某甲自 89 年 7 月起，每月 1 日均存入銀行 1000 元，言明以月利率 0.5%按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出．某乙則於 89 年 7 月起，每單月（一月、三月、五月⋯）1 日均存入銀行 2000 元，亦以月利率 0.5%按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出．一整年中，兩人都存入本金 12000 元．提出時，甲得本利和 A 元，乙得本利和 B 元．問下列選項何者為真? (A)$B>A$ (B)$A=1000\left[\sum_{k=1}^{12}(\frac{1005}{1000})^k\right]$ (C)$B=2000\left[\sum_{k=1}^{6}(\frac{1005}{1000})^{2k}\right]$ (D)$A<12000(\frac{1005}{1000})^{12}$ (E)$B<12000(\frac{1005}{1000})^{12}$.

( ) 6. 在△ABC 中，下列哪些選項的條件有可能成立? (A)$\sin A=\sin B=\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B)$\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 均小於 $\frac{1}{2}$ (C)$\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 均大於$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D)$\sin A=\sin B=\sin C=\frac{1}{2}$ (E)$\sin A=\sin B=\frac{1}{2}$，$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

第二部分：填充題

說明：每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分．

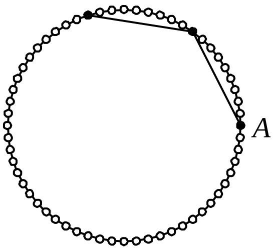
1. 工匠在窗子外邊想做一個圓弧型的花臺，此花臺在窗口的中央往外伸出 72 公分，窗的口寬度是 168 公分．則此圓弧的圓半徑為__________公分．



2. $2^{20}-1$ 與 $2^{19}+1$ 的最大公因數為__________．

3. 某公司民國 85 年營業額為 4 億元．民國 86 年營業額為 6 億元，該年的成長率為 50%．87、88、89 三年的成長率皆相同，且民國 89 年的營業額為 48 億元．則該公司 89 年的成長率為__________%．

4. 在一個圓的圓周上，平均分布了 60 個洞，兩洞間稱為一間隔．在 A 洞打上一支木樁並綁上線，然後依逆時針方向前進，每隔 9 個間隔就再打一支木樁，並綁上線，依此繼續操作，如右圖所示．試問輪回到 A 洞需再打樁前，總共已經打了幾支木樁？答__________支．



5. 某次網球比賽共有 128 位選手參加，採單淘汰制，每輪淘汰一半的選手，剩下一半的選手進入下一輪．在第 1 輪被淘汰的選手可獲得 1 萬元，在第 2 輪被淘汰的選手可獲得 2 萬元，在第 k 輪被淘汰的選手可獲得 2^{k-1} 萬元，而冠軍則可獲得 128 萬元．試問全部比賽獎金共__________萬元?

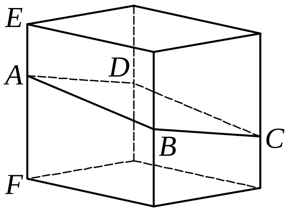
6. 某人隔河測一山高，在 A 點觀測山時，山的方位為東偏北 60°，山頂的仰角為 45°，某人自 A 點向東行 600 公尺到達 B 點，山的方位變成在西偏北 60°，則山有多高？答：__________公尺．

7. 有一群體有九位成員，其身高分別為

   160，163，166，170，172，174，176，178，180（單位：公分）

   此九人的平均身高為 171 公分．今隨機抽樣 3 人，則抽到 3 人的平均身高等於母體平均身高的機率為__________．（化成最簡分數）

8. 右圖為一正立方體，被一平面截出一個四邊形 $ABCD$，其中 B，D 分別為稜的中點，且 $\overline{EA}:\overline{AF}=1:2$．則 $\cos\angle DAB=$__________．（化成最簡分數）



參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2. 通過(x_1 , y_1)與(x_2 , y_2)的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

3. 等比級數$\{ar^{n-1}\}$的前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a\times(1-r^n)}{1-r}$，$r\neq1$.

4. $\triangle ABC$ 的正弦及餘弦定理

   (1) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，$R$ 為外接圓的半徑（正弦定理）

   (2) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$（餘弦定理）.

5. 統計公式：

   算術平均數 $M(=\overline{X})=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

   標準差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-\overline{X}^2}$.

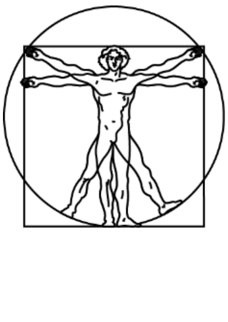
   相關係數 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{n\times S_X S_Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2}}$.

   其中 S_X 為隨機變數 X 之標準差，S_Y 為隨機變數 Y 之標準差 .

6. 常態分布的資料對稱於平均數 M . 且當標準差為 S 時，該資料大約有 68%落在區間(M－S , M＋S)內，約有 95%落在區間(M－2S , M＋2S)內，約有 99.7%落在區間(M－3S , M＋3S)內 .

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx1.414$；$\sqrt{3}\approx1.732$；$\sqrt{5}\approx2.236$；$\sqrt{6}\approx2.449$；$\pi\approx3.142$.

8. 對數值：$\log_{10}2\approx0.3010$，$\log_{10}3\approx0.4771$，$\log_{10}5\approx0.6990$，$\log_{10}7\approx0.8451$.

9. 

答　案

第一部分：選擇題

一、單一選擇題

1. A　2. B　3. C　4. B　5. D　6. B

二、多重選擇題

1. ADE　2. ABCD　3. BDE　4. BCDE　5. 全　6. ABE

第二部分：填充題

1. 85　2. 3　3. 100　4. 20　5. 576　6. 600　7. $\frac{1}{28}$　8. $\frac{1}{37}$

解　析

第一部分：選擇題

一、單一選擇題

2. 雙手長度約等於身高 170 公分＝1.7 公尺，

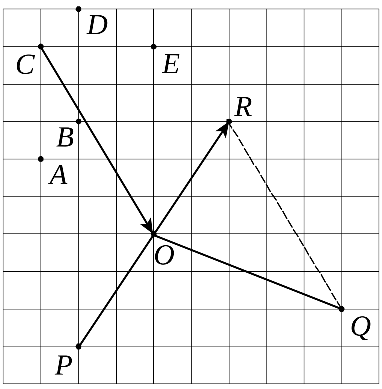
樹幹圓周長＝$2\pi r$＝10×1.7＝17 公尺，

$\therefore 2r = \frac{17}{\pi} = \frac{17}{3.142} = 5.4$（公尺），

利用參考數值：$\sqrt{2} \approx 1.414$；$\sqrt{3} \approx 1.732$；$\sqrt{5} \approx 2.236$；$\sqrt{6} \approx 2.449$；$\pi \approx 3.142$.

3. 由圖 $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QR}$，

$\therefore \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{QR} = \vec{0}$.



4. ＜91 學測參考資料 6＞

常態分布的資料對稱於平均數 M 且當標準差為 S 時，該資料有 68%落在區間（$M-S$，$M+S$）內，

本題低於 60 分者恰為低於平均分數一個標準差者(65.24－5.24)，

配合參考資料 6 得低於 60 分約有：$1000 \times [\frac{(1-68\%)}{2}]$＝160 人 .

5. 圖形最高點約在(2 , 4)，而選項　沒有最高點，　最高點在($\frac{\pi}{2}+2k\pi$, 4)，　最高點在($2k\pi$, 2)，　最高點在(2 , 4)，

　沒有最高點 .

6. $\overline{OP}$ 斜角 45°，故 P 點坐標可設成$(t, t)(t>0)$．

又 P 在$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ 上，故$\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{1}=1(t>0)$．

解得 $t=\sqrt{\frac{4}{5}}$， $\overline{OP}=\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{8}{5}}=\sqrt{1.6}$ ．

二、多重選擇題

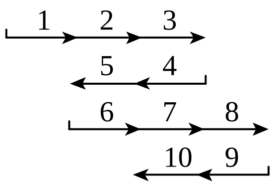
1. $\because abc>0$，$a>b>c$，$a+b+c>0$，$ab+bc+ca<0$，

	a	b	c	
①	+	+	+	$\longrightarrow$ 不合
②	+	−	−	
③	−	+	−	$\longrightarrow$ 不合
④	−	−	+	$\longrightarrow$ 不合

僅有 $a>0$，$b<0$，$c<0$ 合乎所有已知條件，

$\because a+b+c>0 \Rightarrow a>-(b+c)>0$，$\therefore |a|>|b+c|$　即$|a|>|b|$且$|a|>|c| \Rightarrow a^2>c^2$，故　，　，　成立．

2. 機器狗的行進方式如圖，表示每 5 秒鐘前進一步．



$P(3)=3$

$P(5)=1$

$P(10)=2$

$P(101)=[\frac{101}{5}]+1=21$

$P(103)=[\frac{103}{5}]+3=23$

$P(104)=23-1=22$

$\therefore P(103)>P(104)$，故選　　　　．

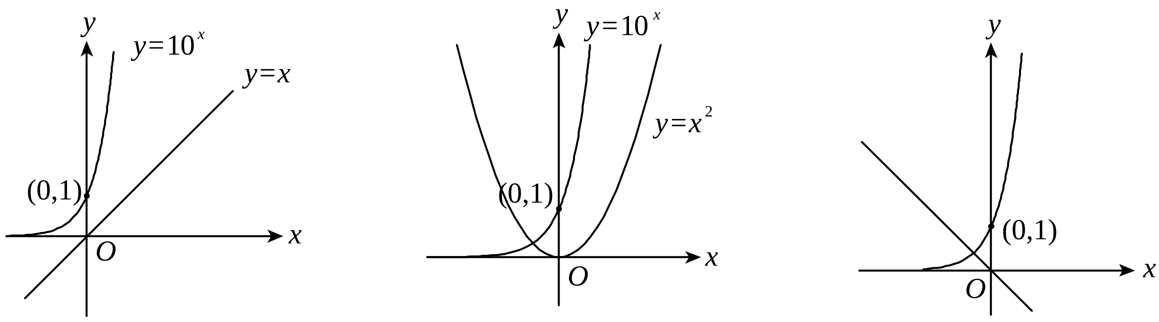
3. $\begin{cases}2x+y+3z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases} \Rightarrow x:y:z=\begin{vmatrix}1&3\\3&6\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3&2\\6&4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=(-3):0:2$，令$\begin{cases}x=-3t\\y=0\\z=2t\end{cases}$

$\begin{cases}2x+3z=0 \text{ 令} z=2t\text{，則} x=-3t\\y=0 \qquad y=0\text{（合）}\end{cases}$

$\begin{cases}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases} \overset{\times 2}{\Rightarrow} \begin{cases}2x+y+3z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$（合）

$\begin{cases}6x+4y+9z=0\\2x+y+3z=0\end{cases} \Rightarrow x:y:z=\begin{vmatrix}4&9\\1&3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}9&6\\3&2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}6&4\\2&1\end{vmatrix}=3:0:(-2)$（合）.

4. 圖一　　　　　　　　　　　　　圖二　　　　　　　　　　　　　圖三



$10^x=x \Rightarrow \begin{cases} y=10^x \\ y=x \end{cases}$ 由圖形之相交狀況即可知是否有解．

$10^x=x^2 \Rightarrow \begin{cases} y=10^x \\ y=x^2 \end{cases}$ 　由圖一可知 $10^x>x$；由圖二可知當 $x>0$，$10^x>x^2$．

$10^x=-x \Rightarrow \begin{cases} y=10^x \\ y=-x \end{cases}$ 有實數解．

5. 因每期期初存入 P 元，每期利率為 r，則 n 期後本利和為 $P(1+r)^n+P(1+r)^{n-1}+\cdots+P(1+r)=P\sum_{k=1}^{n}(1+r)^k$ ．

故

$A=1000\sum_{k=1}^{12}(\frac{1005}{1000})^k$ ，$B=2000\sum_{k=1}^{6}(\frac{1005}{1000})^{2k}$ ．

$B=1000[2(\frac{1005}{1000})^2+2(\frac{1005}{1000})^4+\cdots+2(\frac{1005}{1000})^{12}]$

$>1000[(\frac{1005}{1000})^1+(\frac{1005}{1000})^2+(\frac{1005}{1000})^3+(\frac{1005}{1000})^4+\cdots+(\frac{1005}{1000})^{11}+(\frac{1005}{1000})^{12}]=A$ ．

$A=1000[(\frac{1005}{1000})^1+(\frac{1005}{1000})^2+\cdots+(\frac{1005}{1000})^{12}]<1000[12(\frac{1005}{1000})^{12}]=12000(\frac{1005}{1000})^{12}$ ．

$B=2000[(\frac{1005}{1000})^2+(\frac{1005}{1000})^4+\cdots+(\frac{1005}{1000})^{12}]<2000[6(\frac{1005}{1000})^{12}]=12000(\frac{1005}{1000})^{12}$ ．

6. $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})=60°$，$180°-60°=120°$，$\sin^{-1}(\frac{1}{2})=30°$，$180°-30°=150°$ ．

因 $0<r\leq 1$，$0<\theta<\pi$ 時，若 $\sin\theta=r$，則 $\theta=\sin^{-1}r$ 或 $\pi-\sin^{-1}r$ ．

及 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ 時，$\sin\theta$ 為遞增函數，$\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$ 時，$\sin\theta$ 為遞減函數．

故 A，B，$C=60°$或 $120°$．取 $A=B=C=60°$即可．

取 $A=B=10°$，$C=160°$即可．

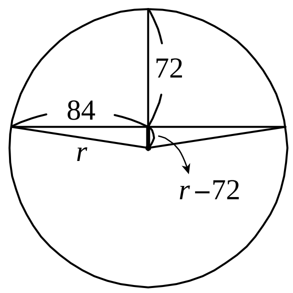
$60°<A$，B，$C<120°$，此時 $180°<A+B+C$，故不可能．

A，B，$C=30°$或 $150°$，不論如何選取，$A+B+C$ 恆不為 $180°$，故不可能．

A，$B=30°$或 $150°$，$C=60°$或 $120°$．取 $A=B=30°$，$C=120°$即可．

第二部分：填充題

1. 設圓半徑為 r，則 $r^2=84^2+(r-72)^2$，$r^2=84^2+r^2-144r+82^2$，$\therefore 144r=7056+5184=12240$，$r=85$.



2. 設最大公因數為 d，則 $d\mid 2^{20}-1$ 且 $d\mid 2^{19}+1 \quad\Rightarrow\quad d\mid(2^{19}+1)\times 2+(-1)(2^{20}-1)\Rightarrow\quad d\mid 3$，$\therefore d=1$ 或 3，

   又 $2^{20}-1=4^{10}-1=(3+1)^{10}-1=3k_1+1-1=3k_1$

   $2^{19}+1=4^9\times 2+1=(3+1)^9\times 2+1=(3k_2+1)\times 2+1=3(2k_2+1)$ ，

   $\therefore 3\mid 2^{20}-1$ 且 $3\mid 2^{19}+1$，$\therefore$最大公因數為 3 .

3. 由題意知若前後兩年營業額為 A 及 A′，則第二年之成長率 $\mathrm{r}=\dfrac{A'-A}{A}\times 100\%$或 $\mathrm{A}'=(1+\mathrm{r})\mathrm{A}$.

   設 87，88，89 三年之成長率為 x，87，88 二年營業額分別為 a，b 億，

   則 $48=(1+\mathrm{x})\mathrm{b}=(1+\mathrm{x})^2\mathrm{a}=(1+\mathrm{x})^3\times 6$，故 $1+\mathrm{x}=2$，即 $\mathrm{x}=1=100\%$.

4. $[60、9]=180$，$\dfrac{180}{9}=20$，共打了 20 支木樁 .

5. $1\times\dfrac{128}{2}+2\times\dfrac{128}{2^2}+\cdots+2^6\times\dfrac{128}{2^7}+128\times 1=64\times 7+128=576$（萬元）.

7. 將題中各值減去平均值 171 後依次為：-11，-8，-5，-1，1，3，5，7，9 .

   取和為零的三數：因只有-8 為偶數，故-8 必取 .

   (1)二正一負：有$(1,7,-8)$，$(3,5,-8)$兩種；(2)一正二負：只有$(9,-8,-1)$一種 .

$$\frac{(2+1)}{C_3^9}=\frac{3}{(\frac{9\times8\times7}{1\times2\times3})}=\frac{1}{28}\ .$$

8. 將圖形坐標化，$A(1,0,\frac{2}{3})$，$B(1,1,\frac{1}{2})$，$D(0,0,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(0,1,-\frac{1}{6})$ ，$\overrightarrow{AD}=(-1,0,-\frac{1}{6})$

$$\cos(\angle DAB)=\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AD}|}=\frac{0+0+\frac{1}{36}}{\sqrt{1+\frac{1}{36}}\times\sqrt{1+\frac{1}{36}}}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{37}{36}}=\frac{1}{37}\ .$$