110指考最前線-數學甲

班級：＿＿＿＿＿　座號：＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿

總分	

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

(　　)1. 設 x_0、y_0 為正實數。若坐標平面上的點 $\left(10x_0, 100y_0\right)$ 在函數 $y=10^x$ 的圖形上，則點 $\left(x_0, \log y_0\right)$ 會在直線 $y=ax+b$ 的圖形上，其中 a、b 為實數。試問 $2a-b$ 的值為何？

(1) 4
(2) 9
(3) 15
(4) 18
(5) 22。

(　　)2. 研究團隊採用某快篩試劑的檢驗，以了解保護區內生物因環境汙染而導致體內毒素累積超過標準的比率。此試劑檢驗結果只有紅色、黃色兩種。

依據過去的經驗得知：若體內毒素累積超過標準，經此試劑檢驗後，有 75%顯示為紅色；若體內毒素累積未超過標準，經此試劑檢驗後，有 95%顯示為黃色。已知此保護區的某類生物經試劑檢驗後，有 7.8%的結果顯示為紅色。假設此類生物實際體內毒素累積超過標準的比率為 p%，試選出正確的選項。

(1) $1 \le p < 3$
(2) $3 \le p < 5$
(3) $5 \le p < 7$
(4) $7 \le p < 9$
(5) $9 \le p < 11$。

(　　)3. 試求極限 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{10^{10}}{n^{10}}\left[1^9+2^9+3^9+\cdots+(2n)^9\right]$ 的值。

(1) 10^9
(2) $10^9 \times \left(2^{10}-1\right)$
(3) $2^9 \times \left(10^{10}-1\right)$
(4) $10^9 \times 2^{10}$
(5) $2^9 \times 10^{10}$。

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(　　)4. 某電子公司有數百名員工，其用餐方式分為自備、外食兩種。經長期調查發現：若當日用餐為自備的員工，則隔天會有 10%轉為外食；若當日用餐為外食的員工，則隔天會有 20%轉為自備。

假設 x_0、y_0 分別代表該公司今日用餐自備人數與外食人數占員工總人數的比例，其中 x_0、y_0 皆為正數，且 x_n、y_n 分別代表經過 n 日後用餐自備人數與外食人數占員工總人數的比例。在該公司員工不變動的情形下，試選出正確的選項。

(1) $y_1 = 0.9y_0 + 0.2x_0$

(2) $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$

(3)若 $\frac{x_0}{y_0} = \frac{2}{1}$，則 $\frac{x_n}{y_n} = \frac{2}{1}$ 對任意正整數 n 均成立

(4)若 $y_0 > x_0$，則 $y_1 > x_1$

(5)若 $x_0 > y_0$，則 $x_0 > x_1$。

(　　)5. 假設 $f(x)$ 為五次實係數多項式，且 $f(x)$ 除以 $x^n - 1$ 的餘式為 $r_n(x)$，n 是正整數。試選出正確的選項。

(1) $r_1(x) = f(1)$

(2) $r_2(x)$ 是一次實係數多項式

(3) $r_4(x)$ 除以 $x^2 - 1$ 所得的餘式等於 $r_2(x)$

(4) $r_5(x) = r_6(x)$

(5)若 $f(-x) = -f(x)$，則 $r_3(-x) = -r_3(x)$。

(　　)6. 一個標有 1 至 12 號格子的 12 格戳戳樂遊戲，每回遊戲以投擲一枚均勻銅板四次來決定要戳哪些格子。規則如下：

（一）第一次投擲銅板，若是正面，則戳 1 號格子；若是反面，則戳 3 號格子。

（二）第二、三、四次投擲銅板，若是正面，則所戳格子的號碼為前一次所戳格子的號碼加 1；若是反面，則所戳格子的號碼為前一次所戳格子的號碼加 3，依此類推。

例如：投擲銅板四次的結果依序為「正、反、反、正」，則會戳編號分別為 1、4、7、8 號的四個格子。

假設 p_m 代表在每回遊戲中 m 號格子被戳到的機率，試選出正確的選項。

(1) $p_2 = \frac{1}{4}$

(2) $p_3 = \frac{1}{2}$

(3) $p_4 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3$

(4) $p_8 > p_{10}$

(5)在 4 號格子被戳到的條件下，3 號格子被戳到的機率為 $\frac{1}{2}$。

(　　)7. 設 $F(x)$ 為一實係數多項式且 $F'(x)=f(x)$。已知 $f'(x)>x^2+1.1$ 對所有的實數 x 均成立，試選出正確的選項。

(1) $f'(x)$ 為遞增函數

(2) $f(x)$ 為遞增函數

(3) $F(x)$ 為遞增函數

(4) $\left[f(x)\right]^2$ 為遞增函數

(5) $f\left(f(x)\right)$ 為遞增函數。

(　　)8. 已知 z_1、z_2、z_3、z_4 為四個相異複數，且其在複數平面上所對應的點，依序可連成一個平行四邊形，試問下列哪些選項必為實數？

(1) $(z_1-z_3)(z_2-z_4)$

(2) $z_1-z_2+z_3-z_4$

(3) $z_1+z_2+z_3+z_4$

(4) $\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$

(5) $\left(\dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_3}\right)^2$。

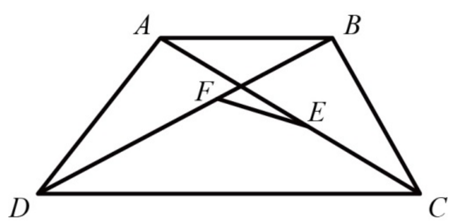
三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（9–22）。
2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 從 6、8、10、12 中任取三個相異數字，作為三角形的三邊長，且設此三角形的最大內角為 θ。在所有可能構成的三角形中，$\cos\theta$ 的最小值為 $\dfrac{⑨⑩⑪}{⑫⑬}$。（化成最簡分數）

B. 坐標平面上，一個半徑為 12 的圓與直線 $x+y=0$ 相交於兩點，且這兩點的距離為 8。若此圓與直線 $x+y=24$ 交於 P、Q 兩點，則線段 $\overline{PQ}$ 的長度為 ⑭$\sqrt{⑮}$。（化成最簡根式）

C. 考慮一梯形 $ABCD$，其中 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DC}$ 平行。已知點 E、F 分別在對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 上，且 $\overline{AB}=\dfrac{2}{5}\overline{DC}$、$\overline{AE}=\dfrac{3}{2}\overline{EC}$、$\overline{BF}=\dfrac{2}{3}\overline{FD}$，如圖所示。



若將向量 $\overrightarrow{FE}$ 表示成 $\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$，則實數 $\alpha=\dfrac{⑯}{⑰⑱}$、$\beta=\dfrac{⑲⑳}{㉑㉒}$。（化成最簡分數）

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，該部分不予計分。每一子題配分標於題末。

一、坐標空間中，令 E 為通過三點 $A(0,-1,-1)$、$B(1,-1,-2)$、$C(0,1,0)$ 的平面。假設 H 為空間中一點，且滿足 $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+3\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)$。根據上述，試回答下列問題。

(1)試求四面體 $ABCH$ 的體積。（4 分）（註：四面體體積為三分之一的底面積乘以高）

(2)令點 H' 為點 H 相對於平面 E 的對稱點，試求 H' 的坐標。（4 分）

(3)試判斷點 H' 在平面 E 的投影點是否位在△ABC 的內部？並說明理由。（4 分）（註：三角形的內部不含三角形的三邊）

二、坐標平面上，以 Γ 表示多項式函數 $y=x^3-4x^2+5x$ 的圖形，且以 L 表示直線 $y=mx$，其中 m 為實數。根據上述，試回答下列問題。

(1)當 $m=2$ 時，試求出在 $x\geq 0$ 的範圍內，Γ 與 L 的三個相異交點的 x 坐標。（2 分）

(2)承(1)，試求 Γ 與 L 所圍有界區域面積的值。（4 分）

(3)在 $x\geq 0$ 的範圍內，若 Γ 與 L 有三個相異交點，則滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a<m<b$，試求 a、b 之值。（6 分）

試題大剖析

解題：陳清風老師

答　案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (5)　2. (2)　3. (4)

二、多選題

4. (2)(3)　5. (1)(3)　6. (1)(3)(4)　7. (2)(5)　8. (2)(4)

三、選填題

A. $-\dfrac{11}{24}$　B. $8\sqrt{7}$　C. $\alpha=\dfrac{9}{25},\beta=-\dfrac{4}{25}$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\dfrac{9}{2}$　(2) $\left(-\dfrac{16}{3},\dfrac{4}{3},-8\right)$　(3)否，見解析

二、(1) $0,1,3$　(2) $\dfrac{37}{12}$　(3) $a=1,b=5$

解　析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.　出處：【99 課綱】第一冊　第三章 指數、對數函數

【108 課綱】第 3A 冊　單元 7 對數函數、第 3B 冊　單元 5 對數函數

難易度：易

解：因為點$(10x_0,100y_0)$在函數$y=10^x$的圖形上，所以$100y_0=10^{10x_0}$。

兩邊取 log，得$\log(100y_0)=\log10^{10x_0}\Rightarrow\log100+\log y_0=10x_0\log10$

$\Rightarrow 2+\log y_0=10x_0\Rightarrow\log y_0=10x_0-2$。

因此$a=10,b=-2$，得$2a-b=22$。

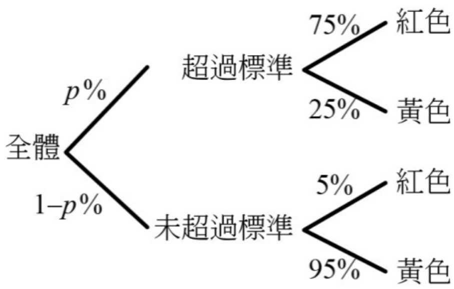
故選(5)。

2. 出處：【99 課綱】第二冊　第三章 機率

　　【108 課綱】第 4A 冊　單元 7 條件機率與貝式定理、第 4B 冊　單元 5 貝氏定理

難易度：易

解：依題意，作樹狀圖如下：



因為有 7.8%的結果顯示紅色，所以

$p\% \times 75\% + (1 - p\%) \times 5\% = 7.8\%$

$\Rightarrow p\% \times 75\% + 5\% - p\% \times 5\% = 7.8\%$

$\Rightarrow 75p + 500 - 5p = 780 \Rightarrow 70p = 280$，

解得 $p = 4$。故選(2)。

3. 出處：【99 課綱】選修數學甲(下)　第二章 多項式函數的微積分

　　【108 課綱】選修數學甲(上)　單元 5 積分

難易度：中

解：由黎曼和，得

$$原式 = 10^{10} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{2n}{n}\right)^9\right]$$

$$= 10^{10} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x \quad （其中\ f(x) = x^9，\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{2-0}{2n}）$$

$$= 10^{10}\int_0^2 x^9 dx = 10^{10} \times \left(\frac{1}{10}x^{10}\right)\Big|_0^2 = 10^{10} \times \left(\frac{1}{10} \times 2^{10} - 0\right) = 10^9 \times 2^{10}。$$

故選(4)。

4. 出處：【99 課綱】第四冊　第三章 矩陣

【108 課綱】第 4A 冊　單元 10 矩陣的應用

難易度：中

解：依題意，得轉移矩陣$\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}$。

(1)╳：因為$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9x_0+0.2y_0\\0.1x_0+0.8y_0\end{bmatrix}$，所以 $y_1=0.1x_0+0.8y_0$。

(2)○：由轉移矩陣的意涵，得知此選項正確。

(3)○：因為$\dfrac{x_0}{y_0}=\dfrac{2}{1}$且 $x_0+y_0=1$，所以 $x_0=\dfrac{2}{3},y_0=\dfrac{1}{3}$。因此$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$。

依此類推可得，$\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$對任意正整數 n 均成立，即$\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{2}{1}$。

(4)╳：例如當 $x_0=0.45,y_0=0.55$時，$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.45\\0.55\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.515\\0.485\end{bmatrix}$，此時 $y_1<x_1$。

(5)╳：例如當 $x_0=0.6,y_0=0.4$時，$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6\\0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.62\\0.38\end{bmatrix}$，此時 $x_0<x_1$。

故選(2)(3)。

5. 出處：【99 課綱】第一冊　第二章 多項式函數

【108 課綱】第一冊　單元 8 多項式的除法原理

難易度：中

解：設 $f(x)$除以x^n-1的商式為$q_n(x)$。由除法原理，得 $f(x)=(x^n-1)q_n(x)+r_n(x)$。

(1)○：因為 $f(x)=(x-1)q_1(x)+r_1(x)$，所以 $f(1)=r_1(1)$。

(2)╳：例如當 $f(x)=(x^2-1)(x^3+1)+2$時，$r_2(x)=2$不是一次式。

(3)○：因為 $f(x)=(x^4-1)q_4(x)+r_4(x)=(x^2-1)(x^2+1)q_4(x)+r_4(x)$，

且$r_4(x)$的次數可能超過 2 次，

所以 $f(x)$除以x^2-1的餘式等於$r_4(x)$除以x^2-1的餘式，

即$r_2(x)$等於$r_4(x)$除以x^2-1的餘式。

(4)╳：例如當 $f(x)=(x^5-1)\times1+2$時，$r_5(x)=2$，$r_6(x)=f(x)$，此時$r_5(x)\neq r_6(x)$。

(5)╳：例如當 $f(x)=x^5=(x^3-1)(x^2)+x^2$時，滿足 $f(-x)=-f(x)$，

但$r_3(x)=x^2$不滿足$r_3(-x)=-r_3(x)$。

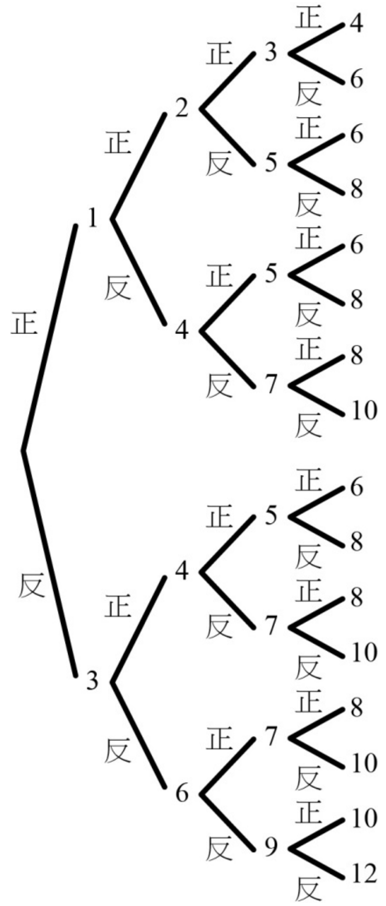
故選(1)(3)。

6. 出處：【99 課綱】第二冊　第三章 機率

【108 課綱】第 4A 冊　單元 7 條件機率與貝式定理、第 4B 冊　單元 4 條件機率

難易度：中

解：依題意，作樹狀圖如下：



上圖中的數字表被戳中的格號。利用上圖，討論如下。

(1)○：$p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$。

(2)╳：$p_3=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{8}$。

(3)○：因為 $p_1=\frac{1}{2}$，$p_3=\frac{5}{8}$，$p_4=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{16}$，所以 $p_4=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{2}p_3$。

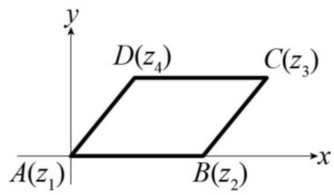
(4)○：因為 $p_8=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 6=\frac{3}{8}$，$p_{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 4=\frac{1}{4}$，所以 $p_8>p_{10}$。

(5)╳：$P\left(\text{戳中 3 號}\mid\text{戳中 4 號}\right)=\dfrac{P\left(\text{戳中 3 號且戳中 4 號}\right)}{P\left(\text{戳中 4 號}\right)}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{16}}=\frac{5}{9}$。

故選(1)(3)(4)。

7. 出處：【99 課綱】選修數學甲(下)　第二章 多項式函數的微積分
【108 課綱】選修數學甲(上)　單元 4 函數性質的判定
難易度：中
解：(1)╳：例如當 $f'(x)=x^2+2$ 時，$f'(x)$ 不是遞增函數。
(2)○：因為 $x^2+1.1$ 恆正，所以 $f'(x)$ 恆正，因此 $f(x)$ 是遞增函數。
(3)╳：例如當 $F(x)=\frac{1}{12}x^4+x^2$，$F'(x)=f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x$ 時，滿足 $f'(x)=x^2+2>x^2+1.1$，
但因為 $F'(x)=\frac{1}{3}x^3+2x$ 不是恆正，所以 $F(x)$ 不是遞增函數。
(4)╳：例如當 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x$ 時，滿足 $f'(x)=x^2+2>x^2+1.1$。
但 $\left[f(x)\right]^2=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]^2=\frac{1}{9}x^6+\frac{4}{3}x^4+4x^2$ 的導函數 $\frac{2}{3}x^5+\frac{16}{3}x^3+8x$ 不是恆正，
所以 $\left[f(x)\right]^2$ 不是遞增函數。
(5)○：函數 $f\left(f(x)\right)$ 的導函數為 $f'\left(f(x)\right)\times f'(x)$。
因為 $f'\left(f(x)\right)\times f'(x)>\left(\left(f(x)\right)^2+1.1\right)\times f'(x)$ 對所有實數 x 均成立，
且 $\left(f(x)\right)^2+1.1$ 恆正、$f'(x)$ 恆正，所以 $f\left(f(x)\right)$ 的導函數恆正，
因此 $f\left(f(x)\right)$ 是遞增函數。
故選(2)(5)。

8. 出處：【99 課綱】選修數學甲(上)　第二章 三角函數
【108 課綱】選修數學甲(下)　單元 4 複數的幾何意涵
難易度：中
解：設 z_1,z_2,z_3,z_4 在複數平面上所對應的點分別為 A,B,C,D。
(1)╳：例如當 $z_1=0,z_2=2,z_3=3+i,z_4=1+i$ 時，
四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，如圖所示。
此時 $(z_1-z_3)(z_2-z_4)=(-3-i)(1-i)=-4+2i$ 不是實數。



(2)○：因為 z_1-z_2 所代表的向量 $\overrightarrow{BA}$ 與 z_3-z_4 所代表的向量 $\overrightarrow{DC}$ 互為反向量，
所以 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$。
因此 $z_1-z_2+z_3-z_4=0$ 為實數。
(3)╳：承(1)的例子，$z_1+z_2+z_3+z_4=6+2i$ 不是實數。
(4)○：因為 z_1-z_2 所代表的向量 $\overrightarrow{BA}$ 與 z_3-z_4 所代表的向量 $\overrightarrow{DC}$ 互為反向量（長度相等、夾角 $180°$），所以 $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}=1(\cos 180°+i\sin 180°)=-1$ 為實數。
(5)╳，承(1)的例子，$\left(\frac{z_2-z_4}{z_1-z_3}\right)^2=\left(\frac{1-i}{-3-i}\right)^2=\left(\frac{-1+2i}{5}\right)^2=\frac{-3-4i}{25}$ 不是實數。
故選(2)(4)。

三、選填題

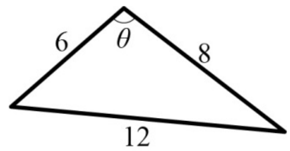
A. 出處：【99 課綱】第三冊　第一章 三角

【108 課綱】第二冊　單元 12 三角比的性質

難易度：易

解：因為θ愈大$\cos\theta$的值愈小，所以θ的對邊選最長邊 12，另兩邊選最短的兩邊 6,8。

利用餘弦定理，得$\cos\theta$的最小值為$\dfrac{6^2+8^2-12^2}{2\times6\times8}=-\dfrac{44}{96}=-\dfrac{11}{24}$。



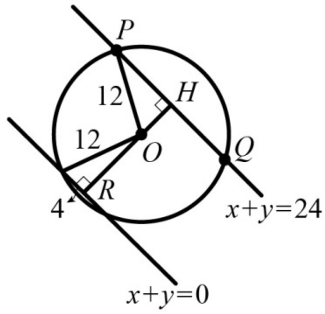
B. 出處：【99 課綱】第三冊　第二章 直線與圓

【108 課綱】第一冊　單元 7 圓與直線的關係

難易度：中

解：利用兩平行直線的距離公式，

得$x+y=0$與$x+y=24$的距離為$\dfrac{|0-(-24)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{24}{\sqrt{2}}=12\sqrt{2}$。



利用畢氏定理，得$\overline{OR}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$，

因為$\overline{OH}=12\sqrt{2}-8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，所以$\overline{PH}=\sqrt{12^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=4\sqrt{7}$。

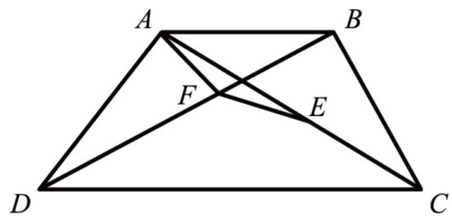
故$\overline{PQ}=2\overline{PH}=8\sqrt{7}$。

C. 出處：【99 課綱】第三冊　第三章 平面向量

【108 課綱】第 3A 冊　單元 8 平面向量、第 3B 冊　單元 6 平面向量

難易度：中

解：連接$\overline{AF}$。利用向量的分解及分點公式，得



$$\begin{aligned}\overrightarrow{FE}&=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}\\&=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\right)\\&=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\overrightarrow{DC}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\\&=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{6}{25}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\\&=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{6}{25}\overrightarrow{AC}+\frac{6}{25}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\\&=\frac{9}{25}\overrightarrow{AC}-\frac{4}{25}\overrightarrow{AD}\text{。}\end{aligned}$$

故$\alpha=\dfrac{9}{25},\beta=-\dfrac{4}{25}$。

第貳部分：非選擇題

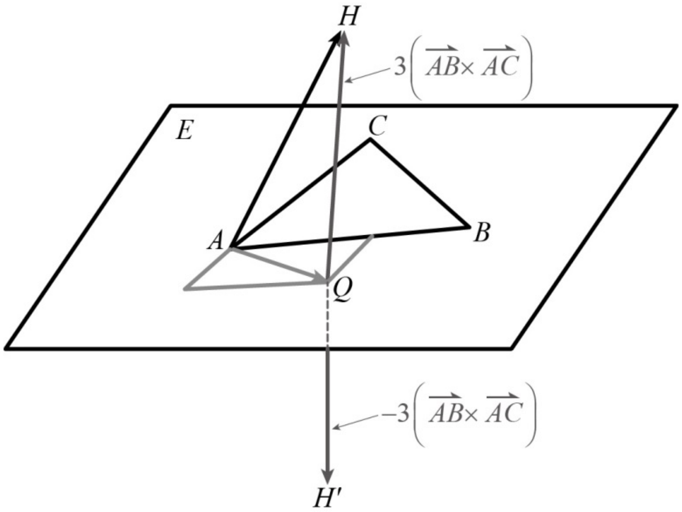
一、出處：【99 課綱】第四冊　第一章 空間向量

【108 課綱】第 4A 冊　單元 3 空間向量的運算

難易度：難

解：設 $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，如圖所示。因為 $\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,-1,2)$ 且 $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$。



(1)因為 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 垂直平面 E，所以四面體 $ABCH$ 以△ABC 為底面的高為 $\left|3\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right|$。

又因為△ABC 的面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{3}{2}$，且 $\left|3\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right|=3\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=9$，

所以四面體 $ABCH$ 的體積 $=\dfrac{1}{3}\times$ 底面積 $\times$ 高 $=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times 9=\dfrac{9}{2}$。

(2)設 H' 的坐標為 (x,y,z)。因為 $\overrightarrow{AH'}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QH'}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-3\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)$，

所以 $(x,y+1,z+1)=\dfrac{2}{3}(1,0,-1)-\dfrac{1}{3}(0,2,1)-3(2,-1,2)=\left(-\dfrac{16}{3},\dfrac{7}{3},-7\right)$。

解得 $x=-\dfrac{16}{3},y=\dfrac{4}{3},z=-8$。故 H' 的坐標為 $\left(-\dfrac{16}{3},\dfrac{4}{3},-8\right)$。

(3)因為 $\overrightarrow{QH'}$ 垂直平面 E，所以 Q 為 H' 在平面 E 的投影點。

由圖可知 Q 點不在△ABC 的內部。

二、出處：【99 課綱】選修數學甲(下)　第二章 多項式函數的微積分

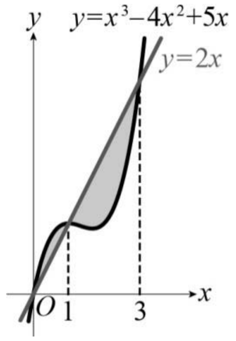
【108 課綱】選修數學甲(上)　單元 5 積分

難易度：中

解：(1)解$\begin{cases} y = x^3 - 4x^2 + 5x \\ y = 2x \end{cases}$，兩式相減得 $x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-3) = 0$。

解得 $x = 0,1,3$。故 Γ 與 L 的三個相異交點的 x 坐標為 $0,1,3$。

(2)從圖可知：Γ 與 L 所圍有界區域有兩塊。



利用曲線間的面積公式，得

$$所求 = \int_0^1 \left(\left(x^3 - 4x^2 + 5x\right) - 2x\right)dx + \int_1^3 \left(2x - \left(x^3 - 4x^2 + 5x\right)\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 - 4x^2 + 3x\right)dx + \int_1^3 \left(-x^3 + 4x^2 - 3x\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_1^3$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}。$$

(3)解$\begin{cases} y = x^3 - 4x^2 + 5x \\ y = mx \end{cases}$，兩式相減得 $x^3 - 4x^2 + (5-m)x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4x + (5-m)\right) = 0$。

得 $x = 0$ 或 $x^2 - 4x + (5-m) = 0$。因為在 $x \ge 0$ 的範圍內，Γ 與 L 有三個相異交點，

所以 $x^2 - 4x + (5-m) = 0$ 有兩個相異正根，因此$\begin{cases} D = (-4)^2 - 4\times1\times(5-m) > 0 \\ \text{兩根之和 } 4 > 0 \\ \text{兩根之積 } 5-m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 5 \end{cases}$，

得 $1 < m < 5$。故 $a = 1, b = 5$。