109年 四技二專

統一入學測驗

數學（C）

一、試題分析

109 年統測數學 C 是一份有難度的試卷。這次完成整卷需要不少的計算量與觀念技巧，預估滿分人數與 108 年相差無幾！（註：108 年統測數學 C 僅有 17 位滿分，這是統測數學 C 的最低紀錄）這次的試題大多是中等或是偏難題，其中稍難的題目分布在試卷的後半段，而簡單或中等偏易的題目分布在前半段，這是恰當的安排。其他特色如下：

1. 情境試題：
   108 數學新課綱強調生活素養，108 年已率先反應，109 年也是持續出現，而且題數也更多，如：第 4、5、9、12、14、19 與 24 題。
2. 圖形試題：
   這次圖形題較以往豐富且多元，有統計的次數累積圖、橢圓的各元素、可行解區域、三角函數圖形的伸縮平移、人工智慧的分類坐標圖。這些不需繁瑣的計算，只要正確的觀念就可以解決，如：第 4、7、10、11、23、24 與 25 題。
3. 綜合試題：
   偏重與不等式的搭配，如：第 16 題結合對數，第 22 題結合二項式定理。
4. 爭議試題：
   百分等級（PR 值）通常用於討論大數據，第 4 題的資料數少卻要討論，不太適宜。

綜合上述，程度較佳的考生應可有效地拉開得分差距，但是其他容易因不懂題意而隨意猜答的中後段或後段考生，恐怕也會無法有效的鑑別，這些將會影響考生們對於準備數學的意願。由於 108、109 年的試卷水平相近，這或許代表 110 年也是如此，考生們宜及早適應，並調整練習的方向。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	數列與級數	1
三角函數	2	指數與對數及其運算	2
三角函數的應用	2	排列組合	2
向量	1	機率與統計	2
式的運算	2	圓	1
聯立方程式	2	二次曲線	1
複數	1	微分	3
不等式及其應用	1	積分	1

109 學年度四技二專統一入學測驗

數學(C)

總　分

數學 C 參考公式
1. 三角函數的和差角公式：$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
2. 若橢圓的長軸長為 $2a$，短軸長為 $2b$，則正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}$
3. 對數值：$\log_{10}1.03 \approx 0.0128$、$\log_{10}1.3 \approx 0.1139$、$\log_{10}2 \approx 0.3010$、$\log_{10}3 \approx 0.4771$
4. 複利公式：若 P 為本金、r 為每期利率、n 為期數，則 n 期後本利和 $= P(1+r)^n$
5. 若 α、β 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則 $\alpha+\beta = \dfrac{-b}{a}$、$\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$
6. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$，$R$ 為 $\triangle ABC$ 外接圓的半徑
7. $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 關於下列各極限，何者錯誤？

(A) $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt[3]{x-2}=0$　(B) $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}=0$　(C) $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt[3]{x-2}=0$

(D) $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$。

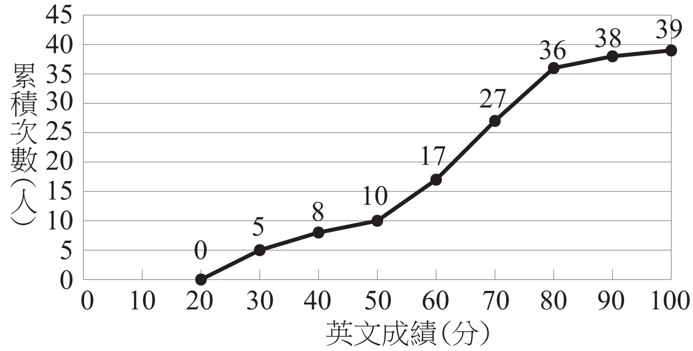
(　　) 2. 若 $a=\tan 480^\circ$，$b=\sec 135^\circ$，$c=\cos(-60^\circ)$，則下列有序數對何者在第二象限？

(A) (b,c)　(B) (a,b)　(C) (c,a)　(D) (c,b)。

(　　) 3. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+1)$ 所得之餘式為 $3x^2+5x-2$，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 所得之餘式為何？

(A) -4　(B) $2x-5$　(C) 6　(D) $8x-5$。

(　　) 4.圖(一)為某校一年 A 班的英文考試之以下累積次數分配曲線圖，請問由圖(一)顯示之資訊可推得哪一個選項正確？



圖(一)

(A)全距為100　(B)中位數介於60～70之間

(C)標準差為80　(D)百分等級（PR值）高於90者只有一位。

(　　) 5.在一次立法委員選舉中，每位選民須投區域立委與不分區政黨兩種選票，且每種選票均只能圈選一位（個），否則視為廢票。已知某甲的戶籍地有6位區域立委候選人，而全國共有14個政黨可選擇。若某甲決定去投票，且兩種選票均不投廢票，試問某甲有多少種的投票組合？

(A)6　(B)14　(C)20　(D)84。

(　　) 6.若 $\sin 80° = a$ ，$\cos 59° = b$ ，則 $\cos 21° =$ ？

(A) $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$　(B) $a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}$　(C) $ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

(D) $ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ 。

(　　) 7.若給定一橢圓標準式 $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{144}=1$ ，則下列何者正確？

(A) $(4,-2)$ 為其中一焦點

(B) $(9,-2)$ 為其中一長軸頂點

(C) $(4,10)$ 為其中一短軸頂點

(D)正焦弦長為 $\dfrac{25}{6}$ 。

(　　) 8.設 $\left(\sqrt{3}+i\right)z=-2\sqrt{3}+2i$ ，其中 $i=\sqrt{-1}$ ，則 z 之主幅角為何？

(A) $\dfrac{\pi}{3}$　(B) $\dfrac{2\pi}{3}$　(C) $\dfrac{5\pi}{6}$　(D) $\dfrac{7\pi}{6}$ 。

(　　) 9.某棒球投手自4月1日開始每天練投，他每日投球數為等差數列。若4月5日投球數為41個，4月13日為73個，則他4月份有幾天投球數超過100個？

(A)10　(B)11　(C)12　(D)13。

(　　) 10. 在$\begin{cases} x+2y-6\geq 0 \\ x+y-10\leq 0 \\ 2\leq x\leq 9 \end{cases}$的條件下，求其可行解區域的面積（平方單位）為何？

(A)$\frac{119}{4}$　(B)$\frac{59}{2}$　(C)$\frac{117}{4}$　(D)$\frac{55}{2}$。

(　　) 11. 設函數$f(x)=2\cos 3x-1, x\in[0,2\pi]$，若其圖形和$x$軸的交點個數與函數的最大值分別為$a$、$b$，則$ab=$？

(A)6　(B)9　(C)12　(D)18。

(　　) 12. 保險公司推出躉繳型保單（即於一開始存入一固定本金），且宣告年利率為3%的複利，每年計算一次。若某人於20歲時，花10萬元購買此保單，則當保單價值達20萬元時，某人約幾歲？

(A)24　(B)34　(C)44　(D)54。

(　　) 13. 設$f(x)=x^3-3x^2-24x+32$在閉區間$[-3,3]$內的最大值與最小值分別為m、n，則$m-n=$？

(A)90　(B)98　(C)100　(D)108。

(　　) 14. 坊間的擲骰子遊戲，一次擲出四顆公正骰子，在下列情形之下才可以計算其得點數（設x、y、z均不同），

(1)若骰子點數出現x、x、y、z時，則玩家之得點數為$y+z$；

(2)若骰子點數出現x、x、y、y時，則玩家之得點數為$2x$與$2y$中較大者。

求玩家擲出得點數為3（即「BG」）的機率為何？

(A)$\frac{1}{12}$　(B)$\frac{1}{18}$　(C)$\frac{1}{27}$　(D)$\frac{1}{36}$。

(　　) 15. 若k為實數，且點$P(1,k)$為曲線$kx^2+y^2+2x-4y+k-1=0$上之一點，求曲線之圖形為何？

(A)圓　(B)拋物線　(C)橢圓　(D)雙曲線。

(　　) 16. 滿足$\log_{10-x^2}(x^2+3x+2)$有意義的整數x共有多少個？

(A)3　(B)4　(C)5　(D)7。

(　　) 17. 設$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>2 \\ x^2-2x+3, & x\leq 2 \end{cases}$，則$f'(2)=$？

(A)1　(B)2　(C)3　(D)不存在。

(　　) 18. 設α、β為方程式$x^2+5x+k=0$之二根，已知多項式$f(x)=2x^2+7x+5$除以$x-\alpha$、$x-\beta$所得的餘式分別為-1、2，則$k=$？

(A)4　(B)5　(C)6　(D)7。

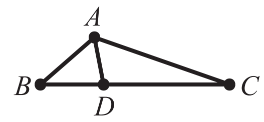
(　　) 19. 某家口罩工廠擁有5台A型機器和3台B型機器來製造口罩，平時每日總產量為11070個口罩。今因應肺炎疫情日趨嚴重，緊急添購3台A型機器和9台B型機器，並提高所有機器的每日產能至原先的150%，使得該工廠每日總產量增為42120個口罩，試問一台A型機器原先的每日產能為多少個？
(A)1350　(B)1380　(C)1410　(D)1440。

(　　) 20. 已知三階行列式$\begin{vmatrix} a_1-2b_1-3c_1 & a_1-2c_1 & a_1 \\ a_2-2b_2-3c_2 & a_2-2c_2 & a_2 \\ a_3-2b_3-3c_3 & a_3-2c_3 & a_3 \end{vmatrix}=8$，則$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$？
(A)-4　(B)-2　(C)2　(D)4。

(　　) 21. 設平面上三點$A(1,1)$、$B(5,-2)$、$C(5,2)$，且$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$的正射影為$\overrightarrow{AD}$，若$\overrightarrow{DC}=(x,y)$，則$x+y=$？
(A)$\frac{34}{25}$　(B)$\frac{89}{25}$　(C)$\frac{104}{25}$　(D)$\frac{112}{25}$。

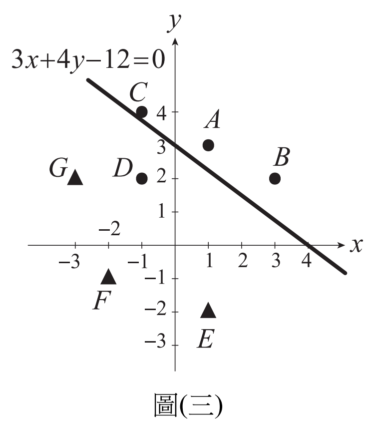
(　　) 22. 設a為實數，將$(ax+1)^4$展開後，若x^3之係數大於其他各項係數，則a的範圍為何？
(A)$a<4$　(B)$a>\frac{3}{2}$　(C)$a>4$或$a<\frac{3}{2}$　(D)$\frac{3}{2}<a<4$。

(　　) 23. 在$\triangle ABC$中，若$\angle A$之內角平分線交$\overline{BC}$於D，其中$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=6$，且$\angle A=120^\circ$，如圖(二)，則$\overline{CD}=$？
(A)$\sqrt{26}$　(B)$3\sqrt{3}$　(C)$2\sqrt{7}$　(D)$\sqrt{7}$。



圖(二)

(　　) 24. 在人工智慧的分類技術中，用到以直線分類不同物件的概念。設平面上有七個點$A(1,3)$、$B(3,2)$、$C(-1,4)$、$D(-1,2)$、$E(1,-2)$、$F(-2,-1)$、$G(-3,2)$分屬●、▲二類，其中直線$L:3x+4y-12=0$未能將它們正確分類，如圖(三)標示。若將L平行移動至新的位置成為新直線L_1且能達到正確分類目的，則下列何者可為L_1的直線方程式？
(A)$3x+4y+2=0$　(B)$3x+4y-6=0$
(C)$6x+8y+3=0$　(D)$6x+8y-3=0$。



圖(三)

(　　) 25. 設$g(x)=2x-1$，已知在閉區間$[-1,1]$上$f(x)\ge 1$且$\int_{-1}^{1}f(x)dx=5$，則此兩曲線$y=f(x)$與$y=g(x)$在閉區間$[-1,1]$所圍成區域的面積為何？
(A)4　(B)5　(C)6　(D)7。

109 年統一入學測驗　數學(C)

答　案

1.B	2.A	3.B	4.B	5.D	6.A	7.D	8.B	9.B	10.A
11.A	12.C	13.C	14.C	15.A	16.A	17.B	18.C	19.A	20.C
21.D	22.D	23.C	24.D	25.D					

本試題答案係依據統一入學測驗中心公布之標準答案

1. 技巧與分析

(1) 當 $x<a$ 且 $x\to a$，會使得 $f(x)\to L$，則稱 $f(x)$ 在 a 的左極限為 L，記作 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$

(2) 當 $x>a$ 且 $x\to a$，會使得 $f(x)\to M$，則稱 $f(x)$ 在 a 的右極限為 M，記作 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=M$

(3) 若函數 $f(x)$ 定義域中的 x 無法滿足 $x<a$，則 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 不存在

(4) 若函數 $f(x)$ 定義域中的 x 無法滿足 $x>a$，則 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 不存在

解析

(1) 令 $f_1(x)=\sqrt[3]{x-2}$

則 $f_1(x)$ 的定義域為所有實數

故 $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2-2}=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2-2}=0$

(2) 令 $f_2(x)=\sqrt{x-2}$

則 $f_2(x)$ 的定義域為 $\{x|x\geq 2, x\in R\}$

$\because$ $x<2$ 不在定義域

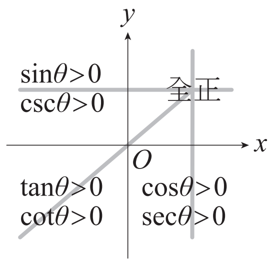
$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}$ 不存在

$\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=\sqrt{2-2}=0$

由(1)、(2)可知，選項(B)錯誤

2. 技巧與分析

任意角三角函數的正負：



解析

(1) $\because$ $480°=360°+120°$

且 $90°<120°<180°$

$\therefore$ $480°$ 是第二象限角

則 $a=\tan 480°<0$

(2) $\because$ $90°<135°<180°$

$\therefore$ $135°$ 是第二象限角

則 $b=\sec 135°<0$

(3) $\because$ $-60°$ 是第四象限角

$\therefore$ $c=\cos(-60°)>0$

由(1)、(2)、(3)可知

點 (b,c) 在第二象限

點 (a,b) 在第三象限

點 (c,a) 和點 (c,b) 在第四象限

故選(A)

3. 技巧與分析

除法原理：

若 $f(x)\div g(x)=Q(x)\dots R(x)$

則 $f(x)=g(x)\times Q(x)+R(x)$

解析

設 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+1)$ 所得之商式為 $Q(x)$

則 $f(x)\div\left[(x-1)(x^2+x+1)\right]$

$=Q(x)\ldots(3x^2+5x-2)$

由除法原理

$f(x)=\left[(x-1)(x^2+x+1)\right]Q(x)+(3x^2+5x-2)$

依上式可知，$f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式就是 $3x^2+5x-2$ 除以 x^2+x+1 的餘式

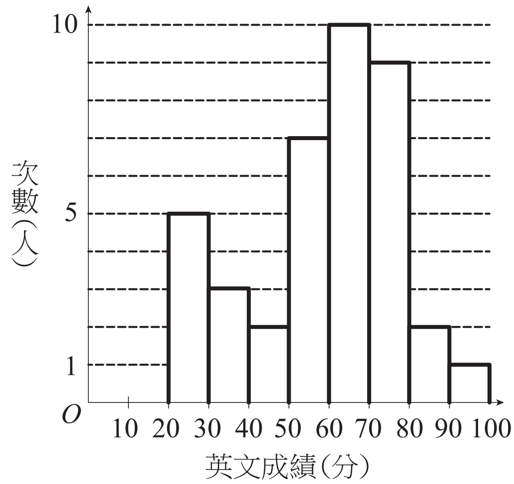
$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & & \\ 1+1+1 & 3 & +5 & -2 \\ & 3 & +3 & +3 \\ \hline & & 2 & -5 \end{array}$$

故所求餘式為 $2x-5$

4. 技巧與分析

了解統計的全距、中位數、標準差、百分等級（PR 值）的意義

解析



(A) 最高分落在 90～100 分
有可能是 100 分
最低分落在 20～30 分
有可能是 20 分
故全距為 100～20 = 80

(B) 全班有 39 人，$(39+1)\div 2=20$
所以成績的中位數是成績由低到高的第 20 位，介於 60～70 分之間

(C) ∵ 全班成績的全距為 80，而且成績分布並不極端
∴ 標準差不可能為 80

(D) 成績 80 分以上的有 3 位
而第 3 名的成績勝過 $39-3=36$ 位
又 $\dfrac{36}{39}\times 100\approx 92.3$
則第 3 名的百分等級（PR 值）為 92，因此百分等級（PR 值）高於 90 者不只有一位

故選(B)

5. 技巧與分析

乘法原理：

完成一件事需分成 2 個步驟，步驟 1 有 n_1 種方法，步驟 2 有 n_2 種方法，則完成此件事有 $n_1\times n_2$ 種方法

解析

區域立委的選擇有 6 種
不分區政黨的選擇有 14 種
由乘法原理可知
投票組合有 $6\times 14=84$ 種

6. 技巧與分析

(1) 餘角關係：

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

(2) 餘弦的差角公式：

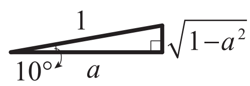
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

解析

(1) ∵ $\sin 80^\circ=\sin(90^\circ-10^\circ)=\cos 10^\circ$

∴ $\cos 10^\circ=a$

以 $\cos 10^\circ=a=\dfrac{a}{1}$ 來作圖

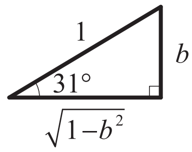


則 $\sin 10^\circ=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{1}=\sqrt{1-a^2}$

(2) ∵ $\cos 59^\circ=\cos(90^\circ-31^\circ)=\sin 31^\circ$

∴ $\sin 31^\circ=b$

以 $\sin 31^\circ=b=\dfrac{b}{1}$ 來作圖



則 $\cos 31^\circ=\dfrac{\sqrt{1-b^2}}{1}=\sqrt{1-b^2}$

(3) 由餘弦的差角公式，則

$\cos 21° = \cos(31° - 10°)$

$= \cos 31° \times \cos 10° + \sin 31° \times \sin 10°$

$= \sqrt{1-b^2} \times a + b \times \sqrt{1-a^2}$

$= a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$

7. 技巧與分析

$\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$（$a > b > 0$）

為上下焦點的橢圓，若 $a^2 = b^2 + c^2$，則

(1) 長軸頂點 $(h, k \pm a)$

(2) 短軸頂點 $(h \pm b, k)$

(3) 焦點 $(h, k \pm c)$

(4) 正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}$

解析

橢圓：$\dfrac{(x-4)^2}{25} + \dfrac{[y-(-2)]^2}{144} = 1$

$\because$ y^2 項的分母 $>$ x^2 項的分母

$\therefore$ 橢圓有上、下焦點，中心 $(4,-2)$

(1) $a^2 = 144 \Rightarrow a = 12$

長軸頂點 $(4, -2 \pm 12)$

$\Rightarrow (4,10)$、$(4,-14)$

(2) $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

短軸頂點 $(4 \pm 5, -2)$

$\Rightarrow (9,-2)$、$(-1,-2)$

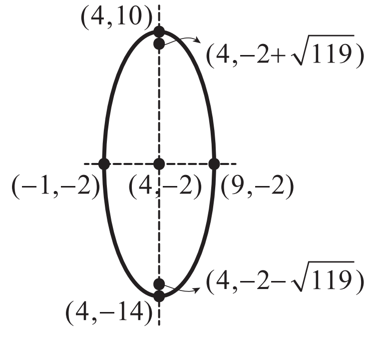
(3) $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 144 = 25 + c^2$

$\Rightarrow c^2 = 119 \Rightarrow c = \sqrt{119}$

焦點 $(4, -2 \pm \sqrt{119})$

(4) 正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2 \times 25}{12} = \dfrac{25}{6}$

由(1)～(4)，故選(D)



8. 〈法一〉

技巧與分析

設 a、b、c、d 均為實數，則

$\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$

$= \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

解析

$(\sqrt{3}+i)z = -2\sqrt{3} + 2i$

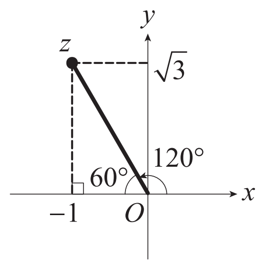
$\Rightarrow z = \dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{(-2\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$

$= \dfrac{-6+2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i-2i^2}{(\sqrt{3})^2+1^2} = \dfrac{-4+4\sqrt{3}i}{4}$

$= \dfrac{-4}{4} + \dfrac{4\sqrt{3}i}{4} = -1 + \sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

如圖，z 的主幅角為 $180° - 60° = 120° = \dfrac{2\pi}{3}$



〈法二〉

技巧與分析

設 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \neq 0$，

則 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

解析

$(\sqrt{3}+i)z = -2\sqrt{3}+2i \Rightarrow z = \dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+i}$

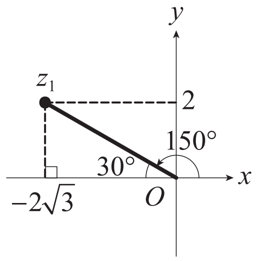
令 $z_1 = -2\sqrt{3}+2i$，$z_2 = \sqrt{3}+i$

(1) z_1 的極式：

$|z_1| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$

如圖，z_1 的主幅角為 $180° - 30° = 150°$

則 $z_1 = 4(\cos 150° + i\sin 150°)$

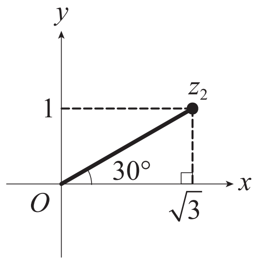


(2) z_2 的極式：

$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

如圖，z_2 的主幅角為 $30°$

則 $z_2 = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$



由(1)和(2)可知：

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{4(\cos 150° + i\sin 150°)}{2(\cos 30° + i\sin 30°)}$$

$$= \frac{4}{2} \times [\cos(150° - 30°) + i\sin(150° - 30°)]$$

$$= 2(\cos 120° + i\sin 120°)$$

因此 z 的主幅角為 $120° = \frac{2\pi}{3}$

9. 技巧與分析

設 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，公差為 d，

則 $a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$

解析

設 4 月 n 日的投球數是 a_n 個

則 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{30}$ 為等差數列

設此等差數列的公差為 d

由題意知：$a_5 = 41$，$a_{13} = 73$

則 $a_{13} = a_5 + (13-5) \times d$

$\Rightarrow \quad 73 = 41 + 8d \quad \Rightarrow \quad 8d = 32 \quad \Rightarrow \quad d = 4$

若 $a_n > 100$

$a_n = a_{13} + (n-13) \times d$

$= 73 + (n-13) \times 4 = 4n + 21$

則 $4n + 21 > 100$

$\Rightarrow \quad 4n > 79 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{79}{4} = 19.75$，取 $n = 20$

故 4 月 20 日起，每日的投球數超過 100 個

從 4 月 20 日到 4 月 30 日共有 11 天

因此 4 月份有 11 天投球數超過 100 個

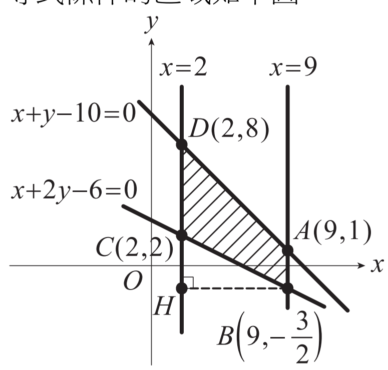
10. 技巧與分析

(1) 圖解聯立不等式

(2) 求出可行解區域的頂點

解析

滿足不等式條件的區域如下圖



四邊形 $ABCD$ 為梯形

$\overline{AB} = 1 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$

$\overline{CD} = 8 - 2 = 6$

$\overline{BH} = 9 - 2 = 7$

梯形 $ABCD$ 的面積 $= \dfrac{\left(\frac{5}{2} + 6\right) \times 7}{2} = \dfrac{119}{4}$

故可行解區域的面積為 $\frac{119}{4}$（平方單位）

11. 技巧與分析

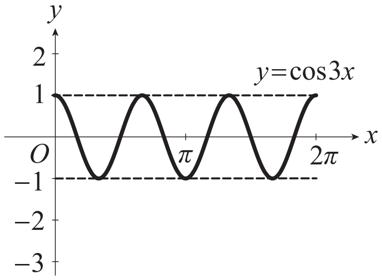
(1) 若 $f(x)$ 的週期為 T，

則 $f(kx)$ 的週期為 $\frac{T}{|k|}$（$k \neq 0$）

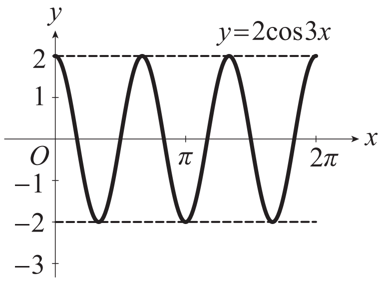
(2) 熟悉三角函數的圖形，並了解其伸縮和平移

解析

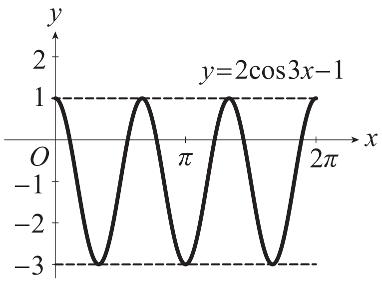
(1) 由於 $\cos x$ 的週期是 2π，故 $\cos 3x$ 的週期是 $\frac{2\pi}{3}$，把 $y = \cos x$ 的圖形以 y 軸為基準壓縮 $\frac{1}{3}$ 倍，就是 $y = \cos 3x$ 的圖形



(2) 把 $y=\cos 3x$ 的圖形以 x 軸為基準拉伸 2 倍，就是 $y=2\cos 3x$ 的圖形



(3) 把 $y=2\cos 3x$ 的圖形向下平移1單位，就是 $y=2\cos 3x-1$ 的圖形



故 $f(x)=2\cos 3x-1$ 在閉區間 $[0,2\pi]$ 的圖形和 x 軸有6個交點，其最大值為1，即 $a=6$ 、$b=1$

因此 $ab=6\times1=6$

12. 技巧與分析

複利公式：

若 P 為本金，r 為每期利率，n 為期數，則 n 期後的本利和 $=P(1+r)^n$

解析

n 年後

此人的保單價值為 $100000\times(1+3\%)^n$ 元

令 $100000\times(1+3\%)^n\geq200000$

$\Rightarrow\quad (1.03)^n\geq2$

$\Rightarrow\quad \log_{10}(1.03)^n\geq\log_{10}2$

$\Rightarrow\quad n\times\log_{10}1.03\geq\log_{10}2$

$\Rightarrow\quad n\times0.0128\geq0.3010$

$\Rightarrow\quad n\geq\dfrac{0.3010}{0.0128}\approx23.52$ ，取 $n=24$

故此人24年後，保單價值超過20萬元

其年紀是 $20+24=44$ 歲

13. 技巧與分析

設多項式函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ ，其最大（小）值會出現在閉區間 $[a,b]$ 的端點或導數為0的點

解析

$f(x)=x^3-3x^2-24x+32$

$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x^2-2x-8)$

$\quad\quad=3(x+2)(x-4)$

令 $f'(x)=0$

$\Rightarrow\quad 3(x+2)(x-4)=0\quad\Rightarrow\quad x=-2$ 或 4

$\because\quad x=4$ 不在閉區間 $[-3,3]$ 內

$\therefore\quad x=4$ 不予考慮

將閉區間 $[-3,3]$ 的端點 $x=-3$ 與 $x=3$ ，以及 $x=-2$ 代入 $f(x)$ 求值：

$f(-3)=(-3)^3-3\times(-3)^2-24\times(-3)+32=50$

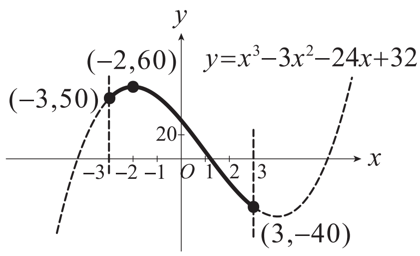
$f(3)=3^3-3\times3^2-24\times3+32=-40$

$f(-2)=(-2)^3-3\times(-2)^2-24\times(-2)+32=60$

故 $f(x)$ 在閉區間 $[-3,3]$ 內的最大值 $m=60$

最小值 $n=-40$

因此 $m-n=60-(-40)=100$



14. 技巧與分析

事件 A 的機率：

$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ ，其中 S 為樣本空間

解析

設樣本空間為 S，則 $n(S)=6^4=1296$

∵　x、y、z 均不同

∴　擲出得點數為 3 的有以下 4 類：

(1) 3、3、1、2：$\frac{4!}{2!}=12$

(2) 4、4、1、2：$\frac{4!}{2!}=12$

(3) 5、5、1、2：$\frac{4!}{2!}=12$

(4) 6、6、1、2：$\frac{4!}{2!}=12$

共有 $12\times4=48$ 種

因此擲出得點數為 3 的機率為 $\frac{48}{1296}=\frac{1}{27}$

15. 技巧與分析

曲線 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$（$r>0$）是圓

解析

∵　點 $P(1,k)$ 為曲線上一點

∴　$k\times1^2+k^2+2\times1-4\times k+k-1=0$

$\Rightarrow\ k^2-2k+1=0\ \Rightarrow\ (k-1)^2=0$

$\Rightarrow\ k-1=0\ \Rightarrow\ k=1$

曲線為 $x^2+y^2+2x-4y=0$

$\Rightarrow\ (x^2+2x+1^2)+(y^2-2\times2\times y+2^2)=1+4$

$\Rightarrow\ (x+1)^2+(y-2)^2=5$

故此曲線之圖形為圓

16. 技巧與分析

若對數 $\log_a b$ 有意義，

則(1)底數 $a>0$ 且 $a\neq1$

(2)真數 $b>0$

解析

對數 $\log_{10-x^2}(x^2+3x+2)$ 有意義，則

(1) 底數 $10-x^2>0$ 且 $10-x^2\neq1$

$\Rightarrow\ x^2-10<0$ 且 $x^2\neq9$

$\Rightarrow\ (x+\sqrt{10})(x-\sqrt{10})<0$ 且 $x\neq\pm3$

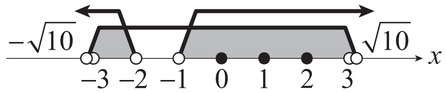
$\Rightarrow\ -\sqrt{10}<x<\sqrt{10}$ 且 $x\neq\pm3$

(2) 真數 $x^2+3x+2>0$

$\Rightarrow\ (x+2)(x+1)>0$

$\Rightarrow\ x<-2$ 或 $x>-1$

由(1)、(2)可知，x 的範圍如下：



使對數有意義的整數 x 為 0、1 或 2，共有 3 個

17. 技巧與分析

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數定義：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

解析

當 $x\le2$ 時，$f(x)=x^2-2x+3$

則 $f(2)=2^2-2\times2+3=3$

由導數的定義：$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

(1) 當 $x\le2$ 時

$$\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{(x^2-2x+3)-3}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}x=2$$

(2) 當 $x>2$ 時

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{(2x-1)-3}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{2x-4}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}2=2$$

由(1)、(2)可知：$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=2$

因此 $f'(2)=2$

18. 技巧與分析

若方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有兩根 α、β，則

(1) 兩根和 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

(2) 兩根積 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

解析

∵　α、β 為方程式 $x^2+5x+k=0$ 之二根

∴　兩根和 $\alpha+\beta=-\frac{5}{1}=-5$

兩根積 $\alpha\beta=\dfrac{k}{1}=k$

而 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-5)^2-2\times k$

$=25-2k$

$\because$ $f(x)=2x^2+7x+5$ 除以 $x-\alpha$ 、 $x-\beta$ 的餘式分別為 -1 、 2

$\therefore$ $f(\alpha)=2\alpha^2+7\alpha+5=-1\cdots\cdots①$

$f(\beta)=2\beta^2+7\beta+5=2\cdots\cdots②$

①+②：$2(\alpha^2+\beta^2)+7(\alpha+\beta)+10=1$

$\Rightarrow\ 2\times(25-2k)+7\times(-5)+10=1$

$\Rightarrow\ 50-4k+(-35)+10=1$

$\Rightarrow\ -4k=-24\ \Rightarrow\ k=6$

19. 技巧與分析

(1) 依據題意列出相關的方程式

(2) 利用加減消去法解聯立方程式

解析

設 A 、 B 型機器原先一台的每日產能分別為 x 、 y 個口罩，由題意可知

平時口罩的每日總產量：

$5x+3y=11070\cdots\cdots①$

目前緊急添購機器後

A 型有 $5+3=8$ 台，B 型有 $3+9=12$ 台

$\because$ 目前提高所有機器的每日產能至原先的 150%

$\therefore$ 目前口罩的每日總產量：

$(8x+12y)\times150\%=42120$

$\Rightarrow\ 12x+18y=42120$

$\overset{\div6}{\Rightarrow}\ 2x+3y=7020\cdots\cdots②$

①−②：$3x=4050\ \overset{\div3}{\Rightarrow}\ x=1350$

因此一台 A 型機器原先的每日產能為 1350 個口罩

20. 技巧與分析

行列式的運算性質：

(1) 某行的 k 倍加到另一行時，行列式的值不變

(2) 當某行的元素有公因數時，可提出

(3) 任意兩行互換時，行列式的值會變號

解析

$\times(-1)\qquad\times(-1)$

$$\because\ \begin{vmatrix} a_1-2b_1-3c_1 & a_1-2c_1 & a_1\\ a_2-2b_2-3c_2 & a_2-2c_2 & a_2\\ a_3-2b_3-3c_3 & a_3-2c_3 & a_3\end{vmatrix}$$

$\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

$$=\begin{vmatrix} -2b_1-3c_1 & -2c_1 & a_1\\ -2b_2-3c_2 & -2c_2 & a_2\\ -2b_3-3c_3 & -2c_3 & a_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -2b_1 & -2c_1 & a_1\\ -2b_2 & -2c_2 & a_2\\ -2b_3 & -2c_3 & a_3\end{vmatrix}$$

$$=(-2)\times(-2)\times\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1\\ b_2 & c_2 & a_2\\ b_3 & c_3 & a_3\end{vmatrix}$$

$$=(-4)\times\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1\\ a_2 & c_2 & b_2\\ a_3 & c_3 & b_3\end{vmatrix}=4\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

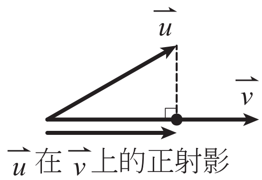
$$\therefore\ 4\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=8$$

$$\overset{\div4}{\Rightarrow}\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=2$$

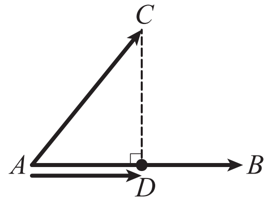
21. 技巧與分析

向量 $\overrightarrow{u}$ 在 $\overrightarrow{v}$ 上的正射影：

$$\left(\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\right)\overrightarrow{v}$$



解析



$\because\ A(1,1)$、$B(5,-2)$、$C(5,2)$

$\therefore\ \overrightarrow{AC}=(5-1,2-1)=(4,1)$

$\overrightarrow{AB}=(5-1,-2-1)=(4,-3)$

$\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影 $\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}\right)\overrightarrow{AB}$

$=\dfrac{(4,1)\cdot(4,-3)}{\left(\sqrt{4^2+(-3)^2}\right)^2}(4,-3)$

$=\dfrac{4\times4+1\times(-3)}{5^2}(4,-3)=\dfrac{13}{25}(4,-3)$

$=\left(\dfrac{13}{25}\times4,\dfrac{13}{25}\times(-3)\right)=\left(\dfrac{52}{25},-\dfrac{39}{25}\right)$

$\because\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$=(-4,-1)+\left(\dfrac{52}{25},-\dfrac{39}{25}\right)$

$=\left(-4+\dfrac{52}{25},-1+\left(-\dfrac{39}{25}\right)\right)$

$=\left(-\dfrac{48}{25},-\dfrac{64}{25}\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{48}{25},\dfrac{64}{25}\right)$

而 $\overrightarrow{DC}=(x,y)$，則 $x=\dfrac{48}{25}$，$y=\dfrac{64}{25}$

因此 $x+y=\dfrac{48}{25}+\dfrac{64}{25}=\dfrac{112}{25}$

22. 技巧與分析

(1) 二項式定理

$$(x+y)^4=C^4_0x^4+C^4_1x^3y+C^4_2x^2y^2+C^4_3xy^3+C^4_4y^4$$

(2) 一元高次不等式的解

解析

由二項式定理知

$(ax+1)^4$

$=C^4_0\times(ax)^4+C^4_1\times(ax)^3\times1+C^4_2\times(ax)^2\times1^2+C^4_3\times(ax)\times1^3+C^4_4\times1^4$

$=a^4x^4+4a^3x^3+6a^2x^2+4ax+1$

其 x^3 之係數為 $4a^3$

而其他各項係數為 a^4、$6a^2$、$4a$、1

由題意知 x^3 之係數大於其他各項係數，故

$4a^3>a^4$，$4a^3>6a^2$，$4a^3>4a$，$4a^3>1$

(1) $4a^3>a^4 \Rightarrow a^4-4a^3<0$

$\Rightarrow a^2(a^2-4a)<0 \overset{\div a^2}{\Rightarrow} a^2-4a<0$

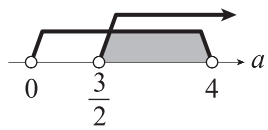
$\Rightarrow a(a-4)<0 \Rightarrow 0<a<4$

(2) $4a^3>6a^2 \Rightarrow 4a^3-6a^2>0$

$\Rightarrow 2a^2(2a-3)>0 \overset{\div 2a^2}{\Rightarrow} 2a-3>0$

$\Rightarrow a>\dfrac{3}{2}$

由(1)和(2)可得 $\dfrac{3}{2}<a<4$



而 $\dfrac{3}{2}<a<4$ 滿足 $4a^3>4a$ 和 $4a^3>1$

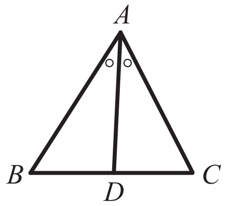
因此 a 的範圍為 $\dfrac{3}{2}<a<4$

23. 技巧與分析

(1) 角平分線性質：

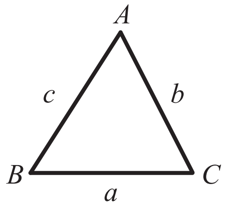
如圖，若 $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$

則 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

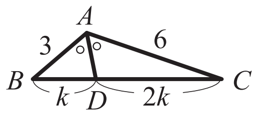


(2) 餘弦定理：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$



解析



$\because$ $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D

且 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:6=1:2$

$\therefore$ $\overline{BD}:\overline{CD}=1:2$

設 $\overline{BD}=k$ ，$\overline{CD}=2k$ ，其中 $k>0$

則 $\overline{BC}=k+2k=3k$

令 $a=\overline{BC}$ ，$b=\overline{AC}$ ，$c=\overline{AB}$

由餘弦定理知：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$\Rightarrow$ $(3k)^2=6^2+3^2-2\times6\times3\times\cos120°$

$\Rightarrow$ $9k^2=36+9-2\times6\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

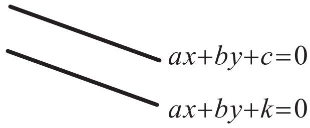
$\Rightarrow$ $k^2=7$ $\Rightarrow$ $k=\pm\sqrt{7}$（$-\sqrt{7}$ 不合）

因此 $\overline{CD}=2k=2\sqrt{7}$

24. 技巧與分析

平行於 $ax+by+c=0$ 的直線

可以假設為 $ax+by+k=0$



解析

(1) 設通過點 $D(-1,2)$ 且平行 L 的直線為

$L_2:3x+4y+n_1=0$

把 $D(-1,2)$ 代入得 $3\times(-1)+4\times2+n_1=0$

$\Rightarrow$ $n_1=-5$

則 $L_2:3x+4y-5=0$

(2) 設通過點 $G(-3,2)$ 且平行 L 的直線為

$L_3:3x+4y+n_2=0$

把 $G(-3,2)$ 代入得 $3\times(-3)+4\times2+n_2=0$

$\Rightarrow$ $n_2=1$

則 $L_3:3x+4y+1=0$

(3) $\because$ $L_1 // L$ 且 L_1 可把平面上七個點分成 ●、▲二類

$\therefore$ 直線 L_1 位於 L_2 和 L_3 之間

因此 L_1 可以寫成 $3x+4y+k=0$

其中 $-5<k<1$

則(A) $3x+4y+2=0$（不合）

(B) $3x+4y-6=0$（不合）

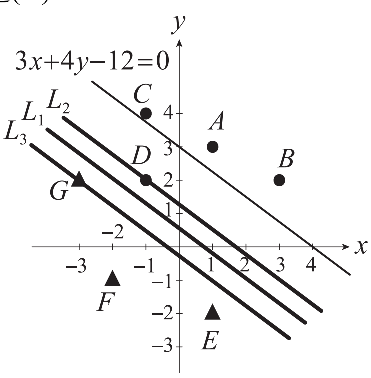
(C) $6x+8y+3=0$

$\overset{\div2}{\Rightarrow}$ $3x+4y+\frac{3}{2}=0$（不合）

(D) $6x+8y-3=0$

$\overset{\div2}{\Rightarrow}$ $3x+4y-\frac{3}{2}=0$（符合）

故選(D)

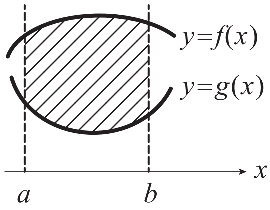


25. 技巧與分析

設兩函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在閉區間 $[a,b]$

若 $f(x)\geq g(x)$，則兩函數在閉區間所圍成區

域的面積為 $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$



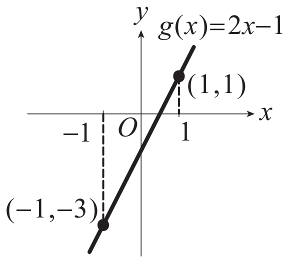
解析

(1) 令 $y=2x-1$

x	-1	1
y	-3	1

則 $y=g(x)$ 的圖形如圖

在閉區間 $[-1,1]$ 上的 $g(x)\leq 1$



(2) $\because$ 在閉區間 $[-1,1]$ 上的 $f(x)\geq 1$

$\therefore$ $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在閉區間 $[-1,1]$

所圍成區域的面積為

$$\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{-1}^{1}g(x)dx$$

由題意知 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=5$

而 $\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{1}(2x-1)dx=(x^2-x)\Big|_{-1}^{1}$

$$=(1^2-1)-[(-1)^2-(-1)]$$

$$=-2$$

故所求的面積 $=5-(-2)=7$