龍騰文化

108

數學統測最前線

龍騰貼心服務，給您最精準的分析！！

電子檔案可於龍騰網下載
https://ltn.tw/DIG4mT2

108 年 統測數學 A 考情趨勢與考題剖析

108 年統測數學 A 考情趨勢

一、試題分析

108 年數學(A)各章節出題分配算歷年來最平均的一屆，唯同學最害怕的對數(log)一題都沒有，對認真且付出大量時間去弄懂此部分的同學算是一大遺憾！整份試卷的難度較去年差異不大，但有些題目是以往統測，甚至坊間參考書少見的題型，看似不難，但實際計算會發現程度中等以下的學生難以在時間內做完！所以平均分數可能會較去年下降 4～6 分左右。

❶基本公式題：

第 1 題：向量的基本公式代入求解。
第 7 題：簡單的直線排列與機率的結合。
第 8 題：常態分布。
第 11 題：扇形弧長及面積公式的使用。
第 13 題：多項式乘法，最簡單的一題。
第 16 題：利用斜率公式及兩直線垂直斜率相乘為 -1。
第 22 題：簡單的組合題型。
第 23 題：利用圓外一點到圓的切線段長公式求解。
第 25 題：利用 Σ 的公式及等差、等比級數求和的公式即可解題。

82001N/A/0000000

❷基本概念題：

第3題：基本的任意角三角函數求值。

第5題：倍數與次方的應用。

第9題：圖表的判讀。

第14題：最常見的排列題型，只需注意個位數為0與個位數非0要分開算即可求解。

❸稍微有點變化題：

第2題：利用根與係數的關係求解。

第4題：利用兩點求向量的觀念即可解題。

第10題：因式分解後，利用$\sin\theta$的值域判斷即可。

第12題：利用除法原理及餘式定理解題。

第18題：利用相異兩點在直線同側或異側公式解題。

第21題：列出所有可能情形即可。

第24題：等比數列公式。

❹需思考與計算較難的題目：

第6題：利用圓周上的點與x軸距離長短判斷。

第15題：利用正三角形三邊長相等的觀念解題。

第17題：二次函數恆負的條件。

第19題：繪出二元一次不等式圖形後，利用可行解區域求出目標函數的最大值。

第20題：二次方程式根的性質與立方差公式。

二、配分比例表

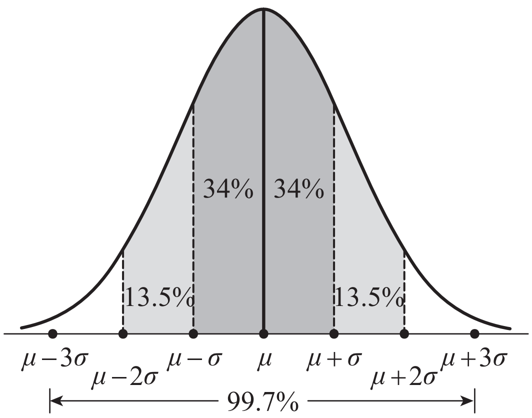
單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	2	圓與直線	2
三角函數及其應用	3	數列與級數	2
向量	2	排列組合	2
式的運算	4	機率	2
指數與對數及其運算	1	統計	2
不等式及其應用	3		

總　分

108 統測數學 A 考題剖析

數學 A 參考公式

1. 若α、β為一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根，則$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$、$\alpha\beta=\frac{c}{a}$。
2. 首項為a_1，公差為d的等差數列，前n項之和為$S_n=\frac{n\left(2a_1+(n-1)d\right)}{2}$。
3. 首項為a_1，公比為r（$r\neq1$）的等比數列，前n項之和為$S=\frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$。
4. 常態分配：



單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 設$\overrightarrow{a}=(3,1)$、$\overrightarrow{b}=(-1,2)$、$\overrightarrow{c}=(3,8)$，且$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，則$x+y=$

(A) 7　(B) 5　(C) 3　(D) 2。

(　　) 2. 已知a、b為一元二次方程式$x^2+7x-15=0$的兩根，則下列何者是以$2a$、$2b$為兩根的方程式？

(A) $x^2-14x-30=0$　(B) $x^2-14x-60=0$　(C) $x^2+14x-30=0$

(D) $x^2+14x-60=0$。

(　　) 3. $\tan225°+\sec(-30°)-\csc120°=$

(A) 1　(B) -1　(C) $1+\frac{4\sqrt{3}}{3}$　(D) $-1-\frac{4\sqrt{3}}{3}$。

(　　) 4. 若 A、B 為直線 $3x+4y=5$ 上相異的兩點，且向量 $\overrightarrow{AB}=\left(a,b\right)$，則 $6a+8b-5=$

(A) -10　(B) -5　(C) 5　(D) 10。

(　　) 5. 同學在細菌培養的實驗中，發現 A 細菌從開始經 3 小時數目由 500 成長至 600，假設 A 細菌呈指數函數成長，試問從開始經 9 小時，A 細菌的數目最接近下列哪一個數？

(A) 720　(B) 864　(C) 1037　(D) 1800。

(　　) 6. 平面上三個圓方程式，分別為

圓 A：$x^2+y^2+4x-8y+16=0$，

圓 B：$x^2+y^2-4x-10y+19=0$，

圓 C：$\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=4$，

設三圓的圓心同時以相同速率往 x 軸方向做垂直移動，且 a、b、c 分別表示圓 A、B、C 最早碰觸 x 軸所需時間，則下列何者正確？

(A) $a>b>c$　(B) $a>c>b$　(C) $b>a>c$　(D) $c>b>a$。

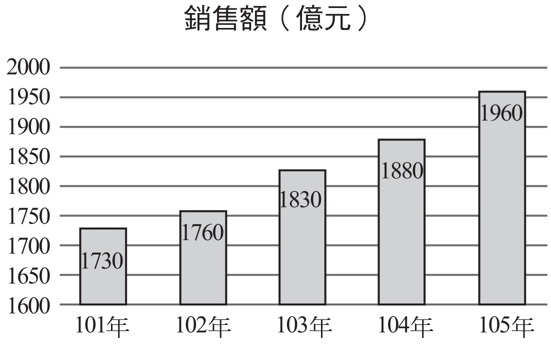
(　　) 7. 幼兒園中從大、中、小班各派二位小朋友共六位，由左向右排成一列玩遊戲，若每位小朋友排在任一位置機率相同，則同班小朋友均相鄰的機率為何？

(A) $\frac{1}{120}$　(B) $\frac{1}{90}$　(C) $\frac{1}{30}$　(D) $\frac{1}{15}$。

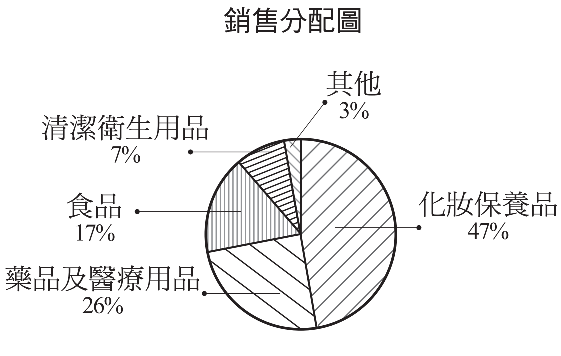
(　　) 8. 某校高三有 2000 位學生，數學段考成績呈常態分布，平均成績 65 分，標準差 8 分，小明預估成績在高三數學排名介在 3 至 50 名之間，則合乎他預估分數的最接近區間為何？

(A) $\left[65,81\right]$　(B) $\left[57,73\right]$　(C) $\left[81,89\right]$　(D) $\left[87,95\right]$。

(　　) 9. 國內自 101 年至 105 年藥妝零售業每年銷售額的長條圖，如圖(一)，而其中 105 年藥妝零售業銷售分配圓形圖，如圖(二)，求該年銷售分配比重最高的前二類銷售金額差距為何？（單位：億元）



圖(一)



圖(二)

(A) 411.6　(B) 394.8　(C) 284.6　(D) 176.4。

(　　) 10. 已知$\sin^2\theta=\cos^2\theta-3\sin\theta+1$，且$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，則$\theta=$

(A)15°　(B)30°　(C)45°　(D)60°。

(　　) 11. 若一扇形的面積為$\dfrac{27\pi}{2}$，弧長為$\dfrac{9\pi}{2}$，則此扇形的圓心角為何？

(A)$\dfrac{\pi}{4}$　(B)$\dfrac{\pi}{3}$　(C)$\dfrac{2\pi}{3}$　(D)$\dfrac{3\pi}{4}$。

(　　) 12. 已知多項式$f(x)$除以$x-1$得到商式$g(x)$以及餘數3，且$g(x)$除以$x-2$得到餘數6，則$f(x)$除以$x-2$的餘數為何？

(A)6　(B)9　(C)15　(D)21。

(　　) 13. 將$(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)(x^2-x+1)$展開，可得下列何式？

(A)$x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$
(B)$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$
(C)$x^7-2x^6-3x^5-3x^4-3x^3-3x^2-2x-1$
(D)$x^7-2x^6+3x^5-3x^4+3x^3-3x^2+2x-1$。

(　　) 14. 由 0、1、2、3、4、5、6七個數字中取三個相異數字排成三位數的偶數，則方法有幾種？

(A)60　(B)90　(C)105　(D)120。

(　　) 15. 已知正三角形ABC的三個頂點分別為$A(a,b)$、$B(-1,1)$、$C(1,-1)$，則$ab=$

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4。

(　　) 16. 設直線L通過$A(-k,2)$、$B(1,2k)$兩點，且與直線L_2：$x+5y-5=0$互相垂直，則$k=$

(A)$-\dfrac{7}{3}$　(B)$-\dfrac{3}{7}$　(C)$\dfrac{9}{11}$　(D)$\dfrac{11}{9}$。

(　　) 17. 設a為實數，若$ax^2-2ax+2a+3<0$的解為任意實數，則下列何者正確？

(A)$a<-3$　(B)$-3<a<0$　(C)$0<a<3$　(D)$a>3$。

(　　) 18. 已知兩直線L_1：$x-2y+3=0$和L_2：$2x+y-1=0$，若A、B二點在L_1的異側且A、C二點在L_2的同側，其中A、B、C三點坐標分別為$A(-2,k)$、$B(k,3)$和$C(-k,-k)$，則實數k的範圍為何？

(A)$\dfrac{-1}{3}<k<\dfrac{1}{2}$或$3<k<5$　(B)$\dfrac{1}{2}<k<5$　(C)$k<\dfrac{-1}{3}$或$k>3$　(D)無解。

(　　) 19. 某飼料工廠製造一包豬飼料需要大豆5公斤、玉米2公斤；製造一包雞飼料需要大豆2公斤、玉米3公斤；此工廠共有大豆200公斤、玉米180公斤，若每包豬飼料可獲利22元，且每包雞飼料可獲利44元，試求其可獲得之最大利潤為何？

(A) 2310元　(B) 2480元　(C) 2560元　(D) 2640元。

(　　) 20. 已知a為實數，若一元二次方程式$(a-1)x^2+a^3x+(a^2+a+1)=0$的解為兩相同實根，則$a=$

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\sqrt[3]{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\sqrt[3]{2}$。

(　　) 21. 甲生忘了金融卡密碼的最後三個數字abc，但他記得$a<b<c$，均為1、2、3、4、5、6中的數字，且其和$a+b+c$為5的倍數，若甲生依上述條件猜測一組密碼，則甲生猜中的機率為何？

(A) $\frac{1}{30}$　(B) $\frac{1}{5}$　(C) $\frac{1}{4}$　(D) $\frac{1}{3}$。

(　　) 22. 由十男十女共二十人中選出十人，其中三個是男生，七個是女生，則有多少種選法？

(A) 120　(B) 14400　(C) C^{20}_{10}　(D) $7!\times3!$。

(　　) 23. 若點$P(3,4)$到圓$2x^2+2y^2-4x+6y+1=0$之切線段長度為$\frac{a\sqrt{14}}{2}$，則$a=$

(A) 7　(B) 5　(C) 3　(D) 2。

(　　) 24. 設$\langle a_k\rangle$為公比-2的等比數列，已知$a_1a_3=12$，則$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2=$

(A) 219　(B) 237　(C) 246　(D) 255。

(　　) 25. $\sum_{k=1}^{10}\left(2^k+3k+2\right)=$

(A) 2229　(B) 2230　(C) 2231　(D) 2232。

108 年統一入學測驗　數學(A)

答　案

1.B	2.D	3.A	4.B	5.B	6.A	7.D	8.C	9.A	10.B
11.D	12.B	13.D	14.C	15.C	16.A	17.A	18.A	19.D	20.D
21.C	22.B	23.C	24.D	25.C					

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 108 年 5 月 6 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

若 $\overrightarrow{A}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{B}=(b_1,b_2)$

(1) $r\times\overrightarrow{A}=(ra_1,ra_2)$（$r$ 為實數）

(2) $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$

(3) $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{B}$，則 $a_1=b_1$ 且 $a_2=b_2$

解析

$\because \overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$

$\therefore (3,8)=x(3,1)+y(-1,2)=(3x-y,x+2y)$

$\Rightarrow \begin{cases}3x-y=3\\x+2y=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

故 $x+y=2+3=5$

2. 技巧與分析

根與係數的關係：

若 α 、 β 為 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根，則

$\begin{cases}\text{兩根和：}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \text{兩根積：}\alpha\times\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

解析

$\because a$ 、 b 為 $x^2+7x-15=0$ 的兩根

由根與係數的關係得：

$\begin{cases}a+b=-7\\a\times b=-15\end{cases}$

若一方程式的兩根為 $2a$ 、 $2b$

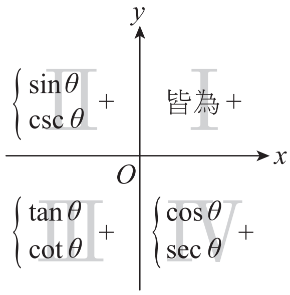
則 $\begin{cases}2a+2b=2(a+b)=-14\\2a\times 2b=4ab=-60\end{cases}$

故方程式為 $x^2-(-14)x+(-60)=0$

即 $x^2+14x-60=0$

3. 技巧與分析

三角函數值的正負判斷：



解析

$\tan 225°+\sec(-30°)-\csc 120°$

$=\tan 45°+\dfrac{1}{\cos(-30°)}-\dfrac{1}{\sin 120°}$

$=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}=1$

4. 技巧與分析

若 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$，則

$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

解析

設 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$

則 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

$\because A$ 、 B 在 $3x+4y=5$ 上

$\therefore \begin{cases}3x_1+4y_1=5\cdots\cdots①\\3x_2+4y_2=5\cdots\cdots②\end{cases}$

②−① 得

$3(x_2-x_1)+4(y_2-y_1)=0$

$\because \overrightarrow{AB}=(a,b)$

$\therefore 3a+4b=0$

$\Rightarrow 6a+8b=0 \Rightarrow 6a+8b-5=0-5=-5$

5. 技巧與分析

倍數與次方的概念

解析

A 細菌每 3 小時成長 $\frac{600}{500}=\frac{6}{5}$ 倍

$\therefore A$ 細菌 9 小時後成長 $\left(\frac{6}{5}\right)^3=\frac{216}{125}$ 倍

故 A 細菌數量為 $500\times\frac{216}{125}=864$ 個

6. 技巧與分析

向 x 軸做垂直移動就是 y 坐標的移動，圓周上的點靠 x 軸愈近則愈快碰觸到 x 軸

圓方程式：

(1) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，圓心 (h,k)，半徑 r

(2) $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，圓心 $\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$，半徑為 $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$

解析

圓 A：$x^2+y^2+4x-8y+16=0$

$\Rightarrow(x+2)^2+(y-4)^2=4$

圓 B：$x^2+y^2-4x-10y+19=0$

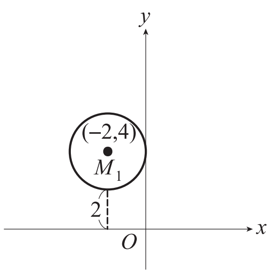
$\Rightarrow(x-2)^2+(y-5)^2=10$

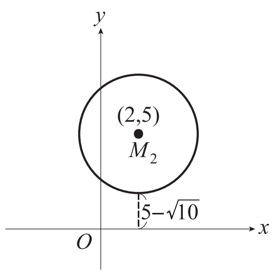
圓 C：$(x-1)^2+(y+3)^2=4$

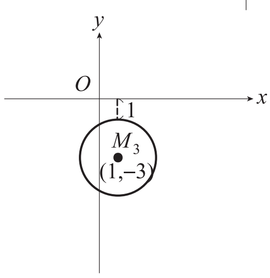
$\therefore$ 圓 A 的圓心 M_1 為 $(-2,4)$，半徑 $r_1=2$

圓 B 的圓心 M_2 為 $(2,5)$，半徑 $r_2=\sqrt{10}$

圓 C 的圓心 M_3 為 $(1,-3)$，半徑 $r_3=2$







由圖得知圓 A、B、C 與 x 軸最近距離分別為 2、$5-\sqrt{10}$、1

$\because$ 向 x 軸做垂直移動且碰觸 x 軸

且 $1<5-\sqrt{10}<2$（距離愈遠需時愈久）

$\therefore a>b>c$

7. 技巧與分析

n 個相異物做直線排列的方法數為 $n!$

解析

$P=\frac{3!\times2!\times2!\times2!}{6!}=\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

8. 技巧與分析

常態分布中，在平均數 ±2 個標準差之間的人數占全體的 95%，在平均數 ±3 個標準差之間的人數占全體的 99.7%

解析

$\because$ 第 50 名 $=\frac{50}{2000}=2.5\%$，

$1-2\times2.5\%=95\%$

且第 3 名 $=\frac{3}{2000}=0.15\%$，

$1-2\times0.15\%=99.7\%$

$\therefore$ 小明分數介於平均成績加 2 個標準差及平均成績加 3 個標準差之間

即小明的分數應介於 $65+2\times8=81$ 分及 $65+3\times8=89$ 分之間

故選(C)

9. 技巧與分析

直方圖與圓餅圖的圖表判斷

解析

105 年銷售分配比重最高的前二類分別為「化妝保養品」、「藥品及醫療用品」

$\therefore$ 銷售金額差距為

$1960\times(47\%-26\%)=411.6$ 億元

10. 技巧與分析

三角函數的平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

其中 $-1\le\sin\theta\le1$

解析

$\sin^2\theta=\cos^2\theta-3\sin\theta+1$

$\Rightarrow\sin^2\theta=\left(1-\sin^2\theta\right)-3\sin\theta+1$

$\Rightarrow2\sin^2\theta+3\sin\theta-2=0$

$\Rightarrow\left(2\sin\theta-1\right)\left(\sin\theta+2\right)=0$

$\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 -2（不合，$-1\le\sin\theta\le1$）

$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\theta=30^\circ$

11. 技巧與分析

(1) 扇形弧長 $=$ 半徑 $\times$ 圓心角

(2) 扇形面積 $=\dfrac{1}{2}\times$(半徑)$^2\times$圓心角

解析

扇形面積 $=\dfrac{1}{2}\times$(半徑)$^2\times$圓心角

$=\dfrac{1}{2}\times$半徑$\times$(半徑$\times$圓心角)

$=\dfrac{1}{2}\times$半徑$\times$弧長

$\because\dfrac{27}{2}\pi=\dfrac{1}{2}\times$半徑$\times\dfrac{9}{2}\pi$

$\therefore$半徑 $=6$

又弧長 $=$ 半徑 $\times$ 圓心角

$\therefore\dfrac{9}{2}\pi=6\times$圓心角$\Rightarrow$圓心角為 $\dfrac{3}{4}\pi$

12. 技巧與分析

(1) 除法原理：$f(x)\div g(x)=Q(x)\cdots\cdots R(x)$

$\Rightarrow f(x)=g(x)\times Q(x)+R(x)$

(2) 餘式定理：$f(x)\div(x-a)$ 的餘式為 $f(a)$

解析

由除法原理知

$f(x)=(x-1)\times g(x)+3$

又$\because g(x)=(x-2)q(x)+6$

$\therefore g(2)=6$

由餘式定理知

$f(x)\div(x-2)$ 的餘式為 $f(2)$

$\therefore f(2)=(2-1)\times g(2)+3=g(2)+3$

$=6+3=9$

13. 技巧與分析

逐項展開再同類項合併

解析

$\left(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1\right)\left(x^2-x+1\right)$

$=x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2$

$\quad-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x$

$\quad+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

$=x^7-2x^6+3x^5-3x^4+3x^3-3x^2+2x-1$

故選(D)

14. 技巧與分析

乘法原理：完成一件事有 k 步驟

第一步：m_1 種方法

第二步：m_2 種方法

$\vdots$

第 k 步：m_k 種方法

可知完成這件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ 種方法

解析

〈法一〉

(i) 個位數為 0 時：

$\boxed{}\boxed{}\boxed{0}$：$6\times5=30$ 種

(ii) 個位數分別為 2 或 4 或 6 時：

$\boxed{}\boxed{}\boxed{{}^2{}_4{}_6}$：$5\times5\times3=75$ 種

$30+75=105$ 種

〈法二〉

任意排列：$6\times6\times5=180$ 種

奇數排列：$\boxed{}\boxed{}\boxed{{}^1{}_3{}_5}$：$5\times5\times3=75$ 種

偶數排列 $=$ 任意排列 $-$ 奇數排列 $=$

$180-75=105$ 種

15. 技巧與分析

兩點之距離公式：設 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ 為相異兩點，則 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

解析

$\because \triangle ABC$ 為正三角形

$\therefore \overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(-2)^2+2^2}$$

即 $\begin{cases}(a+1)^2+(b-1)^2=8\\(a-1)^2+(b+1)^2=8\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}a^2+b^2+2a-2b=6\cdots\cdots①\\a^2+b^2-2a+2b=6\cdots\cdots②\end{cases}$

①−② $4a-4b=0\Rightarrow a=b$

①+② $2(a^2+b^2)=12\Rightarrow a^2+b^2=6$

又 $\because a=b$

$\therefore 2a^2=6\Rightarrow a^2=3\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}=b$

$\therefore ab=(\pm\sqrt{3})^2=3$

16. 技巧與分析

(1) 通過 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$ 兩點的直線斜率為 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ （其中 $x_1\neq x_2$ ）

(2) 若兩直線 L_1 與 L_2 垂直，則 $m_{L_1}\times m_{L_2}=-1$

解析

$\because L\perp L_2$

$\therefore m_L\times m_{L_2}=-1$

即 $\dfrac{2k-2}{1-(-k)}\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)=-1$

$\Rightarrow \dfrac{2k-2}{1+k}=5\Rightarrow 2k-2=5+5k$

$\Rightarrow -3k=7\Rightarrow k=-\dfrac{7}{3}$

17. 技巧與分析

若 $y=ax^2+bx+c$ 恆為負數，則

(1) $a<0$ (2) $b^2-4ac<0$

解析

$\because ax^2-2ax+(2a+3)<0$ 的解為任意實數

即 $ax^2-2ax+(2a+3)<0$ 恆成立

故① $a<0$

② 判別式 $D=(-2a)^2-4a(2a+3)<0$

$\Rightarrow 4a^2-8a^2-12a<0$

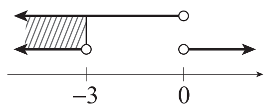
$\Rightarrow -4a^2-12a<0$

$\overset{\div 4}{\Rightarrow} a^2+3a>0$

$\Rightarrow a(a+3)>0$

得 $a<-3$ 或 $a>0$

由①②得 $a<-3$



18. 技巧與分析

(1) $P(x_1,y_1)$ 、 $Q(x_2,y_2)$ 在直線 L ： $ax+by+c=0$ 的同側，則 $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)>0$

(2) $P(x_1,y_1)$ 、 $Q(x_2,y_2)$ 在直線 L ： $ax+by+c=0$ 的異側，則 $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)<0$

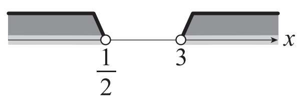
解析

$\because A$ 、 B 在 L_1 的異側

$\therefore (-2-2k+3)(k-(2\times3)+3)<0$

$\Rightarrow (-2k+1)(k-3)<0$

$\Rightarrow (2k-1)(k-3)>0$



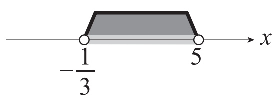
$\Rightarrow k<\dfrac{1}{2}$ 或 $k>3\cdots\cdots①$

又 $\because A$ 、 C 在 L_2 的同側

$\therefore ((2\times(-2))+k-1)(-2k+(-k)-1)>0$

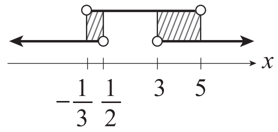
$\Rightarrow (k-5)(-3k-1)>0$

$\Rightarrow (k-5)(3k+1)<0$



$\Rightarrow -\dfrac{1}{3}<k<5\cdots\cdots②$

由①②



得$-\frac{1}{3}<k<\frac{1}{2}$或$3<k<5$

19. 技巧與分析

線性規劃的解法：

(1) 圖解聯立不等式，畫出可行解區域，並求出圖形之各頂點坐標

(2) 目標函數之最大值與最小值必發生在可行解區域之各頂點坐標上，將每一頂點分別代入目標函數中，即可求得其最大值與最小值

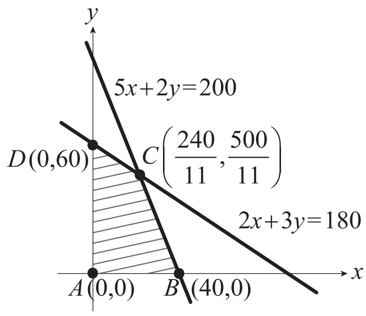
解析

設製造豬飼料x包，製造雞飼料y包

則$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 5x+2y\le 200 \\ 2x+3y\le 180 \end{cases}$

利潤函數為$f(x,y)=22x+44y$

其可行解區域圖形為：



頂點(x,y)	$A(0,0)$	$B(40,0)$	$C\left(\frac{240}{11},\frac{500}{11}\right)$	$D(0,60)$
$f(x,y)$ $=22x+44y$	0	880	2480	2640

得知最大利潤為2640元

20. 技巧與分析

(1) $a\ne 0$，$ax^2+bx+c=0$有相等實根，則判別式$D=b^2-4ac=0$

(2) $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$

解析

∵是相同實根

∴判別式$D=(a^3)^2-4(a-1)(a^2+a+1)=0$

$\Rightarrow a^6-4(a^3-1)=0$

$\Rightarrow a^6-4a^3+4=0$

$\Rightarrow (a^3)^2-4a^3+4=0$

$\Rightarrow (a^3-2)^2=0$

$\Rightarrow a^3=2$

即$a=\sqrt[3]{2}$

21. 技巧與分析

列出所有可能之情形

解析

$\because a<b<c$

且$a+b+c$為5的倍數

符合條件的(a,b,c)情形有：

$a+b+c=10\ \begin{cases}(1,3,6)\\(1,4,5)\\(2,3,5)\end{cases}$

$a+b+c=15\ \{(4,5,6)$

共四種情形

∴甲生猜中密碼的機率為$\frac{1}{4}$

（從4種情形中找出1種正確的）

22. 技巧與分析

組合：n中取m的組合方法數（C^n_m）

解析

$C^{10}_3\times C^{10}_7=120\times 120=14400$

23. 技巧與分析

圓方程式：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，

$P(x_1,y_1)$為圓外一點，則P到圓的切線段長

為$\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+dx_1+ey_1+f}$

解析

$\because$圓：$x^2+y^2-2x+3y+\dfrac{1}{2}=0$

$\therefore$切線段長

$=\sqrt{3^2+4^2-2\times3+3\times4+\dfrac{1}{2}}$

$=\sqrt{9+16-6+12+\dfrac{1}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{63}{2}}=\dfrac{\sqrt{126}}{2}=\dfrac{3\sqrt{14}}{2}=\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$

$\therefore a=3$

24. 技巧與分析

等比數列第n項公式：$a_n=a_1\times r^{n-1}$

解析

$\because a_1\times a_3=12$

$\therefore a_1\times a_1\times(-2)^2=12$

$\Rightarrow {a_1}^2=3$

則${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2$

$={a_1}^2+(a_1r)^2+(a_1r^2)^2+(a_1r^3)^2$

$={a_1}^2+{a_1}^2r^2+{a_1}^2r^4+{a_1}^2r^6$

$=3+3\times(-2)^2+3\times(-2)^4+3\times(-2)^6$

$=3+12+48+192$

$=255$

25. 技巧與分析

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}c=n\times c$（$c$為常數）

(3) $a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-1}=\dfrac{a_1\times(r^n-1)}{r-1}$

(4) $1+2+\cdots+n=\dfrac{(1+n)\cdot n}{2}$

解析

$\sum_{k=1}^{10}(2^k+3k+2)$

$=\sum_{k=1}^{10}2^k+\sum_{k=1}^{10}3k+\sum_{k=1}^{10}2$

$=(2^1+2^2+\cdots+2^{10})+3\times(1+2+\cdots+10)$

$+10\times2$

$=\dfrac{2\times(2^{10}-1)}{2-1}+3\times\dfrac{(1+10)\times10}{2}+20$

$=2046+165+20$

$=2231$

108 年 統測數學 B 考情趨勢與考題剖析

108 統測數學 B 考情趨勢

一、試題分析

1. 難易適中：
   這幾年的統測試題都相當穩定，著重在概念之理解，不需太複雜的運算。
2. 試題生活化，重視數學素養：
   108 課綱所強調的素養走向，在這份試題中也能窺探一二，例如：手機的詢價、分針的轉角、獲利的期望值以及統計資料的判讀，這些都說明數學與生活之結合應用，也將會是未來命題的主流。
3. 提升閱讀能力，刻不容緩：
   從這次試題中應該不難發現：題目的鋪陳相當完整！如果沒有好的閱讀能力，就無法抓到題目的核心，這會直接影響到作答的正確率以及間接影響作答的穩定度。
4. 章節分布，大致平均：
   不知是否受 108 課綱之影響，拋物線、橢圓、雙曲線這次皆沒有入題，而正、餘弦定理為往年命題之熱門方向，但今年也未出現！其他各章節都有出題，分布還算平均！

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	3	不等式及其應用	2
三角函數	3	排列組合	2
向量	1	機率	2
指數與對數及其運算	2	統計	2
數列與級數	1	三角函數的應用	1
式的運算	1	二次曲線	1
方程式	2	微積分及其應用	2

108 統測數學 B 考題剖析

總　分

數學 B 參考公式

1. 首項為 a ，公比為 r （ $r \neq 1$ ）的等比數列前 n 項之和為 $S = \dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$
2. 若 α 、 β 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則 $\alpha+\beta = \dfrac{-b}{a}$ 、 $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$
3. 相異物的直線排列數 $P^n_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ 、不可重複的組合數 $C^n_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 、
   重複組合數 $H^n_r = C^{r+n-1}_r$
4. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ 、 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 甲同學想要網購某支特定手機，上網逛了 7 家購物網站後，告訴好友說：「該款手機的價差不大，在 100 元以內」。試問甲所說的話中，應用了下列哪一種統計量？
(A)四分位距　(B)全距　(C)標準差　(D)百分位數。

(　　) 2. 假設分針原始指在時鐘 12 的位置，現將分針依順時針的方向轉了 $2019°$。試問下列敘述何者正確？
(A)分針指在 9 跟 10 之間　(B)分針指在 7 跟 8 之間
(C)分針指在 5 跟 6 之間　(D)分針指在 3 跟 4 之間。

(　　) 3. 下列何值與 $\log_2 5$ 相等？
(A) $\log 5 - \log 2$　(B) $\log\left(\dfrac{5}{2}\right)$　(C) $\dfrac{\log 50}{\log 20}$　(D) $\dfrac{\log 25}{\log 4}$ 。

(　　) 4. 若方程式 $3x^2-39x+k=0$ 的兩根為連續整數，則 $k=$
(A) 168　(B) 126　(C) 84　(D) 42 。

(　　) 5. 已知直線 L 之斜率為 2 ， x 截距為 3 。試問 L 與兩坐標軸所包圍三角形之面積為何？
(A) $\dfrac{9}{4}$　(B) $\dfrac{9}{2}$　(C) 6　(D) 9 。

(　　) 6. 設 $f(x)$ 為三次多項式，已知 $f(-1)=4$ 且 $f(-2)=f(1)=f(3)=0$。試問 $f(x)$ 除以 $x-2$ 之餘式為何？

(A) -6　(B) -2　(C) 3　(D) 5。

(　　) 7. 設 x、y 為實數，且 $x-2y=10$。試問 $f(x,y)=x^2+y^2$ 之最小值為何？

(A) 25　(B) 20　(C) 17　(D) 16。

(　　) 8. 設 $\left(3^m\right)^3=729$ 且 $4^{n-m}=\dfrac{1}{256}$，則 $m+n=$

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2。

(　　) 9. 若 $a=\sin\theta$，則下列敘述何者恆為正確？

(A) $\sin(\theta+90°)=a$　(B) $\cos(\theta+90°)=a$

(C) $\sin(\theta+180°)=-a$　(D) $\cos(\theta+180°)=-a$。

(　　) 10. 當角度 θ 由 $15°$ 上升至 $75°$ 時，關於 $\tan\theta$ 之值的變化，下列敘述何者正確？

(A)一直上升　(B)一直下降　(C)先上升後下降　(D)先下降後上升。

(　　) 11. 一顆雞蛋從生產到運送至超市販售，所需的成本為 4 元，在超市的售價為 5 元，其獲利由蛋農與超市平分；但運送過程中破裂或超過保存期限等因素，超市會將雞蛋銷毀，雞蛋即無法成功銷售，超市亦不付蛋農任何款項。若一顆雞蛋無法成功銷售的機率為 0.006，則蛋農一顆雞蛋之獲利的期望值為多少元？

(A)0.473　(B)0.5　(C)0.967　(D)0.97。

(　　) 12. 在理想環境下，將一球自離地面 30 公尺處垂直落下，球只會上下垂直來回彈跳。若每次反彈高度為前一次高度的 $\dfrac{2}{5}$，則此球靜止前所經過的路程為多少公尺？

(A)50　(B)60　(C)70　(D)80。

(　　) 13. 某校校長想知道全校學生贊成取消早自習的比例 p，並將 p 在 95% 的信心水準下之信賴區間簡稱 95% 信賴區間，現從所有學生中隨機抽取樣本數為 36 的一組樣本，利用這 36 位學生的意見求得 p 之 95% 信賴區間為 $[0.642, 0.914]$。若學生對早自習是否取消的意見是固定不變的，則下列何者為正確解讀？

(A)該校約有 95% 的學生贊成取消早自習

(B) p 落在 64.2% 與 91.4% 之間的機率為 95%

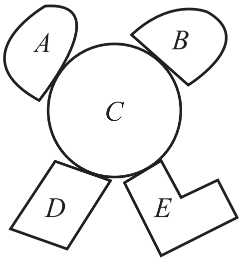
(C)若進行 1000 次抽樣調查，每次皆隨機抽取樣本數為 36 的一組樣本，共可算得 1000 個 p 之 95% 信賴區間，其中約有 950 個區間會包含 p

(D)若進行 1000 次抽樣調查，每次皆隨機抽取樣本數為 36 的一組樣本，共可算得 1000 個學生贊成取消早自習的樣本比例，其中約有 950 個會落在 64.2% 與 91.4% 之間。

(　　) 14. 若拋物線 $y = ax^2 + b$ 之開口向上且與 x 軸沒有交點，則下列敘述何者正確？
(A) $a > 0$，$b > 0$　(B) $a > 0$，$b < 0$　(C) $a < 0$，$b > 0$　(D) $a < 0$，$b < 0$。

(　　) 15. 已知直線 L_1 為 $y = m_1 x$、直線 L_2 為 $y = m_2 x$。若 m_1、m_2 的值皆為 2、$\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ 三種數字之一，彼此取值互為獨立，且三種數字出現的機率相同，則 L_1 和 L_2 相互垂直的機率為何？
(A) $\frac{4}{9}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{2}{9}$　(D) $\frac{1}{9}$。

(　　) 16. 如圖(一)所示，使用8種不同顏色塗在圖中標號 A、B、C、D、E 的5個格子內，顏色不可重複使用，若規定同一格子僅塗同一顏色，則共可塗出幾種不同的著色樣式？
(A) P^8_5　(B) C^8_5　(C) 5^6　(D) 6^5。



圖(一)

(　　) 17. 若實數 x 滿足行列式 $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 4 & 6-2x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$，則 $\begin{vmatrix} 2 & 3-x & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1-x & -1 & -1 \end{vmatrix} =$
(A) 4　(B) -4　(C) 8　(D) -8。

(　　) 18. 設函數 $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$。試問曲線 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 及 $x = 2$ 之間與 x 軸所包圍之區域的面積為何？
(A) 5　(B) 7　(C) 9　(D) 11。

(　　) 19. 設函數 $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$。試問 $f'(1) + f''(1)$ 之值為何？
(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 6。

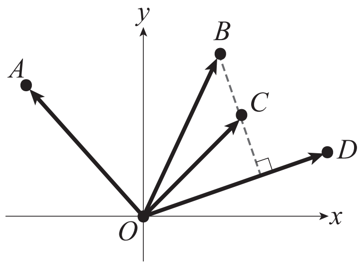
(　　) 20. 小明在平地上測得某一直立高樓的頂端之仰角為 $45°$。他面向該高樓向前直行30公尺之後，測得高樓頂端之仰角為 $60°$。試問小明第二次測仰角時，距離高樓的底部約多少公尺？
(A) 30　(B) $15(\sqrt{3}-1)$　(C) $15(\sqrt{3}+1)$　(D) 45。

(　　) 21. 設 (x, y) 滿足 $y \ge 0$、$0 \le x \le 4$、$-2 \le x - 2y \le 2$，試問 $f(x, y) = x - y$ 之最大值為何？
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4。

( ) 22. 全班共40位同學（座號1至40號），導師想挑選7位學生進行家庭訪問，先以簡單隨機抽樣從1到6號抽出1個號碼，再依系統抽樣每間隔6號找出次一位學生，若超出40號以上，則41號就是1號，42號就是2號，依此類推。試問2號被抽中的機率為多少？

(A)$\frac{1}{3}$ (B)$\frac{7}{40}$ (C)$\frac{1}{6}$ (D)$\frac{1}{7}$。

( ) 23. 如圖(二)所示，以O為原點的直角坐標系上有四點，由左至右依序為A、B、C、D，其中A落在第二象限，B、C、D落在第一象限，且直線BC與直線OD的交點落在O、D兩點之間。已知$\angle AOD > 90°$，且$\overrightarrow{BC}$與$\overrightarrow{OD}$的內積為0。若向量$\overrightarrow{OD}$分別與向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$及$\overrightarrow{OD}$求內積，依次得到a、b、c及d四個數值，則下列何者正確？



圖(二)

(A)$b > a > c > d$ (B)$b = c > d > a$ (C)$a > b > c > d$ (D)$d > b = c > a$。

( ) 24. 已知向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$及$\overrightarrow{d}$分別自$(1,0)$、$(0,1)$或$(1,1)$三向量中選取出來，例如：$\overrightarrow{a}=(1,0)$、$\overrightarrow{b}=(0,1)$、$\overrightarrow{c}=(0,1)$、$\overrightarrow{d}=(1,1)$，或$\overrightarrow{a}=(1,1)$、$\overrightarrow{b}=(0,1)$、$\overrightarrow{c}=(1,0)$、$\overrightarrow{d}=(1,0)$等等皆屬可能的選取情形。若計算$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}$所有可能的情形後，則可得到幾種不同的結果？

(A)10 (B)15 (C)20 (D)3^4。

( ) 25. 已知一圓方程式$x^2+y^2-2x-6y+9=0$。若直線$y=b$與該圓有交點，則下列敘述何者正確？

(A)$b \geq 5$ (B)$b \leq -4$ (C)$-1 \leq b \leq 1$ (D)$2 \leq b \leq 4$。

108 年統一入學測驗 數學(B)

答 案

1.B	2.B	3.D	4.B	5.D	6.B	7.B	8.B	9.C	10.A
11.A	12.C	13.C	14.A	15.C	16.A	17.A	18.D	19.D	20.C
21.C	22.A	23.D	24.B	25.D					

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 108 年 5 月 6 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

(1) 理解各項統計量的意義

(2) 全距＝最大值－最小值

解析

甲同學上網比價之結論為「價差在100元以內」，表示甲同學之詢價的最高與最低差距小於100，由此可知：甲應用了統計中的全距之概念。

2. 技巧與分析

(1) 鐘面上有 60 小格，每格所對之圓心角 $=6^\circ$

(2) 最小正同界角之概念

解析

$\because 2019^\circ \div 360^\circ = 5 \cdots\cdots 219^\circ$

$\therefore$最小正同界角$=219^\circ$

而$219^\circ \div 6^\circ = 36 \cdots\cdots 3$

表示分針最後停在36～37 格

$\Rightarrow$分針指在7與8之間

3. 技巧與分析

熟悉log之運算規則

解析

(A) $\log 5 - \log 2 = \log\frac{5}{2} \neq \log_2 5$

(B) $\log\frac{5}{2} \neq \log_2 5$

(C) $\frac{\log 50}{\log 20} = \log_{20} 50 \neq \log_2 5$

(D) $\frac{\log 25}{\log 4} = \log_4 25 = \log_{2^2} 5^2 = \log_2 5$

4. 技巧與分析

二次方程式的根與係數關係：

若$ax^2+bx+c=0$的兩根為α、β，則

(1) $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$　(2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

解析

方程式$3x^2-39x+k=0$的兩根和為

$\frac{-(-39)}{3}=13$，兩根積為$\frac{k}{3}$

又$\because$兩根為連續整數

$\therefore$令兩根為a、$a+1$

$\Rightarrow a+(a+1)=13 \Rightarrow a=6$

可知兩根為6、7

$\therefore \frac{k}{3}=6\times 7 \Rightarrow k=126$

5. 技巧與分析

(1) 理解x截距

(2) 已知斜率與x截距，求直線方程式

解析

$\because x$截距為3　$\therefore$直線通過點$(3,0)$

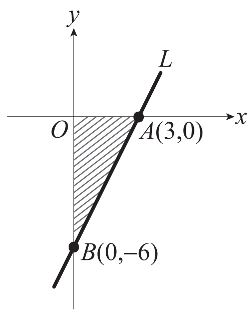
又$\because$直線斜率為2

$\therefore$直線L之方程式為$y-0=2(x-3)$

$\Rightarrow 2x-y-6=0$（如圖）

x	3	0
y	0	-6

可知$\Delta OAB=\frac{3\times 6}{2}=9$



6. 技巧與分析

(1) 因式定理與餘式定理

(2) $f(x)$ 的假設方式

解析

令 $f(x)=k(x+2)(x-1)(x-3)$

$\because f(-1)=4$

$\therefore k(-1+2)(-1-1)(-1-3)=4$

$\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$

得 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-3)$

由餘式定理知：$f(x)$ 除以 $x-2$ 之餘式為

$f(2)=\dfrac{1}{2}(2+2)(2-1)(2-3)=-2$

7. 技巧與分析

柯西不等式：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$

解析

由柯西不等式知：

$(x^2+y^2)\left[1^2+(-2)^2\right]\ge(x-2y)^2$

$\Rightarrow(x^2+y^2)\times5\ge10^2$

$\Rightarrow x^2+y^2\ge20$

故 x^2+y^2 之最小值為 20

8. 技巧與分析

(1) 指數律之運用

(2) 解聯立方程組

解析

$(3^m)^3=729\Rightarrow3^{3m}=3^6$

$\Rightarrow3m=6$

$\Rightarrow m=2\cdots\cdots$①

又 $4^{n-m}=\dfrac{1}{256}\Rightarrow(2^2)^{n-m}=2^{-8}$

$\Rightarrow2(n-m)=-8$

$\Rightarrow n-m=-4\cdots\cdots$②

由①②可得：$m=2$ 且 $n=-2$

$\therefore m+n=0$

9. 技巧與分析

三角函數廣義角之簡化公式

解析

(A) $\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$

(B) $\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta=-a$

(C) $\sin(\theta+180^\circ)=-\sin\theta=-a$

(D) $\cos(\theta+180^\circ)=-\cos\theta$

10. 技巧與分析

理解 $y=\tan\theta$ 中，θ 與 y 之變化關係

解析

$\because 15^\circ\le\theta\le75^\circ$ 為第一象限角且 $\tan\theta$ 為遞增函數

$\therefore \tan\theta$ 之值會隨著角度之增加而持續變大

11. 技巧與分析

(1) 數學與生活之結合，務必仔細閱讀題目

(2) 數學期望值之概念

解析

如果雞蛋順利賣出，蛋農獲利 $\dfrac{5-4}{2}=0.5$（元）

若破裂或過期，蛋農損失 4 元（如表）

所得	$+0.5$	-4
機率	0.994	0.006

$\therefore$ 期望值 $=0.5\times0.994+(-4)\times0.006$

$=0.473$（元）

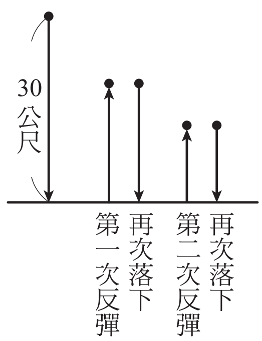
12. 技巧與分析

(1) 理解題目之意義，最好畫圖呈現

(2) 由於公比介於 -1 與 1 之間，路程總長可以使用收斂之無窮等比級數和公式得之

解析

路程之分析如圖：



∴路程長

$$=30+2\times\left[30\times\frac{2}{5}+30\times\left(\frac{2}{5}\right)^2+\cdots\cdots\right]$$

$$=30+2\times\frac{30\times\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=70\text{（公尺）}$$

13. 技巧與分析

(1) 理解信心水準與信賴區間之意義

(2) 數學與生活之結合

解析

95% 的信賴區間所代表的意義是：如果不斷重複作同樣的抽樣調查，得到很多個區間，則其中有95% 會包含真正的母體比例 p，而本題以1000 次調查為例，意思就是其中950 個區間會包含 p，故選(C)

14. 技巧與分析

(1) 理解二次函數式各項係數之意義

(2) 能繪製二次函數之圖形

解析

∵拋物線之開口向上　∴ $a>0$……①

又∵拋物線之頂點為 $(0,b)$ 且與 x 軸沒有交點

∴圖形都在 x 軸上方⇒ $b>0$……②

由①②知：$a>0$，$b>0$

15. 技巧與分析

(1) 理解兩線垂直之斜率關係

(2) 機率之應用

解析

由於 m_1、m_2 均有3種選擇且互為獨立

∴樣本空間有 $3\times3=9$ 個數對樣本……①

又∵ $L_1\perp L_2$　∴ $m_1\times m_2=-1$

$\Rightarrow(m_1,m_2)=\left(2,-\frac{1}{2}\right)$或$\left(-\frac{1}{2},2\right)$……②

由①②知：其機率為 $\frac{2}{9}$

16. 技巧與分析

理解排列組合之概念

解析

∵使用8種「不同」顏色塗在5個「不同」區域

∴其著色方式有 P^8_5 種

17. 技巧與分析

理解行列式之運算規則

解析

$$\begin{vmatrix}1-x & 2 & 0\\ 4 & 6-2x & 2\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=4$$

$\Rightarrow(1-x)(6-2x)-6(1-x)-8=4$

$\Rightarrow 6-8x+2x^2-6+6x-12=0$

$\Rightarrow 2x^2-2x-12=0\Rightarrow x^2-x-6=0$

$\Rightarrow(x-3)(x+2)=0$

$\therefore x=3$ 或 -2

(1) $x=3$ 時

$$\begin{vmatrix}2 & 3-x & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 1-x & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ -2 & -1 & -1\end{vmatrix}$$

$=-12+12+4=4$

(2) $x=-2$ 時

$$\begin{vmatrix}2 & 3-x & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 1-x & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 5 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}$$

$=-12+30-18+4=4$

由(1)(2)知：行列式值為4

18. 技巧與分析

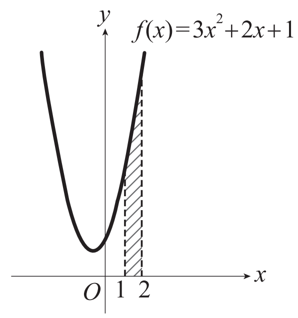
(1) 能繪製二次函數之圖形

(2) 理解積分值與面積之關係

解析

∵ $3>0$ 且 $2^2-4\times3\times1<0$

$\therefore f(x)=3x^2+2x+1$ 之圖形都在 x 軸上方（如圖）



則所求之面積為斜線區域之面積，其值為

$$\int_1^2 \left(3x^2+2x+1\right)dx=\left(x^3+x^2+x\right)\Big|_1^2$$

$$=\left(2^3-1^3\right)+\left(2^2-1^2\right)+\left(2-1\right)=7+3+1=11$$

19. 技巧與分析

能熟悉微分公式

解析

$\because f(x)=x^3-x^2+x-2$

$\therefore f'(x)=3x^2-2x+1$，且 $f''(x)=6x-2$

所求 $f'(1)+f''(1)=(3-2+1)+(6-2)=6$

20. 技巧與分析

(1) 數學與生活之結合

(2) 能將文字敘述正確轉為圖像

(3) 能使用三角函數之概念

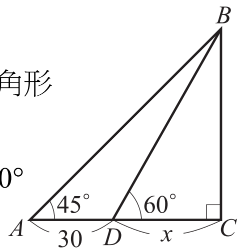
解析

如圖，令 $\overline{CD}=x$

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形

$\therefore \overline{BC}=\overline{AC}=30+x$

又 $\triangle BCD$ 是 $30°-60°-90°$ 之直角三角形



$$\therefore \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x}{30+x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x=30+x \Rightarrow x=\frac{30}{\sqrt{3}-1}=15\left(\sqrt{3}+1\right)$$

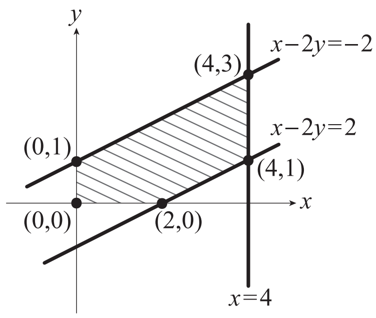
21. 技巧與分析

(1) 繪製二元一次聯立不等式之圖形

(2) 理解線性規劃之意義

解析

滿足不等式之區域如圖



將斜線區域的5個頂點

$(0,0)$、$(0,1)$、$(2,0)$、$(4,3)$、$(4,1)$

分別代入 $f(x,y)=x-y$（如表）

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(2,0)$	$(4,3)$	$(4,1)$
$f(x,y)$ $=x-y$	0	-1	2	1	3

$\therefore x-y$ 之最大值為3

22. 技巧與分析

(1) 理解系統抽樣之方式

(2) 機率之應用

解析

依據系統抽樣，每間隔6號抽出1個號碼，則6種方式如下：

(1) 1、7、13、19、25、31、37

(2) 2、8、14、20、26、32、38

(3) 3、9、15、21、27、33、39

(4) 4、10、16、22、28、34、40

(5) 5、11、17、23、29、35、1

(6) 6、12、18、24、30、36、2

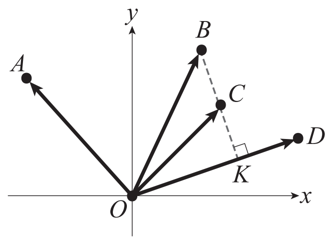
$\therefore$ 2號被抽中之機率 $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

23. 技巧與分析

理解向量內積之意義

解析

設 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overline{OD}$ 之交點為 K（如圖）



$$a=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}=\left|\overrightarrow{OD}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|\cos\left(\angle AOD\right)<0$$

$$b=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OD}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\left(\angle BOD\right)$$

$$=\left|\overrightarrow{OD}\right|\left|\overrightarrow{OK}\right|$$

$$c=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OD}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\left(\angle COD\right)$$

$$=\left|\overrightarrow{OD}\right|\left|\overrightarrow{OK}\right|$$

$d=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OD}=\left|\overrightarrow{OD}\right|\left|\overrightarrow{OD}\right|\cos 0^\circ=\left|\overrightarrow{OD}\right|^2$

由上可知：$d>b=c>a$

24. 技巧與分析

能正確運用排列組合之概念

解析

設 $(1,0)$ 被選了 A 次，$(0,1)$ 被選了 B 次，

$(1,1)$ 被選了 C 次

而 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}$ 所有可能結果之方法數

可以視為「$A+B+C=4$，求非負整數解」

$\therefore H^3_4=C^6_4=15$

25. 技巧與分析

(1) 圓方程式之性質

(2) 圓與直線之相交情形

解析

$x^2+y^2-2x-6y+9=0$

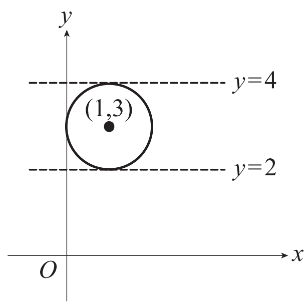
$\Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=1$（如圖）

其圓心為 $(1,3)$ 且半徑 $=1$

而 $y=b$ 為水平線

若直線與圓有交點（如圖）

則 $2\le b\le 4$



108 年 統測數學 C 考情趨勢與考題剖析

108 統測數學 C 考情趨勢

一、試題分析

108 年統測數學 C 是自統測實施以來最有難度的一份試卷。此次計算量多且繁瑣，預估此次的滿分人數可能會更少（註：99、105 年統測數學 C 各僅有 20、30 位滿分，這是統測數學 C 的最低紀錄）！如果與 107 年、106 年來比較，108 年的試題大都屬於中等或是偏難，簡單的題目約有四題，分散在試卷內，並沒有集中在前幾題，這對程度較低的考生來說恐怕也要耐心地尋找。

108 年統測數學 C 試卷的其他特色如下：

1. 情境試題：
   未來數學新課綱強調生活素養，今年已率先反應這樣的狀況。如：第 6、25 題。
2. 圖形試題：
   這次幾何圖形題目比以往多，且觀念、計算並重。考生需具備正確的圖形觀念與迅速精確的計算能力，才能在時間內完成。如：第 3、6、9、19、22、24 題。
4. 綜合試題：
   這次綜合觀念題也特別多，需要橫跨多個公式與觀念，才能正確的解答。如：扇形的第 5 題、任意角三角函數定義的第 16、24 題、各種排列組合的第 11 題、兩種圓錐曲線的第 22、23 題、微積分基本定理的 14 題。

綜合上述，對於程度較佳的考生這次試卷可以有效地拉開得分差距，但其他容易因不懂題意而隨意猜答，恐怕將會無法有效鑑別中、低程度的學生，這對於中等程度的考生將會非常不利，也會影響考生們對於準備數學的意願（因投資報酬率太差，可能更不想積極準備）。由於 108 年的試卷偏難，通常隔年(109 年）都會有擺盪效應，也許會有更大的不確定性，考生們應及早調整準備的方向與練習的重點。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	2	數列與級數	1
三角函數	2	指數與對數及其運算	2
三角函數的應用	2	排列組合	2
向量	1	機率與統計	2
式的運算	2	圓	0
聯立方程式	1	二次曲線	2
複數	1	微分	2
不等式及其應用	1	積分	2

總　　分

108 統測數學 C 考題剖析

數學 C 參考公式

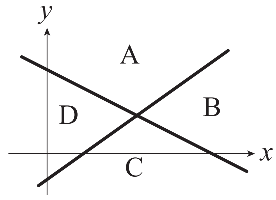
1. 三角函數的和角公式：
   $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ；$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
2. 若α 、β 為一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根，則$\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$ 、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ 。
3. 若一複數z其極式為$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中$r=|z|$，則$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，其中$n$為正整數。
4. 扇形面積$A=\dfrac{1}{2}r^2\theta$且周長$L=2r+r\theta$，其中r為扇形的半徑，θ為扇形的圓心角。
5. 拋物線方程式$(y-k)^2=4c(x-h)$：頂點(h,k)，焦點$(h+c,k)$，準線$x=h-c$。
6. 橢圓方程式$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，$a\ge b>0$：中心$(h,k)$，焦點$(h\pm c,k)$，其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$。
7. 雙曲線方程式$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$：中心$(h,k)$，焦點$(h\pm c,k)$，其中$c=\sqrt{a^2+b^2}$。
8. 相異物的直線排列數$P_k^n=\dfrac{n!}{(n-k)!}$，不可重覆的組合數$C_k^n=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$。
9. 設有一組抽樣資料$x_1,x_2,\cdots,x_n$，其算術平均數為$\bar{x}$，則樣本標準差為$S=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$。

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 已知$\overrightarrow{u}=(1,1)$，$\overrightarrow{v}=(x+4,y-1)$及$\overrightarrow{w}=(2x,y)$。若$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$垂直且$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{w}$平行，則下列何者正確？
(A)$x=1$　(B)$y=-2$　(C)$y=1$　(D)$x=-2$。

(　　) 2. 若$3<\log_{0.5}(2x+1)<4$，則x的範圍為何？
(A)$-\dfrac{3}{8}<x<-\dfrac{1}{4}$　(B)$-\dfrac{7}{16}<x<-\dfrac{3}{8}$　(C)$-\dfrac{15}{32}<x<-\dfrac{7}{16}$　(D)$-\dfrac{31}{64}<x<-\dfrac{15}{32}$。

(　　) 3. 有兩條直線 $L_1:3x-5y=2$ 、 $L_2:x+2y=3$ 將平面分成四個區域，如圖所示，試問區域A可用哪一組不等式表示？



(A) $\begin{cases}3x-5y\ge 2\\x+2y\ge 3\end{cases}$ (B) $\begin{cases}3x-5y\le 2\\x+2y\ge 3\end{cases}$ (C) $\begin{cases}3x-5y\ge 2\\x+2y\le 3\end{cases}$

(D) $\begin{cases}3x-5y\le 2\\x+2y\le 3\end{cases}$ 。

(　　) 4. 已知下列兩個聯立方程組有相同的解 (x,y,z) ，試問 a 的值為何？

$\begin{cases}3x-4y+z=4\\5x+2y-2z=3\end{cases}$ 、 $\begin{cases}2x+3y-2z=a\\4x+5y-3z=1\end{cases}$

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 。

(　　) 5. 已知扇形的面積為 1 且其周長為 5 ，試問此扇形的半徑為何？

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 。

(　　) 6. 有一梯子斜靠於牆上，且梯子、地面及牆面構成一個 $30°$ 、 $60°$ 、 $90°$ 的直角三角形。若梯子沿牆面下滑 $\frac{1}{2}$ 公尺時，則梯子、地面及牆面構成一個 $45°$ 、 $45°$ 、 $90°$ 的直角三角形。試問梯長為多少公尺？

(A) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 。

(　　) 7. 已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為多項式，若以 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 所得餘式為 $3x-4$ ，以 $x-1$ 除 $g(x)$ 所得餘式為 5 ，則以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 所得餘式為何？

(A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 4 。

(　　) 8. 已知 $\frac{x^2+5x+6}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$，其中 A、B 與 C 為實數，則 $A+2B+3C=$

(A) -5 (B) 0 (C) 8 (D) 10 。

(　　) 9. 已知坐標平面上三直線 $L_1:3x+3y=2$ 、 $L_2:2x-3y=3$ 、 $L_3:x-ay=-2$ ，且這三直線將平面分成六個區域，則 a 不可以是下列哪一個值？

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) -1 (D) -9 。

(　　) 10. 某次啦啦隊競賽規定，每隊組隊人數 8 人且男、女生均至少 2 人。某班共有 4 名男生與 6 名女生想參加啦啦隊競賽，若由此 10 人中依規定選出 8 人組隊，則共有多少種組隊方式？

(A) 45 (B) 60 (C) 75 (D) 90 。

(　　) 11. 下列何選項的值為組合數C_3^8？

(A)「由8人中選3人分別擔任班長、副班長與康樂股長」所有的可能情形

(B)$(x-1)^8$展開式中，x^3項的係數

(C)「AAABBBBB 共8個字母任意排列」所有的可能情形

(D)「8枝相同的筆全部分給3人且每人至少得到1枝筆」所有的可能情形。

(　　) 12. 利用簡單隨機抽樣，從10位同學中選取2位同學參加比賽，若選中2位同學均為男生的機率小於$\dfrac{1}{10}$，則選中2位女生機率的最小值為何？

(A)$\dfrac{7}{15}$　(B)$\dfrac{8}{15}$　(C)$\dfrac{3}{5}$　(D)$\dfrac{2}{3}$。

(　　) 13. 已知$\{a_n\}$為等差數列且滿足$a_1>0$、$a_5=3a_{12}$。則當n為多少時，a_n開始為負數？

(A)14　(B)15　(C)16　(D)17。

(　　) 14. 已知$F(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^x (t^2+1)dt\right]$，則$F(1)=$

(A)-1　(B)0　(C)1　(D)2。

(　　) 15. 已知函數$f(x)$的導函數為$g(x)=x^2-4x+2$，則$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$

(A)-2　(B)-1　(C)1　(D)2。

(　　) 16. 若點$P(x,y)$為有向角θ終邊上一點且$xy\neq 0$，則下列何者正確？

(A)$x\sin\theta>0$　(B)$y\cos\theta>0$　(C)$x\cot\theta>0$　(D)$y\csc\theta>0$。

(　　) 17. 在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{\cos B+i\sin B}{(\cos A+i\sin A)(\cos C+i\sin C)}$為實數，其中$i=\sqrt{-1}$，則$\triangle ABC$必為何種三角形？

(A)等腰三角形　(B)銳角三角形　(C)直角三角形　(D)鈍角三角形。

(　　) 18. 下列為四個班級某次數學測驗的成績分組資料，若以各組的組中點取代該組資料的原始數據，則何者的成績標準差最小？

(A)

分數組別	30~40	40~50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	8	6	7	7	6	8

(B)

分數組別	30~40	40~50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	18	2	1	1	2	18

(C)

分數組別	30~40	40~50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	1	2	18	18	2	1

(D)

分數組別	30~40	40~50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	10	10	1	1	10	10

(　　) 19. 已知坐標平面上三直線 L 、 L_1 與 L_2 ，若直線 L 為水平線， L_1 與 L_2 的斜率分別為 $\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{3}{2}$ ，且直線 L 被 L_1 與 L_2 所截出的線段長為 26，則此三直線所圍成的三角形面積為多少平方單位？
(A) 39　(B) 52　(C) 78　(D) 156 。

(　　) 20. 已知 $\log_4\left(4^x-2^x+52\right)=x+1$ ，試問 $\log\left(x^2\cdot5^x\right)=$
(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5 。

(　　) 21. 計算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=$
(A) $\frac{3}{2}$　(B) 1　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{8}$ 。

(　　) 22. 已知點 F 及直線 L 分別為橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ 的焦點及短軸。若以直線 L 為準線及點 F 為焦點所作出拋物線的方程式為 $4c(x-h)=(y-k)^2$ ，則 $|chk|=$
(A) 12　(B) 8　(C) 6　(D) 4 。

(　　) 23. 已知 F_1 、 F_2 為橢圓 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 的焦點，且 F_3 、 F_4 為雙曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的焦點。若 P 點為上述橢圓與雙曲線之交點，則下列何者正確？
(A) $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=24$　(B) $\overline{PF_3}+\overline{PF_4}=26$　(C) $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=6$
(D) $\left|\overline{PF_3}-\overline{PF_4}\right|=6$ 。

(　　) 24. 已知 $O(0,0)$ 、 $P(-3,4)$ 與 $Q(x,y)$ 為坐標平面上三點。若以 O 為圓心， $\overline{OP}$ 為半徑，逆時針方向轉動 30° 後， P 點與 Q 點重疊，則下列何者正確？
(A) $x=\frac{-3\sqrt{3}-4}{2}$　(B) $x=\frac{-3\sqrt{3}+4}{2}$　(C) $y=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$　(D) $y=\frac{4\sqrt{3}+3}{2}$ 。

(　　) 25. 小明設計了一款迴力鏢，已知將此迴力鏢擲出後，迴力鏢過了時間 t 秒後與小明的距離為 $f(t)=\frac{100t}{t^2+9}$ 公尺，若在 t_0 秒時，迴力鏢離小明最遠，則 $t_0=$
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4 。

108 年統一入學測驗 數學(C)

答 案

1.B	2.C	3.B	4.B	5.D	6.C	7.D	8.A	9.B	10.A
11.C	12.A	13.C	14.D	15.B	16.D	17.C	18.C	19.D	20.A
21.A	22.D	23.B	24.A	25.C					

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 108 年 5 月 6 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

設兩非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，

(1) 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 垂直，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，

即 $a_1b_1+a_2b_2=0$

(2) 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行，則 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$，

其中 b_1、$b_2\neq 0$

解析

$\because$ $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 垂直

$\therefore$ $(1,1)\cdot(x+4,y-1)=0$

$\Rightarrow$ $1\times(x+4)+1\times(y-1)=0$

$\Rightarrow$ $x+y=-3$……①

$\because$ $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 平行

$\therefore$ $\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{y}$ $\Rightarrow$ $2x-y=0$……②

①+②：$3x=-3$ $\Rightarrow$ $x=-1$

$x=-1$ 代回①：$-1+y=-3$ $\Rightarrow$ $y=-2$

故選項(B)正確

2. 技巧與分析

(1) 設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，n 為實數，則 $n=\log_a a^n$

(2) 當 $0<a<1$ 時，$y=\log_a x$ 為遞減函數，

即 $0<x_1<x_2$ $\Leftrightarrow$ $\log_a x_1>\log_a x_2$

解析

$3<\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)<4$

$\Rightarrow$ $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3<\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

$\Rightarrow$ $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{8}<\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)<\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{16}$

$\because$ 底數 $\dfrac{1}{2}$ 在 $0\sim 1$ 之間

$\therefore$ 真數 $\dfrac{1}{16}<2x+1<\dfrac{1}{8}$

（即真數 >0）

整理得 $-\dfrac{15}{16}<2x<-\dfrac{7}{8}$

因此 $-\dfrac{15}{32}<x<-\dfrac{7}{16}$

3. 技巧與分析

(1) 直線 $ax+by+c=0$ 的斜率 $m=-\dfrac{a}{b}$，

其中 $b\neq 0$

(2) 直線的走向：

① 往右上斜的直線斜率為正

② 往右下斜的直線斜率為負

(3) 二元一次不等式的圖解：（當 $a>0$ 時）

① $ax+by+c\geq 0$ 的圖解為直線

$ax+by+c=0$ 及其右側

② $ax+by+c\leq 0$ 的圖解為直線

$ax+by+c=0$ 及其左側

解析

$\because$ 直線 $L_1:3x-5y=2$ 的斜率為

$m_1=-\dfrac{3}{-5}=\dfrac{3}{5}>0$

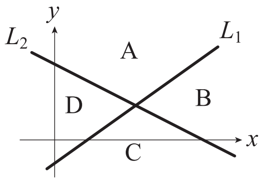
$\therefore$ L_1 是往右上斜的直線

$\because$ 直線 $L_2:x+2y=3$ 的斜率為

$m_2=-\dfrac{1}{2}<0$

$\therefore$ L_2 是往右下斜的直線

可得知直線 L_1 及 L_2 圖形如下所示



∵　區域 A 在直線 L_1 的左側

∴　$3x-5y\le 2$

∵　區域 A 在直線 L_2 的右側

∴　$x+2y\ge 3$

因此區域 A 可以表示成 $\begin{cases}3x-5y\le 2\\ x+2y\ge 3\end{cases}$

4. 技巧與分析

如果兩個聯立方程組有相同的解，則兩方程組的個別方程式組合起來也會有相同的解

解析

∵　$\begin{cases}3x-4y+z=4\\ 5x+2y-2z=3\end{cases}$ 與 $\begin{cases}2x+3y-2z=a\\ 4x+5y-3z=1\end{cases}$ 有相同解

∴　$\begin{cases}3x-4y+z=4\cdots\cdots①\\ 5x+2y-2z=3\cdots\cdots②\\ 4x+5y-3z=1\cdots\cdots③\end{cases}$ 也會有相同的解

①×2 ：$6x-8y+2z=8\cdots\cdots④$

②+④ ：$11x-6y=11\cdots\cdots⑤$

①×3 ：$9x-12y+3z=12\cdots\cdots⑥$

③+⑥ ：$13x-7y=13\cdots\cdots⑦$

⑤×7 ：$77x-42y=77\cdots\cdots⑧$

⑦×6 ：$78x-42y=78\cdots\cdots⑨$

⑨−⑧ ：$x=1$

$x=1$ 代回⑤：$11\times1-6y=11$ $\Rightarrow$ $y=0$

$x=1$，$y=0$ 代回①：$3\times1-4\times0+z=4$

$\Rightarrow$ $z=1$

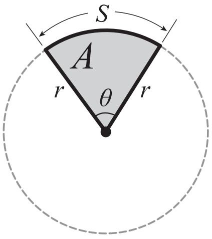
把 $x=1$，$y=0$，$z=1$ 代入 $2x+3y-2z=a$

則 $2\times1+3\times0-2\times1=a$ $\Rightarrow$ $a=0$

5. 技巧與分析

(1) 扇形：被兩條半徑和半徑所截的圓弧所圍成的圖形

(2) 設扇形的半徑為 r，圓心角為 θ（$0<\theta<2\pi$），則其弧長 $S=r\theta$，面積 $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rS$



解析

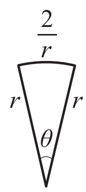
設扇形的半徑為 r，圓心角為 θ（弧度），弧長為 S

則扇形的面積 $A=\frac{1}{2}rS$

∵　扇形的面積為1

∴　$\frac{1}{2}\times r\times S=1$ $\Rightarrow$ $S=\frac{2}{r}$

又扇形的周長為5



得 $2r+\frac{2}{r}=5$

$\overset{\times r}{\Rightarrow}$ $2r^2+2=5r$

$\Rightarrow$ $2r^2-5r+2=0$

$\Rightarrow$ $(2r-1)(r-2)=0$

$\Rightarrow$ $r=\frac{1}{2}$ 或2

(1) 當半徑 $r=\frac{1}{2}$ 時，弧長 $S=\frac{2}{r}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

其圓心角 $\theta=\frac{S}{r}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8>2\pi\doteqdot 6.28$（不合）

(2) 當半徑 $r=2$ 時，弧長 $S=\frac{2}{r}=\frac{2}{2}=1$

其圓心角 $\theta=\frac{S}{r}=\frac{1}{2}$

由(1)和(2)知：扇形的半徑 $r=2$

6. 技巧與分析

(1) $30°-60°-90°$ 三角形的對邊比為

$1:\sqrt{3}:2$

(2) $45°-45°-90°$ 三角形的對邊比為

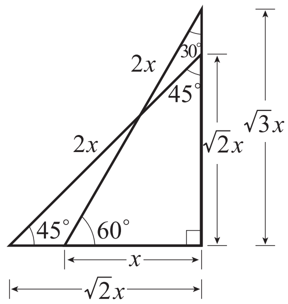
$1:1:\sqrt{2}=\sqrt{2}:\sqrt{2}:2$

解析

依據題意作圖

設梯子的長為 $2x$（公尺）

則兩個直角三角形的邊長如圖所示



$\because$ 梯子沿牆面下滑 $\frac{1}{2}$（公尺）

$\therefore$ $\sqrt{3}x-\sqrt{2}x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{1\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\left[\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right]}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$$

而 $2x=2\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

故梯長為 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$（公尺）

7. 技巧與分析

(1) 除法原理：

$f(x)\div g(x)=Q(x)\cdots r(x)$

則 $f(x)=g(x)\times Q(x)+r(x)$

(2) 餘式定理：

以 $x-a$ 除 $f(x)$ 的餘式為 $f(a)$

解析

設 $f(x)\div\left(x^2-3x+2\right)=Q(x)\cdots(3x-4)$

$\Rightarrow$ $f(x)=\left(x^2-3x+2\right)\times Q(x)+(3x-4)$

得 $f(1)=\left(1^2-3\times1+2\right)\times Q(1)+(3\times1-4)$

$=0\times Q(1)+(-1)=-1$

又 $x-1$ 除 $g(x)$ 所得餘式為 5 $\Rightarrow$ $g(1)=5$

故以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 的餘式為

$f(1)+g(1)=-1+5=4$

8. 技巧與分析

(1) 處理部分分式時，先消去分母

(2) 當兩多項式相等時，其相對應的次數與係數均相等

解析

$$\frac{x^2+5x+6}{(x-2)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

上式等號的兩側同乘以 $(x-2)\left(x^2+1\right)$，得

$$\begin{aligned}x^2+5x+6&=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(x-2)\\&=\left(Ax^2+A\right)+\left(Bx^2-2Bx+Cx-2C\right)\\&=(A+B)x^2+(-2B+C)x+(A-2C)\end{aligned}$$

則 $\begin{cases}A+B=1\cdots\cdots①\\-2B+C=5\cdots\cdots②\\A-2C=6\cdots\cdots③\end{cases}$

①−③：$B+2C=-5\cdots\cdots④$

④×2：$2B+4C=-10\cdots\cdots⑤$

②+⑤：$5C=-5$ $\Rightarrow$ $C=-1$

$C=-1$ 代回②：$-2B+(-1)=5$ $\Rightarrow$ $B=-3$

$C=-1$ 代回③：$A-2\times(-1)=6$ $\Rightarrow$ $A=4$

故得 $A+2B+3C=4+2\times(-3)+3\times(-1)=-5$

9. 技巧與分析

三條相異直線將平面分成六個區域有以下兩種情況：

(1) 三條直線共點

(2) 三條直線之中恰有兩條直線平行

解析

(1) 當三直線 L_1、L_2、L_3 通過同一點時，三直線可以把平面分成六個區域

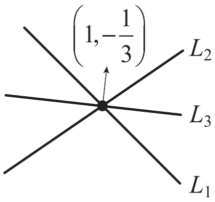
先求 L_1 與 L_2 的交點：

$$\text{解}\begin{cases}3x+3y=2\cdots\cdots①\\2x-3y=3\cdots\cdots②\end{cases}$$

①+②：$5x=5 \quad\Rightarrow\quad x=1$

$x=1$ 代回①：$3\times1+3y=2$

$\Rightarrow \quad y=-\dfrac{1}{3}$



將交點 $\left(1,-\dfrac{1}{3}\right)$ 代入 $L_3: x-ay=-2$

$1-a\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-2 \quad\Rightarrow\quad a=-9$

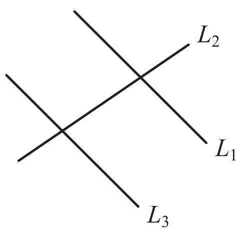
(2) 當三直線 L_1、L_2、L_3 之中恰有兩直線平行時，三直線可以把平面分成六個區域

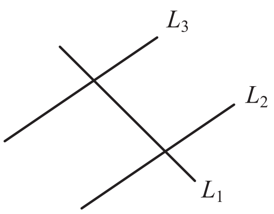
直線 L_1 的斜率 $m_1=-\dfrac{3}{3}=-1$

直線 L_2 的斜率 $m_2=-\dfrac{2}{-3}=\dfrac{2}{3}$

直線 L_3 的斜率 $m_3=-\dfrac{1}{-a}=\dfrac{1}{a}$

則 $\dfrac{1}{a}=-1$ 或 $\dfrac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad a=-1$ 或 $\dfrac{3}{2}$





由(1)和(2)知：$a=-9$、-1 或 $\dfrac{3}{2}$

因此 a 不可以是選項(B)

10. 技巧與分析

從 n 個相異物之中，取出 k 個，其方法數為

$C^n_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

解析

(1) 選 2 名男生與 6 名女生：

$C^4_2\times C^6_6=\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{6!}{6!0!}=6\times1=6$（種）

(2) 選 3 名男生與 5 名女生：

$C^4_3\times C^6_5=\dfrac{4!}{3!1!}\times\dfrac{6!}{5!1!}=4\times6=24$（種）

(3) 選 4 名男生與 4 名女生：

$C^4_4\times C^6_4=\dfrac{4!}{4!0!}\times\dfrac{6!}{4!2!}=1\times15=15$（種）

由(1)、(2)和(3)知：

男、女生均至少 2 人的方法有 $6+24+15=45$ 種

11. 技巧與分析

(1) 相異物的排列

(2) 二項式定理

(3) 有相同物的排列

(4) 重複組合

解析

(A) P^8_3

(B) $(x-1)^8=\left[x+(-1)\right]^8$

x^3 項：$C^8_3\times x^3\times(-1)^5=-C^8_3x^3$

則 x^3 項的係數為 $-C^8_3$

(C) 3 個 A、5 個 B 排成一列：$\dfrac{8!}{3!5!}=C^8_3$

(D)設三人各分得 x_1、x_2、x_3 枝筆

則 $x_1+x_2+x_3=8$

$\because$ 每人至少分得1枝

$\therefore$ 令 $x_1=x_1'+1$，$x_2=x_2'+1$，$x_3=x_3'+1$

得 $(x_1'+1)+(x_2'+1)+(x_3'+1)=8$

$\Rightarrow \quad x_1'+x_2'+x_3'=5$

所求為上式的非負整數解個數

$H^3_5=C^{3+5-1}_5=C^7_5$

故選項(C)的值為 C^8_3

12. 技巧與分析

(1) 事件 A 的機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$，

其中 S 為樣本空間

(2) $C_k^n=\dfrac{\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)}^{\text{從 } n \text{ 往下 } k \text{ 個正整數相乘}}}{k!}$

解析

設 10 位同學中有 n 位男生、$10-n$ 位女生

P(選中 2 位同學均為男生)

$$=\frac{C_2^n}{C_2^{10}}=\frac{\frac{n(n-1)}{2!}}{\frac{10\times9}{2!}}=\frac{n(n-1)}{90}$$

由題意知：$\dfrac{n(n-1)}{90}<\dfrac{1}{10}\quad\Rightarrow\quad n(n-1)<9$

$\because$ n 是非負整數，得 $n=3$、2、1 或 0

則女生可能有 7、8、9 或 10 位

而當女生的人數愈少時

選中 2 位女生的機率會最小

$\therefore$ 當 10 位同學中有 3 位男生和 7 位女生時

選中 2 位女生的機率有最小值為

$$\frac{C_2^7}{C_2^{10}}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$$

13. 技巧與分析

設 $\{a_n\}$ 為等差數列，則

(1) 公差 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$，其中 $n\neq m$

(2) $a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$

解析

設等差數列 $\{a_n\}$ 的公差為 d

則 $d=\dfrac{a_{12}-a_5}{12-5}=\dfrac{a_{12}-3a_{12}}{7}=-\dfrac{2}{7}a_{12}$

$\Rightarrow\quad a_{12}=-\dfrac{7}{2}d$

而 $a_{12}=a_1+(12-1)d=a_1+11d$

$\Rightarrow\quad a_1=a_{12}-11d=-\dfrac{7}{2}d-11d=-\dfrac{29}{2}d$

又 $a_1>0$，得 $d<0$

設第 n 項 $a_n<0$

則 $a_n=a_1+(n-1)d=-\dfrac{29}{2}d+(n-1)d<0$

$\Rightarrow\quad (n-1)d<\dfrac{29}{2}d$

$\underset{\text{且}d<0}{\overset{\div d}{\Rightarrow}}\quad n-1>\dfrac{29}{2}\quad\Rightarrow\quad n>\dfrac{31}{2}=15.5$

故當 $n=16$ 時，a_n 開始為負數

14. 〈法一〉

技巧與分析

微積分第一基本定理：

若函數 f 在 $[a,b]$ 上連續，

且 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，$x\in[a,b]$

則 $\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

解析

$F(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^x (t^2+1)\,dt\right]$

$\quad=x^2+1$（由微積分第一基本定理）

則 $F(1)=1^2+1=2$

〈法二〉

技巧與分析

微積分第二基本定理：

若函數 f 在 $[a,b]$ 上連續，且 F 為 f 的反導函數，則 $\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

解析

$\int_1^x (t^2+1)\,dt$

$=\left(\dfrac{1}{2+1}t^{2+1}+t\right)\Big|_1^x=\left(\dfrac{1}{3}t^3+t\right)\Big|_1^x$

$=\left(\dfrac{1}{3}x^3+x\right)-\left(\dfrac{1}{3}+1\right)=\dfrac{1}{3}x^3+x-\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^x (t^2+1)\,dt\right]=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3}x^3+x-\dfrac{4}{3}\right)=x^2+1$

故 $F(x)=x^2+1$，因此 $F(1)=1^2+1=2$

15. 技巧與分析

導數的定義：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

解析

$\because$ $f(x)$ 的導函數為 $g(x)=x^2-4x+2$

$\therefore$ $f'(x)=x^2-4x+2$

而 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

又 $f'(1)=1^2-4\times1+2=-1$

因此 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$

16. 技巧與分析

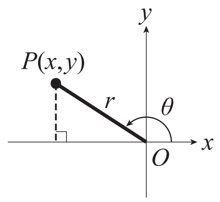
任意角三角函數的定義：

在標準位置角 θ 的終邊上，取異於原點 O 的點 $P(x,y)$，令 $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}>0$，則

$\sin\theta=\frac{y}{r}\leftrightarrow\csc\theta=\frac{r}{y}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}\leftrightarrow\sec\theta=\frac{r}{x}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}\leftrightarrow\cot\theta=\frac{x}{y}$



解析

為了方便討論，把有向角 θ 的頂點與直角坐標中的原點重合，始邊與 x 軸的正向重合

這樣形成標準位置角 θ

其終邊上有一點 $P(x,y)$

令 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，而 x 、 y 的正負未定，則

(A) $x\sin\theta=x\times\frac{y}{r}=\frac{xy}{r}$ ：無法判斷正負

(B) $y\cos\theta=y\times\frac{x}{r}=\frac{xy}{r}$ ：無法判斷正負

(C) $x\cot\theta=x\times\frac{x}{y}=\frac{x^2}{y}$ ：無法判斷正負

(D) $y\csc\theta=y\times\frac{r}{y}=r>0$

故選項(D)正確

17. 技巧與分析

極式的乘除：

設 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，

$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，

則

(1) $z_1\times z_2=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$

(2) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$

解析

$$\frac{\cos B+i\sin B}{(\cos A+i\sin A)(\cos C+i\sin C)}$$

$$=\frac{\cos B+i\sin B}{\cos(A+C)+i\sin(A+C)}$$

$$=\cos\left[B-(A+C)\right]+i\sin\left[B-(A+C)\right]$$

由於上式的值為實數

故其虛部 $\sin\left[B-(A+C)\right]=0$

而 $\sin0^\circ=0$，

則 $\angle B-(\angle A+\angle C)=0^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle B=\angle A+\angle C$

又三角形內角和 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

$\Rightarrow$ $(\angle A+\angle C)+\angle B=180^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle B+\angle B=180^\circ$

$\Rightarrow$ $2\angle B=180^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle B=90^\circ$

因此 $\triangle ABC$ 必為直角三角形

18. 技巧與分析

(1) 當數據愈集中時，標準差愈小

(2) 當數據愈分散時，標準差愈大

解析

(A)

分數 組別	30～40	40～50	50～60	60～70	70～80	80～90
人數	8	6	7	7	6	8

數據均勻散布

(B)

分數 組別	30～40	40～50	50～60	60～70	70～80	80～90
人數	18	2	1	1	2	18

數據極端

(C)

分數 組別	30～40	40～50	50～60	60～70	70～80	80～90
人數	1	2	18	18	2	1

數據集中

(D)

分數組別	30 ~ 40	40 ~ 50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90
人數	10	10	1	1	10	10

數據非常分散

四個班級的數據中，(C)的數據最集中，
故(C)的標準差最小

19. 技巧與分析

斜截式：
斜率為 m 且 y 截距為 k 的直線方程式為
$y=mx+k$

解析

設直線 L_1 與 L_2 交於原點 $O(0,0)$
即 y 截距為 0

則 $L_1: y=\frac{2}{3}x$ ，$L_2: y=-\frac{3}{2}x$

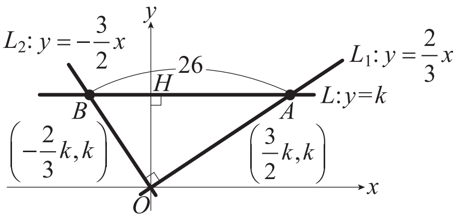
另外，設水平線 $L: y=k$（$k>0$）與直線 L_1、
L_2 交於點 $A\left(\frac{3}{2}k,k\right)$，$B\left(-\frac{2}{3}k,k\right)$

則 $\overline{AB}=\frac{3}{2}k-\left(-\frac{2}{3}k\right)=\frac{13}{6}k$

$\because$ 直線 L 被 L_1 與 L_2 所截出的線段長為 26

$\therefore$ $\frac{13}{6}k=26 \Rightarrow k=12$

因此三直線所圍成的三角形面積為
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times 26\times 12=156$（平方單位）



20. 技巧與分析

(1) 對數的定義：

$\log_a b=n \Leftrightarrow a^n=b$

(2) 當 $a>0$ 時，a^x 恆為正數

解析

$\log_4\left(4^x-2^x+52\right)=x+1$

$\Rightarrow 4^{x+1}=4^x-2^x+52$

$\Rightarrow 4\times 4^x=4^x-2^x+52$

$\Rightarrow 4\times 4^x-4^x+2^x-52=0$

$\Rightarrow (4-1)\times 4^x+2^x-52=0$

$\Rightarrow 3\times 4^x+2^x-52=0$

令 $t=2^x$，則 $t^2=\left(2^x\right)^2=\left(2^2\right)^x=4^x$

得 $3t^2+t-52=0$

$\Rightarrow (t-4)(3t+13)=0$

$\Rightarrow t=4$ 或 $-\frac{13}{3}$（不合，$\because$ $t=2^x>0$）

則 $t=4 \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow x=2$

因此 $\log\left(x^2\cdot 5^x\right)=\log\left(2^2\cdot 5^2\right)=\log 100=2$

21. 技巧與分析

(1) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) 設 $f(n)$ 與 $g(n)$ 均為 n 的多項式，且次數相等，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{f(n)\text{的領導係數}}{g(n)\text{的領導係數}}$

解析

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)$$

$$=n+\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)$$

$$=n+\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=n+\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=n+\frac{n+1}{2}=\frac{3n+1}{2}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{3n+1}{2}=\frac{3n+1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n}=\frac{3}{2}$$

（$\because$ 分子、分母的次數相等
$\therefore$ 極限為領導係數的比值）

22. 技巧與分析

(1) 已知橢圓 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

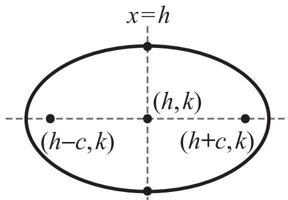
（$a>b>0$），

若 $a^2=b^2+c^2$，則

① 中心 (h,k)

② 焦點 $(h\pm c,k)$

③ 短軸在直線 $x=h$ 上



(2) 拋物線的標準式：

頂點在 (h,k)，且焦距為 $|c|$，

開口向右（左）的拋物線方程式為

$(y-k)^2=4c(x-h)$（其中 $c>0$ 時，開口向右；$c<0$ 時，開口向左）

解析

橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

$\Rightarrow\quad \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{(y-1)^2}{3^2}=1$

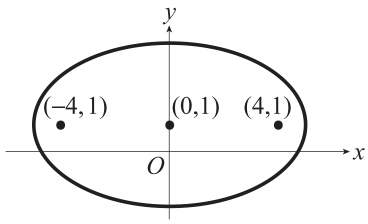
則中心 $(0,1)$，$a_{橢}=5$，$b_{橢}=3$

而 ${a_{橢}}^2={b_{橢}}^2+{c_{橢}}^2$

$\Rightarrow\quad 5^2=3^2+{c_{橢}}^2 \quad\Rightarrow\quad c_{橢}=4$

得橢圓的焦點為 $(4,1)$ 和 $(-4,1)$

短軸在直線 $x=0$ 上，即短軸在 y 軸



(1) 以 y 軸為準線，焦點 $(4,1)$ 的拋物線

其頂點為 $(2,1)$，開口向右，焦距為 2

拋物線的方程式為

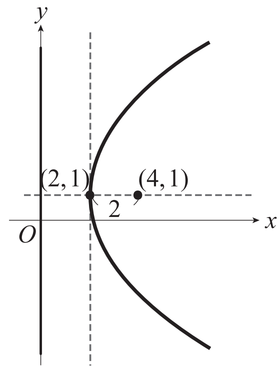
$(y-1)^2=4\times2\times(x-2)$

$\Rightarrow\quad 8(x-2)=(y-1)^2$

與 $4c(x-h)=(y-k)^2$ 比較，得

$c=2$，$h=2$，$k=1$

則 $|chk|=|2\times2\times1|=4$



(2) 以 y 軸為準線，焦點 $(-4,1)$ 的拋物線

其頂點為 $(-2,1)$，開口向左，焦距為 2

拋物線的方程式為

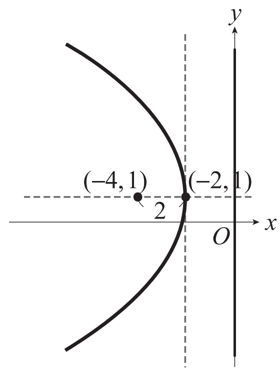
$(y-1)^2=-4\times2\times(x+2)$

$\Rightarrow\quad -8(x+2)=(y-1)^2$

與 $4c(x-h)=(y-k)^2$ 比較，得

$c=-2$，$h=-2$，$k=1$

則 $|chk|=|(-2)\times(-2)\times1|=4$



由(1)和(2)知：$|chk|=4$

23. 技巧與分析

(1) 若橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的焦點是 F_1、F_2，則橢圓上任一點 P 滿足

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

(2) 若雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦點是 F_1、F_2，則雙曲線上任一點 P 滿足

$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$

解析

(1) 橢圓 $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{13^2}+\dfrac{y^2}{12^2}=1$

$\Rightarrow \quad a_{橢}=13$，$b_{橢}=12$

而 $a_{橢}{}^2=b_{橢}{}^2+c_{橢}{}^2$

$\Rightarrow \quad 13^2=12^2+c_{橢}{}^2 \quad \Rightarrow \quad c_{橢}=5$

則橢圓的兩焦點為 $F_1(-5,0)$、$F_2(5,0)$

(2) 雙曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$

$\Rightarrow \quad a_{雙}=4$，$b_{雙}=3$

而 $c_{雙}{}^2=a_{雙}{}^2+b_{雙}{}^2$

$\Rightarrow \quad c_{雙}{}^2=4^2+3^2=25 \quad \Rightarrow \quad c_{雙}=5$

則雙曲線的兩焦點為 $F_3(-5,0)$、$F_4(5,0)$

由(1)和(2)知：橢圓和雙曲線有共同的焦點

此時 $F_1=F_3$，$F_2=F_4$

由於 P 點是橢圓與雙曲線的交點

因此

$\overline{PF_3}+\overline{PF_4}=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a_{橢}=2\times13=26$

$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=\left|\overline{PF_3}-\overline{PF_4}\right|=2a_{雙}=2\times4=8$

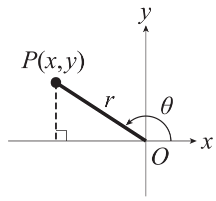
故選項(B)正確

24. 技巧與分析

(1) 任意角三角函數的定義：

在標準位置角 θ 的終邊上，取異於原點 O 的點 $P(x,y)$，令 $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$，則

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$



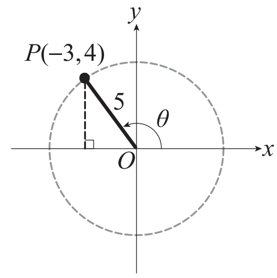
(2) 和差角公式：

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

解析

如下圖，$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$



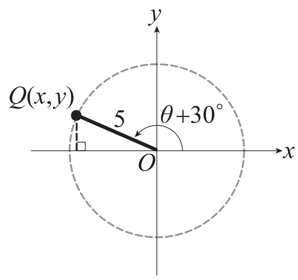
設標準位置角 θ 的終邊為 $\overline{OP}$

由任意角三角函數的定義可知：

$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{-3}{5}$

以 O 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑，逆時針方向轉動 $30°$ 後，P 點與 Q 點重疊

如下圖，$\overline{OQ}=5$



則 $\sin(\theta+30°)=\dfrac{y}{5}$，$\cos(\theta+30°)=\dfrac{x}{5}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad x&=5\cos(\theta+30°)\\&=5(\cos\theta\cos30°-\sin\theta\sin30°)\\&=5\left(-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\right)\\&=5\times\frac{-3\sqrt{3}-4}{10}=\frac{-3\sqrt{3}-4}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y&=5\sin(\theta+30°)\\&=5(\sin\theta\cos30°+\cos\theta\sin30°)\\&=5\left(\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{-3}{5}\right)\times\frac{1}{2}\right)\\&=5\times\frac{4\sqrt{3}-3}{10}=\frac{4\sqrt{3}-3}{2}\end{aligned}$$

故選項(A)正確

25. 技巧與分析

已知函數 $f(t)$，

(1) 若 $f(t)$ 在 $t=a$ 處有極值，則 $f'(a)=0$

(2)

t	$\cdots$	a	$\cdots$
$f(t)$	$\nearrow$	極大值 $f(a)$	$\searrow$
$f'(t)$	$+$	0	$-$

解析

已知 $f(t)=\dfrac{100t}{t^2+9}$，其中 $t\ge 0$

$$f'(t)=\frac{(100t)'\times(t^2+9)-(t^2\times 9)'\times 100t}{(t^2+9)^2}$$

$$=\frac{100(t^2+9)-2t\times 100t}{(t^2+9)^2}=\frac{-100t^2+900}{(t^2+9)^2}$$

$$=\frac{-100(t^2-9)}{(t^2+9)^2}=\frac{-100(t+3)(t-3)}{(t^2+9)^2}$$

(1) 令 $f'(t)=0$

$\Rightarrow\quad \dfrac{-100(t+3)(t-3)}{(t^2+9)^2}=0$

$\Rightarrow\quad (t+3)(t-3)=0$

$\Rightarrow\quad t=-3$ 或 3（$\because\ t\ge 0$，$\therefore\ -3$ 不合）

故 $t=3$

(2) 當 $0\le t<3$ 時，$f'(t)>0$

(3) 當 $t>3$ 時，$f'(t)<0$

將(1)、(2)、(3)列表如下：

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f(t)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$
$f'(t)$	$+$	$+$	0	$-$

因此，當 $t=3$ 時，$f(t)$ 有最大值

故 $t_0=3$