

108 指考最前線 - 數學乙

總	分

_____年 _____班 學號_____ 姓名_____

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 74 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

- () 1. 設 a 、 b 為循環小數， $a = 0.\overline{12}$ 、 $b = 0.\overline{01}$ 。則 $a - b$ 的值是下列哪一個選項？
- (1) 0.11 (2) 0.1111 (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{10}{99}$ (5) $\frac{100}{999}$ 。
- () 2. 坐標平面上，直線 $y = 2x$ 與直線 $y = -3x + 5$ 將坐標平面分割成四個區域。試問下列哪一個選項中的點會和點 $(1, 1)$ 在同一個區域？
- (1) $(20, -56)$ (2) $(13, -33)$ (3) $(-1, 1)$ (4) $(-15, -29)$ (5) $(-20, -29)$ 。
- () 3. 若向量 $\vec{A} = (a_1, a_2)$ ，向量 $\vec{B} = (b_1, b_2)$ ，且內積 $\vec{A} \cdot \vec{B} = 1$ ，則矩陣乘積 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ 等於下列哪一個選項？
- (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。

二、多選題（占 32 分）

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

- () 4. 已知正整數 a 與正整數 b 的乘積是 11 位數，而 a 除以 b 的商之整數部分是 2 位數，則 a 可能為幾位數？
- (1) 5 位數 (2) 6 位數 (3) 7 位數 (4) 8 位數 (5) 9 位數。

()5. 考慮如下的九宮格：

1	2	3
4	5	6
7	8	9

編號 1、3、7、9 的四格稱為「角」，編號 2、4、6、8 的四格稱為「邊」，而編號 5 的格子稱為「中心」。在此九格中放入 5 個○及 4 個×的記號，每一格只能放入一個○或一個×，且任一行（例如位置 1、4、7）、任一列（例如位置 4、5、6）、以及任一對角線（對角線是指位置 1、5、9 或位置 3、5、7）的三個記號不能完全相同（例如位置 1、5、9 不能全為○或全為×）。試選出正確的選項。

- (1) 若在中心放○，則可能有三個○放在邊上
- (2) 若在中心放○，則一定恰有兩個○放在角上
- (3) 若在中心放×，則一定恰有兩個×放在角上
- (4) 中心放○的方法共有 8 種
- (5) 中心放×的方法共有 4 種。

()6. 某商店出售 10 種不同款式的公仔。今甲、乙、丙三人都各自收集公仔。試選出正確的選項。

- (1) 若甲、乙兩人各自收集 6 款公仔，則他們兩人合起來一定會收集到這 10 款不同的公仔
- (2) 若甲、乙兩人各自收集 7 款公仔，則至少有 4 款公仔是兩人都擁有
- (3) 若甲、乙、丙三人各自收集 6 款公仔，則至少有 1 款公仔是三人都擁有
- (4) 若甲、乙、丙三人各自收集 7 款公仔，則至少有 2 款公仔是三人都擁有
- (5) 若甲、乙、丙三人各自收集 8 款公仔，則至少有 4 款公仔是三人都擁有。

()7. 某甲上班可採全程步行或全程騎腳踏車兩種方式通勤，其中步行的通勤時間為 60 分鐘，騎腳踏車的通勤時間以整數計時為 T 分鐘。其中 $30 \leq T \leq 40$ ，且 T 分為五個區間，其出現在各區間的機率如下表：

通勤時間	$30 \leq T < 32$	$32 \leq T < 34$	$34 \leq T < 36$	$36 \leq T < 38$	$38 \leq T \leq 40$
機率	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

例如：騎腳踏車通勤時間 T 滿足區間 $32 \leq T < 34$ 的機率為 0.2。假設甲每天通勤時間互相獨立。根據上述資料，試選出正確選項。

- (1) 若甲某一天騎腳踏車上班，則其通勤時間少於 35 分鐘的機率是 0.5
- (2) 若甲某五天皆騎腳踏車上班，則這五天上班的通勤總時間一定會少於四天騎腳踏車另一天步行的通勤總時間
- (3) 若甲某五天上班的通勤總時間為 250 分鐘，則這五天中甲一定是三天步行，兩天騎腳踏車
- (4) 若甲每天投擲一公正銅板來決定步行或騎腳踏車上班，正面則步行，反面則騎腳踏車，則甲兩天的通勤總時間至少 90 分鐘的機率是 0.75
- (5) 若甲有兩天皆騎腳踏車上班，則甲這兩天的通勤總時間至少為 76 分鐘的機率是 0.01。

三、選填題（占 24 分）

說明：1. 第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8-15）。

2. 每題完全答對給 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 從三位數中任選一數，寫成 $a \times 10^2 + b \times 10 + c$ ，其中 a 是 1 到 9 的整數， b 和 c 都是 0 到 9 的整數，則 $a + b + c = 9$ 的機率為 $\frac{\textcircled{8}}{\textcircled{9} \textcircled{10}}$ 。（請化為最簡分數）
- B. 已知實係數多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 + 2$ 的餘式為 $x + 1$ 。若 $xf(x)$ 除以 $x^2 + 2$ 的餘式為 $ax + b$ ，則數對 $(a, b) = (\textcircled{11}, \textcircled{12} \textcircled{13})$ 。
- C. 某遊戲的規則為同時擲兩顆公正骰子一次，若兩顆點數和為 6 或者至少有一顆點數為 6，即可獲得獎金 36 元，否則沒有獎金，則這個遊戲獎金的期望值為 $\textcircled{14} \textcircled{15}$ 元。

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一、考慮坐標平面上相異五點 O 、 A 、 B 、 C 、 D 。已知向量 $\vec{OC} = 3\vec{OA}$ ， $\vec{OD} = 3\vec{OB}$ ，且向量 \vec{AB} 的坐標表示為 $\vec{AB} = (3, -4)$ ，試回答下列問題。

(1) 試以坐標表示向量 \vec{DC} 。（5 分）

(2) 若 $\vec{OA} = (1, 2)$ ，試利用二階行列式與面積的關係，求 $\triangle OCD$ 的面積。（8 分）

二、某運輸公司欲向一汽機車製造商訂購一批重型機車（簡稱重機）和汽車。其訂購費用為重機一部 25 萬元及汽車一部 60 萬元，訂購經費上限是 5400 萬元。另此運輸公司共有 100 格停車位，每格停車位恰可停放兩部重機或是停放一部汽車。而此運輸公司每銷售 1 部重機可得淨利潤 2.3 萬元（即 2 萬 3 千元），銷售 1 部汽車則可得淨利潤 5 萬元，並假設此運輸公司可將其所訂購之重機及汽車全數銷售完畢。此運輸公司希望能在訂購經費的上限和停車位之限制下獲得最大的淨利潤。試回答下列問題。

(1) 試寫出此問題之線性規劃不等式及目標函數。（4 分）

(2) 在坐標平面上畫出可行解區域，並以舖色標示該區域。（3 分）

(3) 此運輸公司應訂購重機、汽車各多少部才能獲得最大的淨利潤？此最大淨利潤為何？（6 分）

試題大剖析

桃園高中／陳清風

答案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3) 2. (1) 3. (3)

二、多選題

4. (2)(3) 5. (2)(4) 6. (2)(5) 7. (3)(4)

三、選填題

A. $\frac{1}{20}$ B. (1,-2) C. 16

第貳部分：非選擇題

一、(1)(-9,12) (2)45

二、(1) $\begin{cases} 5x+12y \leq 1080 \\ x+2y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x, y \text{ 為整數} \end{cases}$, 目標函數為 $2.3x+5y$ (2)見詳解

(3)重機 120 部, 汽車 40 部, 最大利潤為 476 萬元

解析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 出處：選修數乙(下) 第一章 極限與函數

難易度：易

解：利用無窮等比級數和的公式，將 a, b 化為分數，得

$$a = 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \dots = \frac{0.12}{1-0.01} = \frac{12}{99},$$

$$b = 0.01 + 0.0001 + 0.000001 + \dots = \frac{0.01}{1-0.01} = \frac{1}{99},$$

$$\text{再得 } a - b = \frac{12}{99} - \frac{1}{99} = \frac{1}{9}.$$

故選(3)。

2. 出處：第三冊 第二章 直線與圓

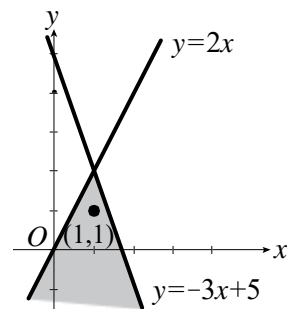
難易度：易

解：由右圖得知，點(1,1)所在的區域為聯立不等式

$$\begin{cases} y < -3x + 5 \\ y < 2x \end{cases}$$

的解。而且選項中的 5 個點只有點(20, -56) 滿足此聯立不等式。

故選(1)。



3. 出處：第四冊 第三章 矩陣

難易度：易

解：因為 $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 = 1$ ，所以

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

故選(3)。

二、多選題

4. 出處：第一冊 第三章 指數、對數函數

難易度：中

解：依題意，由首數與尾數的性質，可設

$$\log ab = \log a + \log b = 10 + \alpha,$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b = 1 + \beta,$$

其中 $0 \leq \alpha < 1$ ， $0 \leq \beta < 1$ 。將兩式相加，再除以 2，得

$$\log a = \frac{11 + \alpha + \beta}{2}.$$

因為 $11 \leq 11 + \alpha + \beta < 13$ ，所以

$$5.5 \leq \log a < 6.5.$$

得 $\log a$ 的首數為 5 或 6，即 a 為 6 位數或 7 位數。

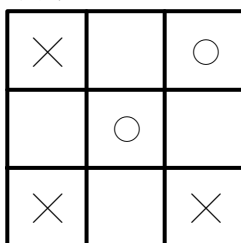
故選(2)(3)。

5. 出處：第二冊 第二章 排列、組合

難易度：中

解：(1) 因為中心放○，若三個○放在邊上，則必有一行或一列是三個○，所以不可能有三個○放在邊上。

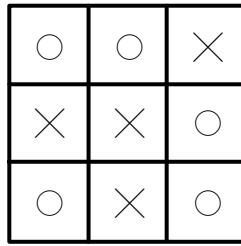
(2) 若中心放○，則角放 4 個○、3 個○或 0 個○顯然都不符合規則。而角放 1 個○時，角必然放 3 個×。例如下圖是其中一種情形。



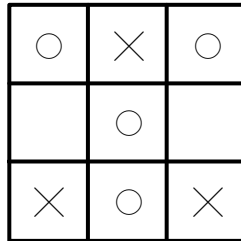
但還有 3 個○要放在邊上，由(1)得知，不可能符合規則。

因此，由窮舉法得知，恰有 2 個○放在角上。

(3) 錯，例如，下圖是 1 個×放在角上。



(4) 由(2)得知，恰有 2 個○與 2 個×放在角上，且邊上必隨著填入一個○及一個×。例如下圖是其中一種情形。

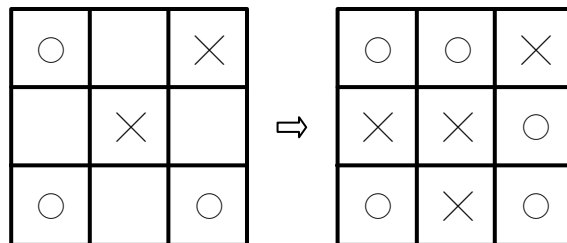


依照規則，還有一個○及一個×可任意填入左右兩空格中，有 $2! = 2$ 種填法。

綜合以上討論，因為 2 個○放在角上，有 4 種情形，所以由乘法原理，得方法共有 $4 \times 2 = 8$ 種。

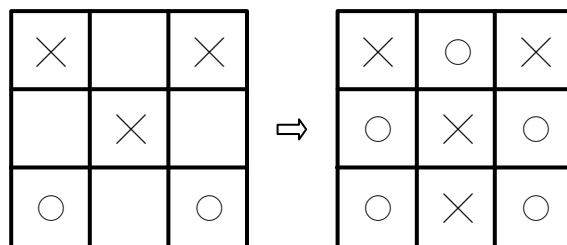
(5) 若中心放×，則顯然角放 3 個×與 0 個×都不符合規則。底下，分角放 1 個×或 2 個×討論：

①角放 1 個×：此時角也必然放 3 個○。例如，左下圖是其中一種情形，而且依照規則，2 個○必填入邊的上、右兩格，而 2 個×填入邊的左、下兩格，如下右圖所示。



綜合以上討論，因為 1 個×放在角上有 4 種放法，所以方法共有 4 種。

②角放 2 個×：此時角也必然放 2 個○。如下圖，仿照①的討論，可得方法共有 4 種。



綜合①②，若中心放×，則方法共有 $4 + 4 = 8$ 種。

故選(2)(4)。

6. 出處：第二冊 第二章 排列、組合

難易度：中

解：將 10 款公仔編號為 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10。

- (1) 錯，例如，甲、乙都選 1,2,3,4,5,6 .
 (2) 兩人至少會有 $7+7-10=4$ 款重疊 .
 (3) 錯，例如，

①②③④, 5, 6, 7, 8, ⑨, ⑩

其中黑底線為甲收集，虛底線為乙收集，圈起來的是丙收集 .
 此時，沒有 1 款公仔是三人共同擁有 .

- (4) 錯，例如，

①②③④, 5, 6, 7, ⑧, ⑨, ⑩

其中黑底線為甲收集，虛底線為乙收集，圈起來的是丙收集 .
 此時，只有 4 號公仔是三人共同擁有 .

- (5) 對，如圖：

①②③④⑤⑥, 7, 8, ⑨, ⑩

其中黑底線為甲收集，虛底線為乙收集，圈起來的是丙收集 .
 因為甲、乙至少重疊 $8+8-10=6$ 款，所以當丙選二人不重疊的 1,2,9,10 後，還須從二人重疊的 6 款中再選 4 款 . 故至少有 4 款是三人共同擁有 .

故選(2)(5) .

7. 出處：第二冊 第三章 機率

難易度：中

解：(1) 無法由題意得知，騎車通勤時間少於 35 分鐘的機率 .

- (2) 錯，例如，

五天車，每天 40 分鐘，共 $40 \times 5 = 200$ 分鐘 .

四天車，每天 30 分鐘，加上一天步，共 $30 \times 4 + 60 = 180$ 分鐘 .

- (3) 討論如下：

五天都步，共 $60 \times 5 = 300$ 分鐘 .

四天步、一天車，至少 $60 \times 4 + 30 = 270$ 分鐘 .

三天步、二天車，可能是 $60 \times 3 + 35 \times 2 = 250$ 分鐘 .

二天步、三天車，至多 $60 \times 2 + 40 \times 3 = 240$ 分鐘 .

一天步、四天車，至多 $60 + 40 \times 4 = 220$ 分鐘 .

五天都車，至多 $40 \times 5 = 200$ 分鐘 .

綜合以上得知，一定是三天步行、二天騎車 .

- (4) 依兩次銅板的正反面情形，討論如下：

二正面時，二天都步，共 $60 \times 2 = 120$ 分鐘，大於 90 分鐘 .

一正面一反面時，一天步、一天車，至少 $60 + 30 = 90$ 分鐘 .

二反面時，二天都車，至多 $40 \times 2 = 80$ 分鐘，必小於 90 分鐘 .

故至少 90 分鐘的機率等於擲出二正面或一正面一反面的機率 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0.75$.

- (5) 因為二天車至少 76 分鐘，除了二天都是 $38 \leq T \leq 40$ 的機率 $0.1 \times 0.1 = 0.01$ 外，還可能發生在一天 $38 \leq T \leq 40$ 、一天 $36 \leq T < 38$ 的情形，所以此選項不正確 .

故選(3)(4) .

三、選填題

A. 出處：第二冊 第二章 排列、組合

難易度：易

解：由題意得知， a 為百位數， b 為十位數， c 為個位數。

因為 $a=1\sim 9$ ， $b=0\sim 9$ ， $c=0\sim 9$ ，所以三位數共有

$$9 \times 10 \times 10 = 900 \text{ 個。}$$

討論滿足 $a+b+c=9$ 的個數：

當 $a=1$ 時， $(b,c)=(0,8),(1,7),\dots,(8,0)$ ，共 9 個。

當 $a=2$ 時， $(b,c)=(0,7),(1,6),\dots,(7,0)$ ，共 8 個。

當 $a=3$ 時， $(b,c)=(0,6),(1,5),\dots,(6,0)$ ，共 7 個。

⋮

當 $a=9$ 時， $(b,c)=(0,0)$ ，共 1 個。

因此，滿足 $a+b+c=9$ 的個數共 $9+8+7+\dots+1=45$ 個。

故 $a+b+c=9$ 的機率為 $\frac{45}{900} = \frac{1}{20}$ 。

B. 出處：第一冊 第二章 多項式函數

難易度：中

解：設 $f(x)=(x^2+2)q(x)+(x+1)$ ，其中 $q(x)$ 為商式。因為

$$\begin{aligned} xf(x) &= x((x^2+2)q(x)+(x+1)) \\ &= x(x^2+2)q(x)+(x^2+x) \\ &= x(x^2+2)q(x)+(x^2+2)+(x-2) \\ &= (x^2+2)(xq(x)+1)+(x-2), \end{aligned}$$

所以 $xf(x)$ 除以 x^2+2 的餘式為 $x-2$ 。

故 $(a,b)=(1,-2)$ 。

C. 出處：選修數學乙(上) 第一章 機率與統計

難易度：易

解：因為

點數和為 6 有 $(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$ ，共 5 種。

至少一顆 6 點等於「全部」減去「均非 6 點」，共 $6^2 - 5^2 = 11$ 種。

所以獲得獎金 36 元的機率為 $\frac{5+11}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ 。

又沒有獎金的機率為 $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ 。

故獎金的期望值為 $36 \times \frac{4}{9} + 0 \times \frac{5}{9} = 16$ 元。

第貳部分：非選擇題

一、出處：第三冊 第三章 平面向量

難易度：中

解：(1) 依題意，作圖如右。

因為 $\triangle OAB$ 與 $\triangle OCD$ 相似，所以

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{1}{3}。$$

又 \overrightarrow{DC} 與 \overrightarrow{AB} 方向相反，

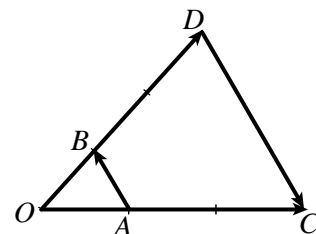
$$\text{故 } \overrightarrow{DC} = -3\overrightarrow{AB} = -3(3, -4) = (-9, 12)。$$

(2) 因為

$$\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} = 3(1, 2) = (3, 6)，$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = (3, 6) + (9, -12) = (12, -6)，$$

所以 $\triangle OCD$ 的面積為 $\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-18 - 72| = 45$ 平方單位。



二、出處：第三冊 第二章 直線與圓

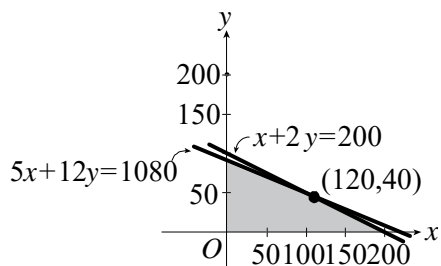
難易度：中

解：(1) 設重機 x 部，汽車 y 部。依題意，得不等式

$$\begin{cases} 25x + 60y \leq 5400 \\ \frac{1}{2}x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x, y \text{ 為整數} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 12y \leq 1080 \\ x + 2y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x, y \text{ 為整數} \end{cases},$$

目標函數為 $2.3x + 5y$ 。

(2) 可行解區域，如下圖：



(3) 利用頂點法：

(x, y)	$(0, 0)$	$(200, 0)$	$(120, 40)$	$(0, 90)$
$2.3x + 5y$	0	460	476	450

當 $x = 120$ ， $y = 40$ 時， $2.3x + 5y$ 有最大值 476。

故重機訂購 120 部，汽車訂購 40 部，獲利最大，最大利潤為 476 萬元。