

# 數學科

陳清風 / 桃園高中



## 考情最前線

龍騰網站

可下載檔案



### 戰地記者龍騰報導

近幾年來，學測儼然成為升上大學的主要管道，今年試題是採用 99 課綱的第六年，整體而言，今年的試題難度適中，題目靈活，文字閱讀量及計算量適中，出現好幾題不錯的題目（如第 1、3、5、C、D、G 題），是一份有鑑別度的試題。這也意味著數學將是決定今年總級分高低的關鍵科目。

發行人：李枝昌  
發行所：龍騰文化事業股份有限公司  
網址：<http://www.lungteng.com.tw>

電話：02-22982933  
傳真：02-22989766  
出刊日：107 年 2 月 2 日

→ 命中率分析 2

→ 大考風向球 4

→ 試題大剖析 8



## 107 學測命題特色

### 前言

受少子化現象影響，學測報考人數也逐年漸減，但今年適逢龍年報考，反而比前一年增加近 8000 人（約有 13 萬 6465 人），也讓今年大學入學競爭更形激烈。

甄選入學已成升大學主流，今年「繁星推薦入學」共有 68 所大學、1807 校系參加，提供 1 萬 6993 個招生名額。而「個人申請入學」則有 70 所大學、2038 個學系參加，提供 5 萬 6060 個招生名額。兩個管道總計招生名額超過 7 萬個，寫下歷年新高，使得這份學測試題受到多方的關注。

99 課綱將數學課程的內容簡化，102 年首次採用此課綱命題，一般預測考題會比往年簡單，但卻是出乎大家意料之外的難；103 年第二次採用，將難易度調回來了，是一份難易適中的試題；104 年第三次採用，又是意外的難；105 年第四次採用，再調回難易適中；106 年第五次採用，果然再擺盪回難的一方；今年（107 年）第六次採用，真的又再擺盪回難易適中。

現就個人見解，針對今年的試題提出以下幾點分析與建議。

### 歷年題型分配

今年試題的題型沒有改變，仍然包含單選題、多選題及選填題三大題，各大題的題數略有更動，但總題數（20 題）及配分（每題 5 分）則維持不變。

年度 \ 題型	單選題	多選題	選填題	總題數
102 年	6	6	8	20
103 年	6	6	8	20
104 年	4	6	10	20
105 年	6	7	7	20
106 年	7	6	7	20
107 年	7	5	8	20

## 107 學測試題分布

今年試題的分布如下表（單元名稱的劃分是依據 99 課綱）：

冊	章	單元名稱	題號	配分	小計
一	1	數與式	C	5	25
	2	多項式函數	9, E'	7.5	
	3	指數、對數函數	2', 4, A	12.5	
二	1	數列與級數	5'	2.5	20
	2	排列、組合	無	0	
	3	機率	2', 3	7.5	
	4	數據分析	6, 8	10	
三	1	三角	10', 5', B, G'	12.5	30
	2	直線與圓	D	5	
	3	平面向量	7, 10', E', G'	12.5	
四	1	空間向量	1, H	10	25
	2	空間中的平面與直線	11	5	
	3	矩陣	F	5	
	4	二次曲線	12	5	

【註】表中有上標的題號，算半題 2.5 分。

觀察上表後，有以下看法：

1. 若以冊來分類，今年配分偏重第三冊。
2. 第三冊出題偏多，有 9 個題目會用到第三冊的內容。
3. 第二冊排列、組合雖然沒配到分，但其實在第 3 題的解題過程中，是需要用到它的。
4. 解題所用到的概念涵蓋每一章，這應是歷年學測的命題原則。

### 試題評析

底下針對今年數學考題作評析：

1. 第 1 題：不須計算，只考空間概念，這個難度很適合放第 1 題。
2. 第 2 題：機率結合對數出題，很新穎。
3. 第 3 題：「兩人在同一天休假」有點口語，會不會有考生誤以為是「恰有一天同時休假」？若有，則算出的答案為第 4 選項的  $\frac{10}{21}$ ，也許是故意設計的陷阱吧？改成「兩人至少有一天同時休假」，較明確。
4. 第 4 題：典型的對數題。
5. 第 5 題：三角的和角公式結合等差數列出題，有鑑別度的一題。

大考風向球

6. 第 6 題：將簡易的比例問題賦予情境，是不錯的素養題。
7. 第 7 題：解「三向量和為零向量」的題目，雖有一些技巧，但還算常見，放在單選最後一題，很合理。
8. 第 8 題：學測常會出現不需用到高中數學就可解出的素養題，此題就是。讀懂題目，看懂表格，便可解出。
9. 第 9 題：了解多項式的除法定理，及會使用長除法就能解出。
10. 第 10 題：只要會向量的基本拆解技巧，及三角比定義，便可解出。
11. 第 11 題：是空間中的平面方程式與直線方程式常見的考題，尤其第 4 選項的陷阱，認真的同學應當遇到，不至於再掉進一次陷阱吧？
12. 第 12 題：考二次曲線的標準式，符合課綱。
13. 第 A 題：用「三點在同一直線上」，而沒使用「三點共線」這個詞，可見出題者的細心。
14. 第 B 題：簡單的三角測量問題，但正弦值給 0.6 不是給  $\frac{3}{5}$ ，可能會困擾到一些人吧？
15. 第 C 題：這是一題多解的題目。用邊長設變數，可用算幾不等式解出；用角度設變數，可用三角比解出。
16. 第 D 題：二元一次不等式的圖形結合二平行直線的距離公式，是不錯的設計。
17. 第 E 題：求二次函數圖形的頂點坐標，及圖形與 x 軸的交點坐標是教學的重點，樂見這種考題。
18. 第 F 題：只要會矩陣乘法的規則，加上耐心的列出聯立方程式，就可解出。
19. 第 G 題：向量的線性組合是近年大考的常考題，這次果然又出現了，可是結合正弦定理有些難度。但考生若使用量角器較精確的畫出圖形，再搭配選填題答案的格式，很有可能就猜對了！
20. 第 H 題：放在試卷的最後一題應是命題者認為最難的一題，可是此題難度雖夠，但卻是學校段考或模擬考常見的題目，有點可惜。
21. 有「概念題」：今年的第 1 題就是那種「筆在手中轉轉就可答對的題目」。
22. 數據美化：數據的設計可看出命題者的用心。
23. 選項細膩：答案與選項相同的設計可避免考生誤答，如單選第 4,5 題。
24. 圖形的題目較往年多，尤其是關於角度的題目。
25. 計算量適當，符合學測精神。
26. 跨章節的題目夠多。

## 結語

整體而言，題目靈活，文字閱讀量及計算量適中，只要掌握基本觀念就能作答，難度適中，出現好幾題不錯的題目（如第 1、3、5、C、D、G 題），是一份有鑑別度的試題。這也意味著數學將是決定今年總級分高低的關鍵科目。

## 未來命題趨勢

大考中心所列數學考科的測驗目標，為評量考生是否具備「概念性」、「程序性」及「解題能力」等三方面的知識與能力。學測應以評量前二項為主，較偏向概念性知識與程序性知識。往年這三方面知能的試題各約占三分之一，今年應符合這個組題原則。相信大考中心會審慎檢視這份試卷，讓來年的試題都符合學測評量的目標。

在 99 課綱的框架內，對未來學測的命題趨勢有以下幾點看法：

1. 基本概念：著重基本概念的靈活應用，一直是學測命題的中心想法，加強基本概念的練習是必做的基本功夫。
2. 素養題：生活化的試題年年都有，也必然是將來的命題趨勢。因為這類試題的敘述往往會比一般的題目長，所以應培養仔細閱讀题目的耐性，及加強將問題與教材連結的能力。
3. 熱門單元：有幾個預期會考的單元沒出現，反而可能會成為明年的大熱門，值得注意。例如：拉格朗日插值法、迴歸直線、轉移矩陣、標準差等。
4. 三星以下的單元：指考對標示三星以下的單元是不直接命題的，這些單元往往會出在學測，例如：二次曲線（一星），數列與級數（二星），數與式（二星）等。
5. 跨章節題：學測從 14 個單元中命 20 題，必然會有幾題涵蓋兩個單元以上，也藉此提高試題的鑑別度。因此，加強單元與單元之間的連結能力，多練習跨章節的題目，才能在眾多考生中勝出。

以上提出個人淺見供大家參考，尚祈前輩先進們不吝賜教。



## 第壹部分：選擇題 (占 60 分)

### 一、單選題 (占 35 分)

(此份試卷解題係依據大學考試中心於 107 年 1 月 27 日所公告之答案為主)

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

#### 1 空間概念

給定相異兩點  $A$ 、 $B$ ，試問空間中能使  $\triangle PAB$  成一正三角形的所有點  $P$  所成集合為下列哪一項？

(1)兩個點 (2)一線段 (3)一直線 (4)一圓 (5)一平面。

出處：龍騰版《數學 3》第 1 章 空間向量

《稱霸數學 (1~4 冊) 學測總複習講義》第 11 單元 空間向量

解題觀念：圓的定義、空間概念。

答案：(4)

解析：如右圖，設  $\overline{AB} = a$ ， $M$  為  $\overline{AB}$  的中點。

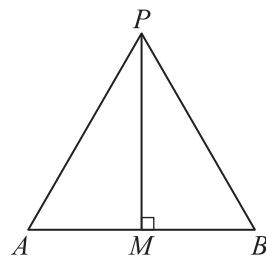
因為  $\triangle PAB$  為正三角形，所以

$\overline{PM} \perp \overline{AB}$ ，且  $\overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  (定值)。

因此，以  $\overline{AB}$  為軸、 $M$  點為旋轉中心繞一圈，

所得的圓形就是所有  $P$  點構成的圖形。

故選(4)。





## 2 機率與對數

一份試卷共有10題單選題，每題有5個選項，其中只有一個選項是正確答案。假設小明以隨機猜答的方式回答此試卷，且各題猜答方式互不影響。試估計小明全部答對的機率最接近下列哪一選項？

- (1) $10^{-5}$  (2) $10^{-6}$  (3) $10^{-7}$  (4) $10^{-8}$  (5) $10^{-9}$  .

**出處：**龍騰版《數學1》第3章 指數、對數函數

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第3單元 指數、對數函數

**解題觀念：**對數的定義、指數律。

**答案：**(3)

**解析：**因為答對一題的機率為 $\frac{1}{5}$ ，所以答對10題的機率為 $\left(\frac{1}{5}\right)^{10} = 5^{-10}$  .

又因為 $\log 5 \approx 0.6990$ ，即 $5 \approx 10^{0.6990}$ ，所以

$$5^{-10} \approx \left(10^{0.6990}\right)^{-10} = 10^{-6.990} .$$

因此， $5^{-10}$ 較接近 $10^{-7}$  .

故選(3) .

## 3 機率的定義

某公司規定員工可在一星期（七天）當中選擇兩天休假。若甲、乙兩人隨機選擇休假日且兩人的選擇互不相關，試問一星期當中發生兩人在同一天休假的機率為何？

- (1) $\frac{1}{3}$  (2) $\frac{8}{21}$  (3) $\frac{3}{7}$  (4) $\frac{10}{21}$  (5) $\frac{11}{21}$  .

**出處：**龍騰版《數學2》第3章 機率

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第6單元 機率

**解題觀念：**機率的定義。

**答案：**(5)

**解析：**樣本空間的個數為 $C_2^7 \times C_2^7 = 441$  .

（正面解）

兩人在同一天休假可分成(恰一天相同)與(二天皆相同)兩種情形。

根據機率的定義，得機率為

試題大剖析

$$\frac{C_1^7 \times C_1^6 \times C_1^5 + C_2^7}{441} = \frac{210 + 21}{441} = \frac{11}{21} .$$

(反面解)

因為兩人的二天休假皆不同天的機率為

$$\frac{C_2^7 \times C_2^5}{441} = \frac{210}{441} = \frac{10}{21} .$$

所以兩人在同一天休假的機率為  $1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$  .

故選(5) .

#### 4 指數與對數

試問有多少個整數  $x$  滿足  $10^9 < 2^x < 9^{10}$  ?

(1)1個 (2)2個 (3)3個 (4)4個 (5)0個 .

出處：龍騰版《數學1》第3章 指數、對數函數

《稱霸數學(1~4冊)學測總複習講義》第3單元 指數、對數函數

解題觀念：對數不等式、常用對數的值 .

答案：(2)

解析：因為  $10^9 < 2^x < 9^{10}$ ，所以  $\log 10^9 < \log 2^x < \log 9^{10}$  . 因此

$$9 < x \log 2 < 10 \log 9 \Rightarrow \frac{9}{\log 2} < x < \frac{10 \log 9}{\log 2} .$$

將  $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 9 = 2 \log 3 \approx 0.9542$  代入上式，得

$$29.9 < x < 31.7$$

因為  $x$  為整數，所以  $x = 30$  或  $31$ ，共 2 個 .

故選(2) .

#### 5 等差數列與和角公式

試問共有幾個角度  $\theta$  滿足  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ，且  $\cos(3\theta - 60^\circ)$ ， $\cos 3\theta$ ， $\cos(3\theta + 60^\circ)$  依序成一等差數列？

(1)1個 (2)2個 (3)3個 (4)4個 (5)5個 .

出處：龍騰版《數學3》第1章 三角

《稱霸數學(1~4冊)學測總複習講義》第8單元 三角

解題觀念：等差數列、和角公式 .





答 案：(3)

解 析：因為  $\cos(3\theta - 60^\circ)$ ， $\cos 3\theta$ ， $\cos(3\theta + 60^\circ)$  成等差數列，所以

$$\cos(3\theta - 60^\circ) + \cos(3\theta + 60^\circ) = 2\cos 3\theta .$$

利用和角公式展開，得

$$(\cos 3\theta \cos 60^\circ + \sin 3\theta \sin 60^\circ) + (\cos 3\theta \cos 60^\circ - \sin 3\theta \sin 60^\circ) = 2\cos 3\theta ,$$

整理得

$$2\cos 3\theta \cos 60^\circ = 2\cos 3\theta \Rightarrow \cos 3\theta = 0 .$$

因為  $0^\circ < \theta < 180^\circ \Rightarrow 0^\circ < 3\theta < 540^\circ$ ，所以

$$3\theta = 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ .$$

故選(3)。

## 6 數據分析

某貨品為避免因成本變動而造成售價波動太過劇烈，當週售價相對於前一週售價的漲跌幅定為當週成本相對於前一週成本的漲跌幅的一半。例如下表中第二週成本上漲100%，所以第二週售價上漲50%。依此定價方式以及下表的資訊，試選出正確的選項。

【註：成本漲跌幅 =  $\frac{\text{當週成本} - \text{前週成本}}{\text{前週成本}}$ ，售價漲跌幅 =  $\frac{\text{當週售價} - \text{前週售價}}{\text{前週售價}}$ 。】

	第一週	第二週	第三週	第四週
成本	50	100	50	90
售價	120	180	$x$	$y$

(1)  $120 = x < y < 180$  (2)  $120 < x < y < 180$  (3)  $x < 120 < y < 180$  (4)  $120 = x < 180 < y$

(5)  $120 < x < 180 < y$ 。

出 處：龍騰版《數學2》第4章 數據分析

《稱霸數學(1~4冊)學測總複習講義》第7單元 數據分析

解題觀念：一維數據分析。

答 案：(5)

解 析：因為第三週成本跌幅 =  $\frac{50 - 100}{100} = -50\%$ ，所以該週售價跌幅  $\frac{x - 180}{180} = -50\% \times \frac{1}{2}$ 。

$$\text{解得 } x = 180 + 180 \times (-25\%) = 135 .$$

又因為第四週成本漲幅 =  $\frac{90 - 50}{50} = 80\%$ ，所以該週售價漲幅  $\frac{y - 135}{135} = 80\% \times \frac{1}{2}$ 。

$$\text{解得 } y = 135 + 135 \times 40\% = 189 .$$

故選(5)。

## 7 向量的內積

$\triangle ABC$  內接於圓心為  $O$  之單位圓。若  $\vec{OA} + \vec{OB} + \sqrt{3}\vec{OC} = \vec{0}$ ，則  $\angle BAC$  之度數為何？  
 (1)  $30^\circ$  (2)  $45^\circ$  (3)  $60^\circ$  (4)  $75^\circ$  (5)  $90^\circ$ 。

出處：龍騰版《數學3》第3章 平面向量

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第10單元 平面向量

解題觀念：向量的內積及其性質。

答案：(4)

解析：因為  $\vec{OA} + \vec{OB} + \sqrt{3}\vec{OC} = \vec{0}$ ，

$$\text{所以 } \vec{OB} + \sqrt{3}\vec{OC} = -\vec{OA}。$$

$$\text{由 } |\vec{OB} + \sqrt{3}\vec{OC}|^2 = |-\vec{OA}|^2$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sqrt{3}\vec{OB} \cdot \vec{OC} + 3 = 1，$$

$$\text{得 } \vec{OB} \cdot \vec{OC} = -\frac{\sqrt{3}}{2}。$$

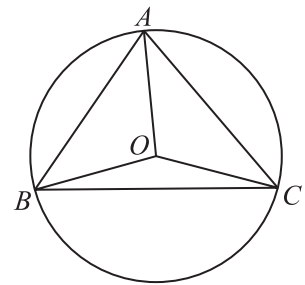
$$\text{因此 } \cos \angle BOC = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OB}| |\vec{OC}|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}，$$

$$\text{即 } \angle BOC = 150^\circ。$$

又因為圓周角為圓心角的一半，

$$\text{所以 } \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 75^\circ。$$

故選(4)。





## 二、多選題 (占 25 分)

說明：第 8 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

### 8 數據分析

某年學科能力測驗小華的成績為：國文 11 級分、英文 12 級分、數學 9 級分、自然 9 級分、社會 12 級分。他考慮申請一些校系，表 1 為大考中心公布的學測各科成績標準；表 2 是他最有興趣的五個校系規定的申請檢定標準，依規定申請者需通過該校系所有檢定標準才會被列入篩選。例如甲校系規定國文成績須達均標、英文須達前標、且社會須達均標；丙校系則規定英文成績須達均標、且數學或自然至少有一科達前標。表 2 空白者表示該校系對該科成績未規定檢定標準。

表 1 學測各科成績標準

	頂標	前標	均標	後標	底標
國文	13	12	10	9	7
英文	14	12	9	6	4
數學	12	10	7	4	3
自然	13	11	9	6	5
社會	13	12	10	8	7

表 2 校系篩選規定

	國文	英文	數學	自然	社會
甲校系	均標	前標			均標
乙校系	前標	均標			前標
丙校系		均標	一科達前標		
丁校系	一科達前標			均標	均標
戊校系	均標	前標	均標	前標	

根據以上資訊，試問小華可以考慮申請哪些校系（會被列入篩選）？

(1)甲校系 (2)乙校系 (3)丙校系 (4)丁校系 (5)戊校系。

出 處：龍騰版《數學 2》第 4 章 數據分析

《稱霸數學（1~4 冊）學測總複習講義》第 7 單元 數據分析

解題觀念：文字閱讀及解讀表格。

答 案：(1)(4)

解 析：由表 1 得知：國文達均標，英文達前標，數學達均標，自然達均標，社會達前標。

再由表 2 得知：可通過甲與丁兩校系，而乙、丙、戊三校系不通過。

故選(1)(4)。

### 9 多項式的除法原理

已知多項式  $f(x)$  除以  $x^2 - 1$  之餘式為  $2x + 1$  . 試選出正確的選項 .

- (1)  $f(0) = 1$
- (2)  $f(1) = 3$
- (3)  $f(x)$  可能為一次式
- (4)  $f(x)$  可能為  $4x^4 + 2x^2 - 3$
- (5)  $f(x)$  可能為  $4x^4 + 2x^3 - 3$  .

出 處：龍騰版《數學 1》第 2 章 多項式函數

《稱霸數學（1~4 冊）學測總複習講義》第 2 單元 多項式函數

解題觀念：多項式的長除法及除法原理 .

答 案：(2)(3)(5)

解 析：設商式為  $Q(x)$  . 根據除法定理，得

$$f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + (2x + 1) .$$

(1)  $f(0) = -Q(0) + 1$  的值不確定 .

(2)  $f(1) = 0 \times Q(1) + 3 = 3$  .

(3) 當  $Q(x) = 0$  時， $f(x) = 2x + 1$  為一次式 .

(4) 因為

$$(4x^4 + 2x^2 - 3) - (2x + 1) = 4x^4 + 2x^2 - 2x - 4$$

不可被  $x^2 - 1$  整除，所以  $f(x)$  不會是  $4x^4 + 2x^2 - 3$  .

(5) 因為

$$(4x^4 + 2x^3 - 3) - (2x + 1) = 4x^4 + 2x^3 - 2x - 4$$

可被  $x^2 - 1$  整除，所以  $f(x)$  可能是  $4x^4 + 2x^3 - 3$  .

故選(2)(3)(5) .



## 10 向量的拆解與三角比

已知坐標平面上  $\triangle ABC$ ，其中  $\overrightarrow{AB} = (-4, 3)$ ，且  $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 。試選出正確的選項。

- (1)  $\overline{BC} = 5$   
 (2)  $\triangle ABC$  是直角三角形  
 (3)  $\triangle ABC$  的面積為  $\frac{11}{5}$   
 (4)  $\sin B > \sin C$   
 (5)  $\cos A > \cos B$ 。

出處：龍騰版《數學3》第3章 平面向量

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第10單元 平面向量

解題觀念：向量的拆解與坐標表示法、三角比的定義。

答案：(2)(3)

解析：(1) 因為  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) - (-4, 3) = \left(\frac{22}{5}, -\frac{11}{5}\right)$ ，

$$\text{所以 } \overline{BC} = \sqrt{\left(\frac{22}{5}\right)^2 + \left(-\frac{11}{5}\right)^2} = \frac{11\sqrt{5}}{5}。$$

(2) 因為  $\overline{AB} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$ ， $\overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，所以

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \frac{121}{5} + \frac{4}{5} = 25 = \overline{AB}^2，$$

因此， $\triangle ABC$  為直角三角形。

(3)  $\triangle ABC$  的面積為  $\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{11\sqrt{5}}{5} = \frac{11}{5}$ 。

(4) 因為  $\sin B = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$ ， $\sin C = \sin 90^\circ = 1$ ，所以  $\sin B < \sin C$ 。

(5) 因為  $\cos A = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$ ， $\cos B = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{11\sqrt{5}}{25}$ ，所以  $\cos A < \cos B$ 。

故選(2)(3)。



### 11 空間中的平面方程式與直線方程式

坐標空間中，設直線  $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-1}$ ，平面  $E_1: 2x-3y-z=0$ ，平面  $E_2: x+y-z=0$ 。

試選出正確的選項。

- (1) 點  $(3,0,-1)$  在直線  $L$  上
- (2) 點  $(1,2,3)$  在平面  $E_1$  上
- (3) 直線  $L$  與平面  $E_1$  垂直
- (4) 直線  $L$  在平面  $E_2$  上
- (5) 平面  $E_1$  與  $E_2$  交於一直線。

出處：龍騰版《數學4》第2章 空間的平面與直線

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第12單元 空間的平面與直線

解題觀念：空間中的平面與直線之基本概念，及相交情形。

答案：(3)(5)

解析：(1) 將點  $(3,0,-1)$  代入  $L$ ，得  $\frac{3-1}{2} = \frac{0-2}{-3} = \frac{-1}{-1}$ （不合），所以不在  $L$  上。

(2) 將點  $(1,2,3)$  代入  $E_1$ ，得  $2 \times 1 - 3 \times 2 - 3 = 0$ （不合），所以不在  $E_1$  上。

(3) 因為直線  $L$  的方向向量  $(2, -3, -1)$  與平面  $E_1$  的法向量  $(2, -3, -1)$  平行，所以直線  $L$  與平面  $E_1$  垂直。

(4) 將直線  $L$  的參數式  $x=1+2t$ ， $y=2-3t$ ， $z=-t$ ，代入平面  $E_2$ ，得  $(1+2t)+(2-3t)-(-t)=0 \Rightarrow 3=0$ （不合）。

因為此方程式的  $t$  無解，所以直線  $L$  與平面  $E_2$  平行。

(5) 因為平面  $E_1$  的法向量  $(2, -3, -1)$  與平面  $E_2$  法向量  $(1, 1, -1)$  不平行，所以兩平面不平行。因此，兩平面交於一直線。

故選(3)(5)。

**12 二次曲線的標準式**

試問下列哪些選項中的二次曲線，其焦點（之一）是拋物線  $y^2 = 2x$  的焦點？

(1)  $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$    (2)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$    (3)  $x^2 + \frac{4y^2}{3} = 1$    (4)  $8x^2 - 8y^2 = 1$    (5)  $4x^2 - 4y^2 = 1$  .

**出處：**龍騰版《數學4》第4章 二次曲線

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第14單元 二次曲線

**解題觀念：**拋物線、橢圓及雙曲線的標準式。

**答案：**(1)(3)(4)

**解析：**將拋物線  $y^2 = 2x$  改寫為標準式  $(y-0)^2 = 4 \times \frac{1}{2} \times (x-0)$ ，得  $c = \frac{1}{2}$  .

因為頂點為  $(0,0)$ ，開口向右，所以焦點為  $(0+c,0) = \left(\frac{1}{2},0\right)$  .

(1) 由拋物線的標準式  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{1}{4} \times \left(y + \frac{1}{4}\right)$ ，得  $c = \frac{1}{4}$  .

因為頂點為  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ ，開口向上，所以焦點為  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + c\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$  .

(2) 由橢圓的標準式  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，得  $c = \sqrt{4-3} = 1$  .

因為中心為  $(0,0)$ ，長軸在  $x$  軸上，所以兩焦點為  $(0 \pm c, 0) = (\pm 1, 0)$  .

(3) 由橢圓的標準式  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1$ ，得  $c = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$  .

因為中心為  $(0,0)$ ，長軸在  $x$  軸上，所以兩焦點為  $(0 \pm c, 0) = \left(\pm \frac{1}{2}, 0\right)$  .

(4) 由雙曲線的標準式  $\frac{x^2}{\frac{1}{8}} - \frac{y^2}{\frac{1}{8}} = 1$ ，得  $c = \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$  .

因為中心為  $(0,0)$ ，實軸在  $x$  軸上，所以兩焦點為  $(0 \pm c, 0) = \left(\pm \frac{1}{2}, 0\right)$  .

(5) 由雙曲線的標準式  $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$ ，得  $c = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  .

因為中心為  $(0,0)$ ，實軸在  $x$  軸上，所以兩焦點為  $(0 \pm c, 0) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  .

故選(1)(3)(4) .

## 第貳部分：選填題 (占 40 分)

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13-33)。  
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

### A 斜率與對數律

已知坐標平面上三點  $(3, \log 3)$ 、 $(6, \log 6)$  與  $(12, y)$  在同一直線上，則  $y = \log$  ⑬⑭。

出處：龍騰版《數學 1》第 3 章 指數、對數函數

《稱霸數學(1~4 冊)學測總複習講義》第 3 單元 指數、對數函數

解題觀念：直線斜率的定義、對數的運算。

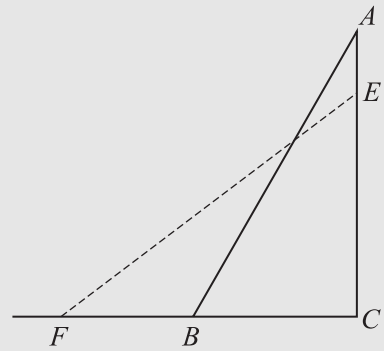
答案：24

解析：利用斜率相等，得  $\frac{\log 6 - \log 3}{6 - 3} = \frac{y - \log 3}{12 - 3} \Rightarrow \frac{\log 2}{3} = \frac{y - \log 3}{9}$ 。

解得  $y = \log 3 + 3 \log 2 = \log 3 + \log 8 = \log 24$ 。

### B 三角測量

如右圖所示(只是示意圖)，將梯子  $\overline{AB}$  靠在與地面垂直的牆  $AC$  上，測得與水平地面的夾角  $\angle ABC$  為  $60^\circ$ 。將在地面上的底  $B$  沿著地面向外拉 51 公分到點  $F$  (即  $\overline{FB} = 51$  公分)，此時梯子  $\overline{EF}$  與地面的夾角  $\angle EFC$  之正弦值為  $\sin \angle EFC = 0.6$ ，則梯子長  $\overline{AB} =$  ⑮⑯⑰ 公分。



出處：龍騰版《數學 3》第 1 章 三角

《稱霸數學(1~4 冊)學測總複習講義》第 8 單元 三角

解題觀念：三角比的定義。

答案：170

解析：設  $\overline{AB} = \overline{EF} = x$ 。因為  $\angle ABC = 60^\circ$ ，所以  $\overline{BC} = \frac{x}{2}$ 。又因為  $\sin \angle EFC = \frac{3}{5}$ ，所以

$$\cos \angle EFC = \frac{51 + \frac{x}{2}}{x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 255 + \frac{5}{2}x = 4x \text{ . 解得 } x = 170 \text{ . 故 } \overline{AB} = 170 \text{ .}$$





## C 算幾不等式

平面上兩點  $A$ 、 $B$  之距離為 5，以  $A$  為圓心作一半徑為  $r$  ( $0 < r < 5$ ) 的圓  $\Gamma$ ，過  $B$  作圓  $\Gamma$  的切線，切點 (之一) 為  $P$ 。當  $r$  變動時， $\triangle PAB$  的面積最大可能值為  $\frac{18(19)}{20}$ 。(化成最簡分數)

出處：龍騰版《數學 1》第 1 章 數與式

《稱霸數學 (1~4 冊) 學測總複習講義》第 1 單元 數與式

解題觀念：圓的切線性質、算幾不等式。

答案： $\frac{25}{4}$

解析：如右圖，設  $\overline{BP} = x$ 。

因為  $\angle APB = 90^\circ$ ，

所以  $\triangle PAB$  的面積為  $\frac{rx}{2}$ 。

又由畢氏定理，得

$$r^2 + x^2 = 25。$$

利用算幾不等式，得

$$\frac{r^2 + x^2}{2} \geq \sqrt{r^2 x^2} \Rightarrow \frac{25}{2} \geq rx，$$

即  $\triangle PAB$  的面積  $\leq \frac{25}{4}$ 。

且當  $x^2 = r^2 = \frac{25}{2}$  時，等號成立。

故  $\triangle PAB$  的面積之最大值為  $\frac{25}{4}$ 。

〈另解〉

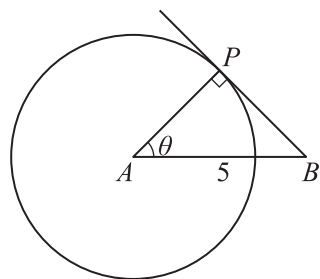
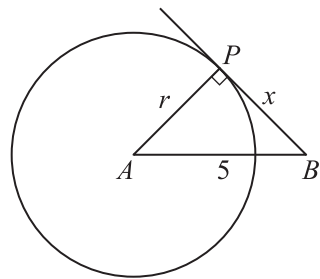
如右圖，設  $\angle PAB = \theta$ 。

因為  $\angle APB = 90^\circ$ ，

所以  $\overline{AP} = 5 \cos \theta$ ， $\overline{BP} = 5 \sin \theta$ 。

因此， $\triangle PAB$  的面積為  $\frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{BP} = \frac{25}{2} \sin \theta \cos \theta = \frac{25}{4} \sin 2\theta$ 。

當  $\theta = 45^\circ$  時， $\triangle PAB$  的面積有最大值  $\frac{25}{4} \times 1 = \frac{25}{4}$ 。



### D 二平行直線的距離

坐標平面上，圓  $\Gamma$  完全落在四個不等式： $x-y \leq 4$ 、 $x+y \leq 18$ 、 $x-y \geq -2$ 、 $x+y \geq -24$  所圍成的區域內，則  $\Gamma$  最大可能面積為  $\frac{\textcircled{21}}{\textcircled{22}} \pi$ 。（化成最簡分數）

出處：龍騰版《數學3》第2章 直線與圓

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第9單元 直線與圓

解題觀念：二元一次不等式的圖形、兩平行直線的距離。

答案： $\frac{9}{2}$

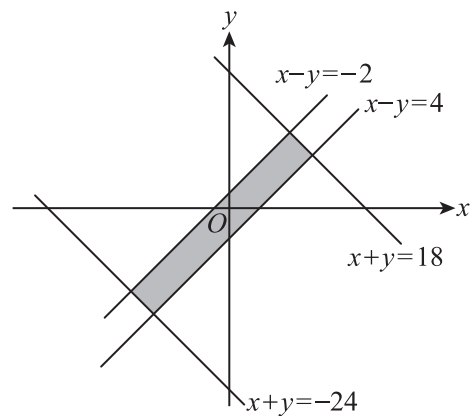
解析：不等式的區域為一矩形，如右圖所示：

其中矩形較短邊的邊長為兩平行直線  $x-y+2=0$  與

$$x-y-4=0 \text{ 的距離 } \frac{|2-(-4)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} .$$

故圓  $\Gamma$  的最大可能半徑為  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

$$\text{即最大可能面積為 } \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \pi = \frac{9}{2} \pi .$$



### E 二次函數的圖形與向量的夾角公式

坐標平面上，若拋物線  $y = x^2 + 2x - 3$  的頂點為  $C$ ，與  $x$  軸的交點為  $A$ 、 $B$ ，則

$$\cos \angle ACB = \frac{\textcircled{23}}{\textcircled{24}} . \text{ (化成最簡分數)}$$

出處：龍騰版《數學3》第3章 平面向量

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第10單元 平面向量

解題觀念：二次函數的圖形、向量的內積。

答案： $\frac{3}{5}$



**解 析：**利用配方法將方程式改寫為  $y = (x+1)^2 - 4$ ，得頂點  $C(-1, -4)$ 。

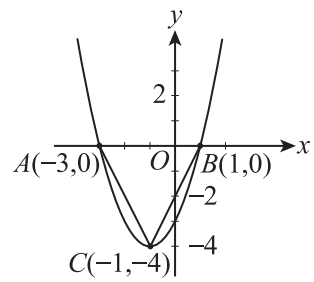
將  $y=0$  代入  $y = x^2 + 2x - 3$ ，得

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 .$$

解得  $x = -3, 1$ ，因此  $A(-3, 0)$ ， $B(1, 0)$ 。

因為  $\vec{CA} = (-2, 4)$ ， $\vec{CB} = (2, 4)$ ，所以

$$\cos \angle ACB = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| |\vec{CB}|} = \frac{-4 + 16}{\sqrt{20} \times \sqrt{20}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} .$$



## F 矩陣的乘法

設  $a, b, c, d, e, x, y, z$  皆為實數，考慮矩陣相乘：
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -4 & 6 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x & 7 \\ 0 & y & 7 \\ -11 & z & 23 \end{bmatrix},$$

則  $y = \frac{\textcircled{25}}{\textcircled{26}}$ 。（化成最簡分數）

**出 處：**龍騰版《數學4》第3章 矩陣

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第13單元 矩陣

**解題觀念：**矩陣的乘法定義。

**答 案：** $\frac{7}{2}$

**解 析：**根據矩陣乘法的定義，得

$$\begin{cases} -3c - 4d = 0 & \textcircled{1} \\ 5c + 6d = y & \textcircled{2} \\ 7c + de = 7 & \textcircled{3} \\ 7 + 2e = 23 & \textcircled{4} \end{cases}$$

由④解得  $e = 8$ 。

代入③後，再與①聯立，得  $c = 7$ ， $d = -\frac{21}{4}$ 。

代入②，得  $y = 5 \times 7 + 6 \times \left(-\frac{21}{4}\right) = \frac{7}{2}$ 。

**G 正弦定理與分點公式**

設  $D$  為  $\triangle ABC$  中  $\overline{BC}$  邊上的一點，已知  $\angle ABC = 75^\circ$ 、 $\angle ACB = 45^\circ$ 、 $\angle ADB = 60^\circ$ 。

若  $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ ，則  $s = \frac{\textcircled{27}}{\textcircled{28}}$ ， $t = \frac{\textcircled{29}}{\textcircled{30}}$ 。（化成最簡分數）

出 處：龍騰版《數學3》第1章 三角

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第8單元 三角

解題觀念：正弦定理、向量的分點公式。

答 案： $\frac{1}{3}$ ， $\frac{2}{3}$

解 析：如右圖，設  $\overline{BD} = x$ ， $\overline{DC} = y$ ， $\overline{AD} = z$ 。

在  $\triangle ABD$  中，利用正弦定理，得

$$\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{z}{\sin 75^\circ} \Rightarrow x = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} z。$$

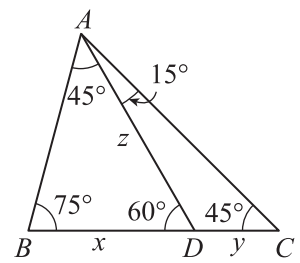
在  $\triangle ACD$  中，利用正弦定理，得

$$\frac{y}{\sin 15^\circ} = \frac{z}{\sin 45^\circ} \Rightarrow y = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} z。$$

$$\text{因此，} \frac{x}{y} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{16} = 2，$$

即  $\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 1$ 。利用向量的分點公式，得

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}。 \text{故 } s = \frac{1}{3}， t = \frac{2}{3}。$$





## H 空間概念

將一塊邊長  $\overline{AB} = 15$  公分、 $\overline{BC} = 20$  公分的長方形鐵片  $ABCD$  沿對角線  $\overline{BD}$  對摺後豎立，使得平面  $ABD$  與平面  $CBD$  垂直，則  $A$ 、 $C$  兩點（在空間）的距離  $\overline{AC} = \sqrt{\textcircled{31}\textcircled{32}\textcircled{33}}$  公分。（化成最簡根式）

出處：龍騰版《數學4》第1章 空間向量

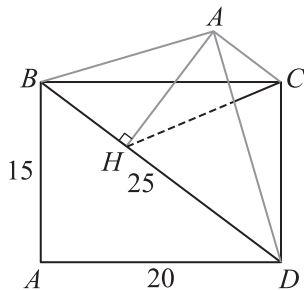
《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第11單元 空間向量

解題觀念：畢氏定理、餘弦定理、兩平面的垂直、直線與平面的垂直。

答案： $\sqrt{337}$

解析：利用畢氏定理，得對角線  $\overline{BD} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ 。

過  $A$  作  $\overline{BD}$  的垂線，垂足為  $H$ ，連接  $\overline{CH}$ ，如圖所示。



因為平面  $ABD$  與平面  $CBD$  垂直，所以直線  $AH$  垂直平面  $CBD$ ，因此  $\overline{AH} \perp \overline{HC}$ 。

(1) 因為直角三角形  $ABD$  的面積  $= \frac{25 \times \overline{AH}}{2} = \frac{15 \times 20}{2}$ ，所以  $\overline{AH} = 12$ 。

(2) 在直角三角形  $ABH$  中，利用畢氏定理，得  $\overline{BH} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ 。

又在  $\triangle CBH$  中，利用餘弦定理及  $\cos \angle CBD = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ ，得

$$\overline{CH}^2 = 20^2 + 9^2 - 2 \times 20 \times 9 \times \frac{4}{5} = 193 \Rightarrow \overline{CH} = \sqrt{193}。$$

(3) 在直角三角形  $AHC$  中，利用畢氏定理，得

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{144 + 193} = \sqrt{337}。$$

### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$ ；

首項為  $a$ ，公比為  $r$  ( $r \neq 1$ ) 的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ，

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B，$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}。$$

3.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)；

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

4. 一維數據  $X$ ： $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

$$\text{算術平均數 } \mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i，$$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_X^2 \right)}。$$

5. 二維數據  $(X, Y)$ ： $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}，$$

迴歸直線 (最適合直線) 方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$ 。

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。

8. 角錐體積 =  $\frac{1}{3}$  底面積  $\times$  高。