# 107 年 四技二專

統一入學測驗

# 數學（C）

## 一、試題分析

107 年統測數學 C 是一份力求有鑑別度的試卷，如果與 106 年的試卷來比較，其簡易、中等、困難的題目區別更加明顯，大約各占三分之一，考題鑑別度高。這次的試題順序，不再依照「99 課綱」的學習時間先後來安排，而是改採簡易、中等、困難的順序來安排，也許可以讓考生寫起來更有信心。此份試卷的其他特色如下：

1. 爭議試題：第 24 題未說明清楚骰子是相同或相異，這是很嚴重的題意瑕疵。
2. 參考書題：
   (1) 第 8 題：這類題目在技術高中的數學課本（如：龍騰數學 C(I)）或講義都有。
   (2) 第 23 題：本題並不是單純的用對數的遞增（減）來判斷對數的大小順序，對考生而言不易處理（除非以常用對數來計算，但是試卷上也沒有提供該給的常用對數值），而這種題目在普通高中的數學參考書上都有。
3. 罕見試題：
   (1) 第 9 題：使用整係數一次因式檢驗法來尋找可能的因式，再用因式定理解題。
   (2) 第 25 題：把圓方程式轉化成參數式，再代入求三角函數的極值。
4. 綜合試題：第 9、12、15、18、20、25 題都是跨單元的試題，是很好的綜合聯繫。
5. 考古題：

| 107C | 第 3 題 | 第 7 題 | 第 10 題 | 第 16 題 | 第 18 題 |
|---|---|---|---|---|---|
| 類似題號 | 105-9、10 | 106-5 | 106-8 | 105-23 | 101-19、106-23 |

綜合上述，107 年的試卷對於低、中、高程度的考生應該會有良好的鑑別度。另外，在試卷印製前，也有徵求現職技術高中的數學老師入闈，只可惜仍然出現了一些容易引起爭論的試題，期待 108 年的試卷可以謹慎審題。

## 二、配分比例表

| 單元名稱 | 題數 | 單元名稱 | 題數 |
|---|---|---|---|
| 直線方程式 | 1 | 數列與級數 | 1 |
| 三角函數 | 3 | 指數與對數及其運算 | 2 |
| 三角函數的應用 | 1 | 排列組合 | 2 |
| 向量 | 1 | 機率與統計 | 2 |
| 式的運算 | 1 | 圓 | 2 |
| 聯立方程式 | 2 | 二次曲線 | 0 |
| 複數 | 1 | 微分 | 1 |
| 不等式及其應用 | 2 | 積分 | 3 |

# 107 學年度四技二專統一入學測驗
# 數學(C)

| 總　分 |
| --- |
| |

**數學 C 參考公式**

1. 首項為$a_1$，公差為$d$的等差數列前$n$項之和為$S_n=\dfrac{n\left(2a_1+(n-1)d\right)}{2}$。

   首項為$a_1$，公比為$r$（$r\neq 1$）的等比數列前$n$項之和為$S_n=\dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$。

2. $\triangle ABC$的面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs$，其中$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，$r$為內切圓半徑。

3. 圓$C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$的參數式為$\begin{cases}x=h+r\cos\theta\\ y=k+r\sin\theta\end{cases}$，其中$0\le\theta<2\pi$，式子中的$\theta$為參數。

4. 點$P(x_0,y_0)$到直線$L:ax+by+c=0$的距離為$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

5. 三角函數的二倍角公式：
   $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，
   $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$。

**單選題（每題 4 分，共 100 分）**

(　　) 1. 已知直線$L_1$通過$(2,3)$、$(1,5)$兩點，且直線$L_2$的$x$截距是$1$、$y$截距是$4$。若$L_1$與$L_2$的斜率分別為$m_1$與$m_2$，則下列何者正確？
(A) $0<m_1<m_2$　(B) $m_1<0<m_2$　(C) $m_2<0<m_1$　(D) $m_2<m_1<0$。

(　　) 2. 若兩直線$3x+4y=6$與$9x+12y=k$的距離為$2$，則$k$的值可能為下列何者？
(A) $-48$　(B) $-12$　(C) $10$　(D) $24$。

(　　) 3. 設$b_1$、$b_2$、$b_3$、$c_1$、$c_2$及$c_3$均為實數，若二階行列式$\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}=13$、$\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}=7$、$\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}=2$，則三階行列式$\begin{vmatrix}1 & b_1 & c_1\\ 2 & b_2 & c_2\\ 3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=$
(A) $5$　(B) $13$　(C) $25$　(D) $33$。

(　　) 4. 某線上遊戲每場比賽可得的分數分別為0分、1分、2分、3分，現在A,B,C三人分別玩此線上遊戲20場，得分情形如表(一)。若$a,b,c$分別為三人得分的平均分數，則下列何者正確？

表(一)

| 得分 / 人 | 0 分 | 1 分 | 2 分 | 3 分 |
|---|---|---|---|---|
| A | 3 場 | 8 場 | 5 場 | 4 場 |
| B | 5 場 | 4 場 | 6 場 | 5 場 |
| C | 6 場 | 5 場 | 3 場 | 6 場 |

(A)$a>b$　(B)$c>a$　(C)$b>c$　(D)$c+0.5=a$。

(　　) 5. 坐標平面上滿足不等式$\begin{cases}2x+y\le 10\\ x+2y\le 8\\ x\ge 0，y\ge 0\end{cases}$的區域面積為何？

(A)12　(B)13　(C)15　(D)16。

(　　) 6. 若編號為$1,2,3,\cdots,10$的十顆羽毛球中，任意取出三顆作為比賽用球，則編號2與編號3均被取出的機率為何？

(A)$\dfrac{1}{20}$　(B)$\dfrac{1}{15}$　(C)$\dfrac{3}{20}$　(D)$\dfrac{3}{10}$。

(　　) 7. 設三角形三邊長分別為5、6、7，若三角形面積為$A$，內切圓半徑為$r$，則$A\cdot r=$

(A)24　(B)35　(C)105　(D)210。

(　　) 8. $\cos 0^\circ+\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 30^\circ+\cdots+\cos 350^\circ+\cos 360^\circ=$

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3。

(　　) 9. 若$f(x)=x^4-x^3+kx^2-2$為整係數多項式，其中$k>0$且$f(x)$有整係數一次因式$x-h$，則$k+h=$

(A)3　(B)2　(C)1　(D)0。

(　　) 10. 設$\begin{cases}3x+5y+z=15\\ 2x+4y+z=12\\ 5x+y+2z=3\end{cases}$，則$y=$

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5。

(　　) 11. 已知$z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，且$\bar{z}$為其共軛複數。若$\dfrac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$，其中$a,b$為實數，則點$(a,b)$在第幾象限？

(A)一　(B)二　(C)三　(D)四。

(　　) 12. 若 $x=\dfrac{\log_{10}7}{\log_{10}9}$，則 $81^x=$

(A) 3　(B) 7　(C) 25　(D) 49。

(　　) 13. $\sum_{n=1}^{10}\left(2^n+3n+2\right)=$

(A) 1268　(B) 1298　(C) 2017　(D) 2231。

(　　) 14. 若從11件相異物中分別取出5、6、7件的組合數分別為 $A$、$B$、$C$，而從12件相異物中取出6件的組合數為 $D$，則下列何者正確？

(A) $B>A$　(B) $C>A$　(C) $D=A+B$　(D) $D=B+C$。

(　　) 15. 設點 $O_1$ 為圓 $C: x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 之圓心。今以另一點 $O_2$ 為圓心、$\overline{O_1O_2}$ 為半徑作一圓，且此圓與圓 $C$ 交於 $A$、$B$ 兩點。若 $\overline{AO_2}=3$，則 $\overline{AB}=$

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　(C) $2\sqrt{2}$　(D) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$。

(　　) 16. $\int_{-4}^{0}\left|2x+5\right|dx=$

(A) $\dfrac{17}{2}$　(B) 8　(C) $\dfrac{17}{4}$　(D) 4。

(　　) 17. 若直線 $L$ 過點 $(9,5)$，且與函數 $y=f(x)$ 的圖形相切於點 $(3,1)$，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=$

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) 3。

(　　) 18. 若函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)=x^2-2x-3$，且 $f(0)=6$，則 $f(x)$ 的相對極小值為何？

(A) $-5$　(B) $-4$　(C) $-3$　(D) $-2$。

(　　) 19. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(4x-1)^3\,dx=$

(A) $\dfrac{1}{16}$　(B) $\dfrac{1}{12}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{3}$。

(　　) 20. 若一元二次方程式 $x^2+(a-5)x+a+3=0$ 有兩正根，滿足 $a$ 的實數解為 $m<a\le n$，則 $m+n=$

(A) $-4$　(B) $-3$　(C) $-2$　(D) 1。

(　　) 21. 若 $\tan 19^\circ=a$，則 $\sin 2018^\circ=$

(A) $\dfrac{-2}{1+a^2}$　(B) $\dfrac{-2a}{1+a^2}$　(C) $\dfrac{a}{1+a^2}$　(D) $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$。

( ) 22. 設 $f(x)=4\sin x+\cos(2x)+7$ 的最小值為 $m$，最大值為 $M$，則 $m+M=$

(A) $-7$ (B) $1$ (C) $12$ (D) $21$。

( ) 23. 設 $a=\log_{0.3}0.5$、$b=\log_{3}5$、$c=\log_{30}50$，則 $a$、$b$、$c$ 大小順序為何？

(A) $c>b>a$ (B) $b>a>c$ (C) $b>c>a$ (D) $a>b>c$。

( ) 24. 同時投擲四個公正骰子，點數3出現至多一次的情形共有幾種？

(A)1125 (B)1185 (C)1245 (D)1365。

( ) 25. 設 $P(x,y)$ 為圓 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 上的動點，若 $4x+3y+5$ 的最大值為 $M$，最小值為 $m$，則 $M+m=$

(A) $-5$ (B) $0$ (C) $5$ (D) $10$。

# 107 年統一入學測驗 數學(C)

## 答 案

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.D | 2.B | 3.A | 4.C | 5.B | 6.B | 7.A | 8.B | 9.A | 10.B |
| 11.D | 12.D | 13.D | 14.C | 15.D | 16.A | 17.B | 18.C | 19.A | 20.C |
| 21.B | 22.C | 23.C | 24.A | 25.D | | | | | |

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 107 年 5 月 7 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

(1) 通過兩相異點 $(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$ 的直線斜率 $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

(2) 若直線的 $x$ 截距為 $a$，則直線與 $x$ 軸交於點 $(a,0)$

(3) 若直線的 $y$ 截距為 $b$，則直線與 $y$ 軸交於點 $(0,b)$

解析

(1) 直線 $L_1$ 的斜率 $m_1=\dfrac{3-5}{2-1}=-2$

(2) 直線 $L_2$ 的 $x$、$y$ 截距分別是 $1$、$4$

則直線 $L_2$ 與 $x$ 軸交於點 $(1,0)$，與 $y$ 軸交於點 $(0,4)$

直線 $L_2$ 的斜率 $m_2=\dfrac{0-4}{1-0}=-4$

由(1)、(2)知：$m_2<m_1<0$

2. 技巧與分析

(1) 兩平行線 $\begin{cases}L_1: ax+by=c_1\\ L_2: ax+by=c_2\end{cases}$ 之間的距離

$d(L_1,L_2)=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) $|a-b|=|b-a|$

解析

$3x+4y=6 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 9x+12y=18$

$9x+12y=18$ 與 $9x+12y=k$ 的距離為

$\dfrac{|18-k|}{\sqrt{9^2+12^2}}=\dfrac{|18-k|}{15}=\dfrac{|k-18|}{15}$

則 $\dfrac{|k-18|}{15}=2 \Rightarrow |k-18|=30$

$\Rightarrow k-18=\pm 30$

$\Rightarrow k=18\pm 30=48$ 或 $-12$

故選(B)

3. 技巧與分析

三階行列式依第一行降階展開：

$$\begin{vmatrix}a&p&x\\b&q&y\\c&r&z\end{vmatrix}=a\times\begin{vmatrix}q&y\\r&z\end{vmatrix}-b\times\begin{vmatrix}p&x\\r&z\end{vmatrix}+c\times\begin{vmatrix}p&x\\q&y\end{vmatrix}$$

解析

$\begin{vmatrix}1&b_1&c_1\\2&b_2&c_2\\3&b_3&c_3\end{vmatrix}$（第一行降階展開）

$=1\times\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_3&c_3\end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}$

$=1\times 13-2\times 7+3\times 2=5$

4. 技巧與分析

算術平均數：

平均分數 $=\dfrac{\text{總得分}}{\text{總場次}}$

解析

(1) A 的總得分 $=0\times 3+1\times 8+2\times 5+3\times 4=30$

A 的平均分數 $a=\dfrac{30}{20}=1.5$

(2) B 的總得分 $=0\times 5+1\times 4+2\times 6+3\times 5=31$

B 的平均分數 $b=\dfrac{31}{20}=1.55$

(3) C 的總得分 $=0\times 6+1\times 5+2\times 3+3\times 6=29$

C 的平均分數 $c=\dfrac{29}{20}=1.45$

由(1)、(2)、(3)知：$c<a<b$ 且 $c+0.05=a$
故選(C)

5. 技巧與分析

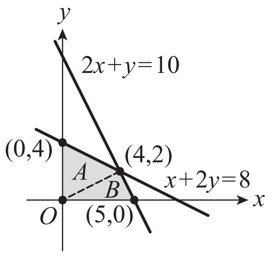
(1) 設 $a>0$，則 $ax+by\le c$ 的圖解在直線 $ax+by=c$ 的左側半平面（含直線）

(2) $x\ge 0$ 的圖解是直線 $x=0$（$y$ 軸）的右側半平面（含直線）

(3) $y\ge 0$ 的圖解是直線 $y=0$（$x$ 軸）的上側半平面（含直線）

解析

不等式的圖解如下：




區域 $A$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

區域 $B$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times5\times2=5$

$\therefore$ 不等式的區域面積
$=$ 區域 $A$、$B$ 的面積和
$=8+5=13$

6. 技巧與分析

(1) 事件 $A$ 的機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$，其中 $S$ 為樣本空間

(2) $C^n_k=\dfrac{\overbrace{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}^{n\text{ 往下，}k\text{個數相乘}}}{k!}$

解析

設樣本空間為 $S$，編號 2 與 3 的球被取出的事件為 $A$

則 $n(S)=C^{10}_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

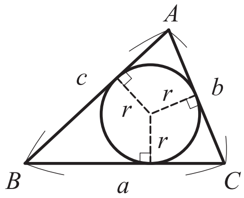
$n(A)=\underbrace{C^2_2}_{\text{取 2、3 號球}}\times\underbrace{C^{10-2}_1}_{\text{剩下的球取 1 球}}=1\times C^8_1=8$

故所求機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{8}{120}=\dfrac{1}{15}$

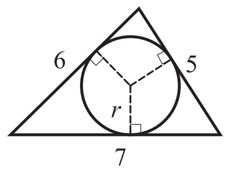
7. 技巧與分析

(1) $\triangle ABC$ 的面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，
其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

(2) 若 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 $r$，則
$\triangle ABC$ 的面積 $=r\times s$




解析




令 $s=\frac{1}{2}\times(5+6+7)=9$

三角形面積 $A$
$=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$
$=6\sqrt{6}$

$\because$ 三角形的內切圓半徑為 $r$

$\therefore$ 三角形面積 $A=r\times s=r\times9=9r$

故 $9r=6\sqrt{6}\ \Rightarrow\ r=\dfrac{6\sqrt{6}}{9}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

因此 $A\times r=6\sqrt{6}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=24$

8. 技巧與分析

(1) $\cos0^\circ=1$

(2) $\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta$

解析

令 $A=\cos0^\circ+\cos10^\circ+\cos20^\circ+\cdots+\cos180^\circ$
$B=\cos190^\circ+\cos200^\circ+\cos210^\circ+\cdots+\cos360^\circ$

$\because$ $\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta$

$\therefore$ $\cos190^\circ=\cos(180^\circ+10^\circ)=-\cos10^\circ$
$\cos200^\circ=\cos(180^\circ+20^\circ)=-\cos20^\circ$
$\vdots$
$\cos360^\circ=\cos(180^\circ+180^\circ)=-\cos180^\circ$

則 $B=-\cos10^\circ-\cos20^\circ-\cdots-\cos180^\circ$

故所求 $=A+B=\cos0^\circ=1$

9. 技巧與分析

(1) 整係數一次因式檢驗法：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 為整係數多項式，若 $ax+b$ 是 $f(x)$ 的一次因式，其中 $a$ 、 $b$ 為互質整數，則 $a$ 是 $a_n$ 的因數， $b$ 是 $a_0$ 的因數

(2) 因式定理：若 $x-a$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $f(a)=0$

解析

$\because$ $f(x)=x^4-x^3+kx^2-2$ 為整係數多項式且 $k>0$

$\therefore$ $k$ 為正整數

$\because$ $f(x)$ 有整係數一次因式 $x-h$

$\therefore$ 由整係數一次因式檢驗法知 $h=\pm1$ 或 $\pm2$

(1) 當 $h=1$ 時，即 $f(x)$ 有因式 $x-1$

則 $f(1)=1-1+k-2=0 \quad\Rightarrow\quad k=2$

(2) 當 $h=-1$ 時，即 $f(x)$ 有因式 $x+1$

則 $f(-1)=1-(-1)+k-2=0$

$\Rightarrow\quad k=0$（不合）

(3) 當 $h=2$ 時，即 $f(x)$ 有因式 $x-2$

則 $f(2)=16-8+4k-2=0$

$\Rightarrow\quad k=-\dfrac{3}{2}$（不合）

(4) 當 $h=-2$ 時，即 $f(x)$ 有因式 $x+2$

則 $f(-2)=16-(-8)+4k-2=0$

$\Rightarrow\quad k=-\dfrac{11}{2}$（不合）

由(1)、(2)、(3)、(4)知： $h=1$ ， $k=2$

故 $k+h=2+1=3$

10. 技巧與分析

解聯立方程式的加減消去法

解析

$$令\begin{cases}3x+5y+z=15\cdots\cdots①\\2x+4y+z=12\cdots\cdots②\\5x+y+2z=3\cdots\cdots③\end{cases}$$

①+②： $5x+9y+2z=27\cdots\cdots④$

④−③： $8y=24 \quad\Rightarrow\quad y=3$

11. **〈法一〉**

技巧與分析

設 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 均為實數，

(1) $z=a+bi$ 的共軛複數

$\bar{z}=a-bi$

(2) $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

(3) 複數的相等：

若 $a+bi=c+di$ ，則 $a=c$ 且 $b=d$

解析

$z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ，則 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$1+z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ， $1+\bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\frac{1+z}{1+\bar{z}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

而 $\dfrac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$ ，其中 $a$ 、 $b$ 為實數

故 $a=\dfrac{1}{2}$ ， $b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

因此點 $(a,b)$ 在第四象限

**〈法二〉**

技巧與分析

設 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 為實數，

(1) 若 $z=a+bi$ ，則 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

(2) $z\times\bar{z}=|z|^2$

(3) 若 $a+bi=c+di$ ，則 $a=c$ 且 $b=d$

解析

$$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow\quad |z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$\because\quad z\times\bar{z}=|z|^2$$

$$\therefore\quad z\times\bar{z}=1$$

$$\frac{1+z}{1+\bar{z}}=\frac{z\times\bar{z}+z}{1+\bar{z}}=\frac{z(\bar{z}+1)}{1+\bar{z}}=z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

而 $\frac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$，其中 $a$ 、 $b$ 為實數

則 $a=\frac{1}{2}$ ， $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

故點 $(a,b)=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在第四象限

12. 技巧與分析

設 $a$ 、 $b$ 、 $c>0$ 且 $a$ 、 $c\neq 1$ ，

(1) 對數的定義：

$$\log_a b=x \quad\Leftrightarrow\quad a^x=b$$

(2) 換底公式：

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

解析

由換底公式知：

$$x=\frac{\log_{10}7}{\log_{10}9}=\log_9 7$$

則由對數的定義知：

$$x=\log_9 7 \quad\Leftrightarrow\quad 9^x=7$$

故 $81^x=\left(9^2\right)^x=9^{2x}=\left(9^x\right)^2=7^2=49$

13. 技巧與分析

(1) $a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-1}$

共 $n$ 項的和 $=\dfrac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1}$ ，其中 $r\neq 1$

(2) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

解析

$$\sum_{n=1}^{10}\left(2^n+3n+2\right)=\sum_{n=1}^{10}2^n+\sum_{n=1}^{10}3n+\sum_{n=1}^{10}2$$

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}2^n=2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$

$$=\frac{2\left(2^{10}-1\right)}{2-1}=2046$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}3n=3\sum_{n=1}^{10}n=3\times(1+2+3+\cdots+10)$

$$=3\times\frac{10\times(10+1)}{2}=165$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}2=\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{\text{共10個}}=10\times 2=20$

由(1)、(2)、(3)知：

所求 $=2046+165+20=2231$

14. 技巧與分析

(1) $C_k^n=\dfrac{\overbrace{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}^{n\text{ 往下，}k\text{個數相乘}}}{k!}$

(2) $C_k^n=C_{n-k}^n$

解析

$$A=C_5^{11}=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}=462$$

$$B=C_6^{11}=C_{11-6}^{11}=C_5^{11}=462$$

$$C=C_7^{11}=C_{11-7}^{11}=C_4^{11}=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$$

$$D=C_6^{12}=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=924$$

則 $C<A=B<D$

$D=A+B$（這也是巴斯卡性質）

$D\neq B+C$

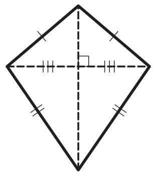
故選(C)

15. 技巧與分析

(1) 圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的半徑

為 $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$

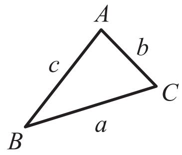
(2) 兩對鄰邊相等的四邊形為鳶形，對角線互相垂直，且其中一條對角線平分另一條對角線



(3) $\triangle ABC$ 的面積

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，

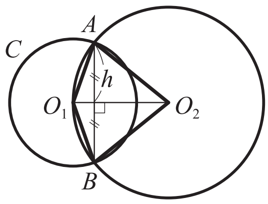
其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$




解析

圓 $C$ 的半徑 $=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+4^2-4\times9}=2$

依題意作圖如下：




$\because\ \overline{AO_2}=3$

$\therefore\ \overline{O_1O_2}=\overline{BO_2}=3$（相同圓的半徑）

而 $\overline{AO_1}=\overline{BO_1}=$ 圓 $C$ 的半徑 $=2$

故四邊形 $O_1AO_2B$ 為鳶形，其對角線 $\overline{O_1O_2}$ 與 $\overline{AB}$ 垂直，且 $\overline{AB}$ 被 $\overline{O_1O_2}$ 所平分

(1) $\triangle AO_1O_2$ 的面積：

令 $s=\frac{1}{2}\times(2+3+3)=4$

$\triangle AO_1O_2$ 的面積

$=\sqrt{4(4-2)(4-3)(4-3)}=2\sqrt{2}$

(2) $\triangle AO_1O_2$ 的邊 $\overline{O_1O_2}$ 的高：

設高為 $h$

$\triangle AO_1O_2$ 的面積

$=\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times h=\frac{1}{2}\times3\times h=\frac{3}{2}h$

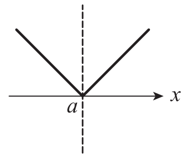
由(1)知：$\frac{3}{2}h=2\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad h=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(3) $\overline{AB}$ 的長：

$\overline{AB}=2\times h=2\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

16. 技巧與分析

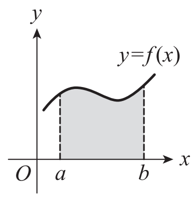
(1) $y=|x-a|$ 的圖形：




(2) 定積分的幾何意義：

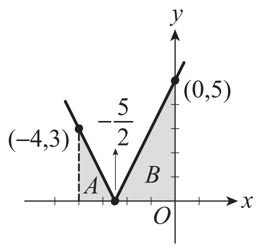
設函數 $f(x)\ge0$，

則 $\int_a^b f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的圖形與 $x$ 軸在區間 $[a,b]$ 所圍的區域面積




解析

$y=|2x+5|$ 的圖形如下：




區域 $A$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3=\frac{9}{4}$

區域 $B$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times5=\frac{25}{4}$

則 $\int_{-4}^{0}|2x+5|dx$

$=$ 區域 $A$、$B$ 的面積和

$=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{34}{4}=\frac{17}{2}$

17. 技巧與分析

(1) 通過相異兩點 $(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$ 的直線斜率 $m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

(2) 導數的定義：

$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

(3) 函數 $f(x)$ 的圖形在 $x=a$ 處之切線斜率為 $f'(a)$

解析

$\because$ 直線 $L$ 與函數 $f(x)$ 的圖形相切於點 $(3,1)$

$\therefore$ 直線 $L$ 是函數 $f(x)$ 的圖形在 $x=3$ 處的切線，其斜率為 $\frac{5-1}{9-3}=\frac{2}{3}$

而 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$

且 $f'(3)$ 是 $f(x)$ 在 $x=3$ 處的切線斜率

因此 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{2}{3}$

18. 技巧與分析

(1) $\int f'(x)dx=f(x)+c$，其中 $c$ 為常數

(2) 設 $f(x)$ 為多項式函數：

①若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有極值，則 $f'(a)=0$

②

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | 極大值 $f(a)$ | ↘ |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

③

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | 極小值 $f(a)$ | ↗ |
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

解析

$\because$ $\int f'(x)dx$

$=\int (x^2-2x-3)dx$

$=\frac{1}{2+1}x^{2+1}-2\times\frac{1}{1+1}x^{1+1}-3x+c$

$=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+c$，其中 $c$ 為常數

$\therefore$ 可設 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+k$

而 $f(0)=0-0-0+k=k$

又 $f(0)=6$，因此 $k=6$

則 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+6$

(1) 令 $f'(x)=0$

$\Rightarrow$ $x^2-2x-3=0$

$\Rightarrow$ $(x+1)(x-3)=0$

$\Rightarrow$ $x=-1$ 或 $3$

而 $f(-1)=\frac{1}{3}\times(-1)^3-(-1)^2-3\times(-1)+6$

$=\frac{23}{3}$

$f(3)=\frac{1}{3}\times 3^3-3^2-3\times 3+6=-3$

(2) 若 $f'(x)<0$

$\Rightarrow$ $x^2-2x-3<0$

$\Rightarrow$ $(x+1)(x-3)<0$

$\Rightarrow$ $-1<x<3$

(3) 若 $f'(x)>0$

$\Rightarrow$ $x^2-2x-3>0$

$\Rightarrow$ $(x+1)(x-3)>0$

$\Rightarrow$ $x<-1$ 或 $x>3$

將(1)、(2)、(3)列表如下：

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{23}{3}$ | ↘ | $-3$ | ↗ |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

因此 $f(x)$ 的相對極小值為 $f(3)=-3$

19. 技巧與分析

代換積分：

$\int_a^b\left[f(g(x))\times g'(x)\right]dx$

$=\int_{g(a)}^{g(b)}f(u)du$，

其中 $u=g(x)$ 是可微分函數

解析

令 $u=4x-1$，則 $\frac{du}{dx}=4$

$\Rightarrow$ $du=4dx$ $\Rightarrow$ $dx=\frac{1}{4}du$

| $x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|
| $u$ | $0$ | $1$ |

所求 $=\int_0^1 u^3\times\frac{1}{4}du=\int_0^1\frac{1}{4}u^3du$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3+1}u^{3+1}\Big|_0^1=\frac{1}{16}u^4\Big|_0^1$

$=\frac{1}{16}\times 1^4-\frac{1}{16}\times 0^4=\frac{1}{16}$

20. 技巧與分析

設方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）

有兩根 $\alpha$ 、 $\beta$ ，

(1) 兩根和： $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

(2) 兩根積： $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

(3) 方程式有實根：判別式 $b^2-4ac\geq 0$

解析

設 $x^2+(a-5)x+(a+3)=0$ 的兩根為 $\alpha$ 、 $\beta$

(1) 兩根和： $\alpha+\beta=-\dfrac{a-5}{1}=-a+5$

$\because$ 兩根均為正根

$\therefore$ $-a+5>0 \Rightarrow a<5$

(2)兩根積： $\alpha\beta=\dfrac{a+3}{1}=a+3$

$\because$ 兩根均為正根

$\therefore$ $a+3>0 \Rightarrow a>-3$

(3) 方程式的判別式：

$(a-5)^2-4\times1\times(a+3)$

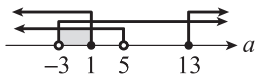
$=a^2-14a+13=(a-1)(a-13)$

$\because$ 方程式的兩根均為正根

$\therefore$ 判別式 $(a-1)(a-13)\geq 0$

$\Rightarrow$ $a\leq 1$ 或 $a\geq 13$

由(1)、(2)、(3)知： $-3<a\leq 1$

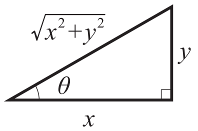



而滿足 $a$ 的實數解為 $m<a\leq n$

故 $m=-3$ ， $n=1$ ，因此 $m+n=-3+1=-2$

21. 技巧與分析

(1) $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 的對應三角形如下：




(2) $\sin(360^\circ\times n+\theta)=\sin\theta$ ，

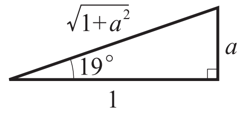
其中 $n$ 為整數

(3) $\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta$

(4) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

解析

$\tan 19^\circ=a=\dfrac{a}{1}$ ，依此作圖如下：




則 $\sin 19^\circ=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ ， $\cos 19^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

(1) $\sin 2018^\circ=\sin(5\times360^\circ+218^\circ)=\sin 218^\circ$

$=\sin(180^\circ+38^\circ)=-\sin 38^\circ$

(2) $\sin 38^\circ=\sin(2\times19^\circ)=2\sin 19^\circ\cos 19^\circ$

$=2\times\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{2a}{1+a^2}$

由(1)、(2)知： $\sin 2018^\circ=-\sin 38^\circ=\dfrac{-2a}{1+a^2}$

22. 技巧與分析

(1) $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

(2) 二次函數的配方法

(3) $-1\leq\sin x\leq 1$

解析

$f(x)=4\sin x+\cos 2x+7$

$=4\sin x+(1-2\sin^2 x)+7$

$=-2\sin^2 x+4\sin x+8$

$=-2(\sin^2 x-2\sin x+1)+8+2$

$=-2(\sin x-1)^2+10\leq 10$

當 $\sin x=1$ 時， $f(x)$ 有最大值 $M=10$

而 $-1\leq\sin x\leq 1$

當 $\sin x=-1$ 時， $f(x)$ 有最小值

$m=-2(-1-1)^2+10=2$

因此 $m+M=2+10=12$

23. 〈法一〉

技巧與分析

(1) 當 $0<a<1$ 時：

若 $0<x<y$，則 $\log_a x>\log_a y$

(2) 當 $a>1$ 時：

若 $0<x<y$，則 $\log_a x<\log_a y$

(3) 換底公式：

$$\log_a b=\frac{\log b}{\log a}，$$

其中 $a$、$b>0$ 且 $a\neq 1$

解析

(1) $\because\quad 0.3<0.5<1$

$\therefore\quad \log_{0.3}0.3>\log_{0.3}0.5>\log_{0.3}1$

$\Rightarrow\quad 1>a>0$

(2) $b=\log_3 5>\log_3 3=1$

$c=\log_{30}50>\log_{30}30=1$

$$b-c=\log_3 5-\log_{30}50$$

$$=\frac{\log 5}{\log 3}-\frac{\log 50}{\log 30}$$

$$=\frac{\log 5}{\log 3}-\frac{\log(5\times 10)}{\log(3\times 10)}$$

$$=\frac{\log 5}{\log 3}-\frac{\log 5+\log 10}{\log 3+\log 10}$$

$$=\frac{\log 5}{\log 3}-\frac{\log 5+1}{\log 3+1}$$

$$=\frac{\log 5(\log 3+1)-\log 3(\log 5+1)}{\log 3(\log 3+1)}$$

$$=\frac{\log 5-\log 3}{\log 3(\log 3+1)}>0$$

則 $b>c>1$

由(1)、(2)知：$b>c>a$

〈法二〉

技巧與分析

(1) 換底公式：

$$\log_a b=\frac{\log b}{\log a}，$$

其中 $a$、$b>0$ 且 $a\neq 1$

(2) 常用對數值：

$\log 2=0.3010$

$\log 3=0.4771$

解析

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2$$

$$=1-0.3010=0.6990$$

$$a=\log_{0.3}0.5=\frac{\log 0.5}{\log 0.3}=\frac{\log(5\times 10^{-1})}{\log(3\times 10^{-1})}$$

$$=\frac{\log 5+\log 10^{-1}}{\log 3+\log 10^{-1}}=\frac{0.6990+(-1)}{0.4771+(-1)}\fallingdotseq 0.5756$$

$$b=\log_3 5=\frac{\log 5}{\log 3}=\frac{0.6990}{0.4771}\fallingdotseq 1.4651$$

$$c=\log_{30}50=\frac{\log 50}{\log 30}=\frac{\log(5\times 10)}{\log(3\times 10)}$$

$$=\frac{\log 5+\log 10}{\log 3+\log 10}=\frac{0.6990+1}{0.4771+1}\fallingdotseq 1.1502$$

故 $b>c>a$

24. 技巧與分析

(1) 當骰子相同時，此題為重複組合的概念

(2) 當骰子相異時，此題為重複排列的概念

(3) 重複組合：

① $H^n_k=C^{n+k-1}_k$

② $n$ 類相異物可以重複取出 $k$ 個的方法有 $H^n_k$ 種

解析

(1) 當四個骰子相同時：

①點數3沒有出現的情形：

從5種點數（1、2、4、5、6點）可重複地出現4個點數

有 $H^5_4=C^{5+4-1}_4=C^8_4=70$ 種

②點數3只有出現一次的情形：

從5種點數（1、2、4、5、6點）可重複地出現3個點數

有 $H^5_3=C^{5+3-1}_3=C^7_3=35$ 種

由①、②知：

同時投擲四個相同的公正骰子，點數3出現至多一次的情形共有 $70+35=105$ 種

(2) 當四個骰子相異時：

①點數3沒有出現的情形：

□□□□

每個骰子出現的點數（1、2、4、5、6點）有5種可能

則有 $5\times 5\times 5\times 5=625$ 種

②點數3只有出現一次的情形：

3□□□，□3□□，□□3□，

□□□3

其他骰子出現的點數（1、2、4、5、6點）有5種可能

則有$4\times(5\times5\times5)=500$種

由①、②知：

同時投擲四個相異的公正骰子

點數3出現至多一次的情形共有

$625+500=1125$種

〔結論〕：本題的題意不清楚，應該予以送分

25.〈法一〉

技巧與分析

(1) 圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

圓心$\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$，

半徑$=\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$

(2) 圓心$(h,k)$，半徑$r$的圓之參數式

$\begin{cases}x=h+r\cos\theta\\ y=k+r\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

(3) $a\sin\theta+b\cos\theta+c$的

最大值$=\sqrt{a^2+b^2}+c$，

最小值$=-\sqrt{a^2+b^2}+c$

解析

圓$x^2+y^2-6x+8y=0$的

圓心$\left(-\frac{-6}{2},-\frac{8}{2}\right)=(3,-4)$

半徑$=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+8^2-4\times0}=5$

則圓的參數式為$\begin{cases}x=3+5\cos\theta\\ y=-4+5\sin\theta\end{cases}$，

其中$0\le\theta<2\pi$

$\because$ $P(x,y)$為圓上的動點

$\therefore$ $4x+3y+5$

$=4(3+5\cos\theta)+3(-4+5\sin\theta)+5$

$=15\sin\theta+20\cos\theta+5$

其最大值$M=\sqrt{15^2+20^2}+5=25+5=30$

最小值$m=-\sqrt{15^2+20^2}+5=-25+5=-20$

故$M+m=30+(-20)=10$

〈法二〉

技巧與分析

(1) 柯西不等式：

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$

(2) 絕對值不等式：

$[f(x,y)]^2\le k^2$

$\Leftrightarrow$ $|f(x,y)|\le k$

$\Leftrightarrow$ $-k\le f(x,y)\le k$

其中$k$為正數

解析

圓$x^2+y^2-6x+8y=0$

$\Rightarrow$ $(x^2-6x+3^2)+(y^2+8y+4^2)=3^2+4^2$

$\Rightarrow$ $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

由柯西不等式知：

$(4^2+3^2)\times\left[(x-3)^2+(y+4)^2\right]$

$\ge[4(x-3)+3(y+4)]^2$

$\Rightarrow$ $25\times25\ge(4x+3y)^2$

$\Rightarrow$ $(4x+3y)^2\le25^2$

$\Rightarrow$ $|4x+3y|\le25$

$\Rightarrow$ $-25\le4x+3y\le25$

$\overset{+5}{\Rightarrow}$ $-20\le4x+3y+5\le30$

故$4x+3y+5$的最大值$M=30$

最小值$m=-20$

因此$M+m=30+(-20)=10$