

數學科

陳清風／桃園高中



106

學

測



考情最前線

龍騰網站

可下載檔案



戰地記者龍騰報導

近幾年來，學測儼然成為升上大學的主要管道，今年試題是採用 99 課綱的第五年，整體而言，今年的試題難度偏高，題目靈活，文字閱讀量適中，計算量適當，出現好幾題不錯的題目（如第 9、10、11、A、D、G 題），是一份對中上程度的考生，鑑別度高的試題。可是缺乏基本題、題目敘述「不親切」、題題不易拿分等，恐怕會讓中等以下程度的考生很受挫。這也意味著數學將是決定今年總級分高低的關鍵科目。

發行人：李枝昌
發行所：龍騰文化事業股份有限公司
網址：<http://www.lungteng.com.tw>

電話：02-22982933
傳真：02-22989766
出刊日：106 年 1 月 26 日

→ 命中率分析 2

→ 大考風向球 4

→ 試題大剖析 8



106 學測命題特色

前言

甄選入學已成升大學主流，今年「繁星推薦入學」共有 68 所大學、1774 個學系參加，提供 1 萬 7589 個招生名額，另「個人申請入學」則有 69 所大學、2001 個學系參加，招生名額 5 萬 5954 個，兩個管道總計招生名額超過 7 萬個，寫下歷年新高。臺大等多所頂尖大學甄選比率都超過五成，交大近七成，清大近八成。使得這份學測試題受到多方的關注。

99 課綱將數學課程的內容簡化，102 年首次採用此課綱命題，一般預測考題會比往年簡單，但卻是出乎大家意料之外的難。而 103 年第二次採用，則將難易度調回來了，是一份難易適中的試題。104 年第三次採用，又是意外的難。105 年第四次採用，再調回難易適中的試題。今年（106 年）第五次採用，果然再擺盪回難的一方。

現就個人見解，針對今年的試題提出以下幾點分析與建議。

歷年題型分配

今年試題的題型沒有改變，仍然包含單選題、多選題及選填題三大題，各大題的題數略有更動，但總題數（20 題）及配分（每題 5 分）則維持不變。

年度 \ 題型	單選題	多選題	選填題	總題數
102 年	6	6	8	20
103 年	6	6	8	20
104 年	4	6	10	20
105 年	6	7	7	20
106 年	7	6	7	20

106 學測試題分布

今年試題的分布如下表（單元名稱的劃分是依據 99 課綱）：

冊	章	單元名稱	題號	配分	小計
一	1	數與式	1	5	25
	2	多項式函數	8, C	10	
	3	指數、對數函數	2, E	10	
二	1	數列與級數	A	5	25
	2	排列、組合	7, 12	10	
	3	機率	F	5	
	4	數據分析	5	5	
三	1	三角	6, 11	10	25
	2	直線與圓	9, G	10	
	3	平面向量	B	5	
四	1	空間向量	4, 13	10	25
	2	空間中的平面與直線	10	5	
	3	矩陣	D	5	
	4	二次曲線	3	5	

觀察上表後，有以下看法：

1. 以冊來分類：配分相當平均，每一冊各占四分之一（各 25 分）。
2. 以章來分類：試題涵蓋每一單元，這應是歷年學測的命題原則。

試題評析

底下針對今年數學考題作評析：

1. 第 1 題：往年的第 1 題幾乎都是送分題，但這題放第 1 題難度偏高。
2. 第 2 題：將指數結合情境出題，很新穎。
3. 第 3 題：巧妙的設計雙曲線、漸近線與拋物線的考題，很用心。可是會有考到拋物線參數式（不在課綱中）的疑慮。
4. 第 4 題：想到定坐標及兩質點速度相等，再利用兩點距離公式就可解出。
5. 第 5 題：直接從散布圖判斷最高溫與溫差為負相關難度不高，但還要比較相關性的強弱就很困難了。較簡單的方法就是依照題目的指示，將 12 個點的坐標約略找出，重新繪製最高溫與溫差的散布圖，較容易判斷，只是很花時間喔！
6. 第 6 題：雖然是簡單的餘弦函數值正負判定，但弧度在第三冊只介紹一下，相信多數學生很陌生，恐怕會看不懂題意。尤其將數乙(上)的三角函數移到高三下講授的學校會有點吃虧。
7. 第 7 題：這題應是近年來大考試題中，排列組合最難的一題。與往年逐一排出就可解出的題目，很不同。

大考風向球

8. 第 8 題：若選項中直接給定 m, n 的值，則難度降低許多。像這種有多種情形的題目，舉反例判定錯誤較容易，但要說它正確還是會擔心漏掉某些情形。
9. 第 9 題：若沒有想到畫出兩點連線段的中垂線，則很難判定 5 個選項的對錯。考驗學生的連結能力了。
10. 第 10 題：空間直線方程式的對稱比例式、兩面式與參數式都有，兩直線平行、交一點與歪斜全考，要學的完整才有機會答對此題，有鑑別度。
11. 第 11 題：是多選題中可以很扎實計算的一題，正弦定理、餘弦定理與面積公式全考了，應是考生熟悉且較有把握的一題。
12. 第 12 題：這種用集合的文氏圖估計個數的問題，不陌生，但結合不等式還是有一定的難度。
13. 第 13 題：利用選項(1)的引導，回答另 4 個選項，難度很高，恐怕是少數的考生才能辦到。若用直觀的判定 $\angle BAC$ 大於 $\angle BDC$ ，則會是較容易的解題方向。
14. 第 A 題：依所給的數據一一代入遞迴式就可解出。但是，放在選填題的第 1 題，還附帶二次多項式，讓人覺得給分不夠大方。
15. 第 B 題：這一題算是考古題了，但有點考到向量的共線定理（不在課綱中），應避免。
16. 第 C 題：這題利用係數是正整數、答案為一位數且只有一解的暗示，直接分解為 $(5x+1)(x+1)(x+1)$ 較快，否則會花較多時間分析。
17. 第 D 題：用等差數列 1,2,3,4,5,6,7,8,9 代入，會簡單很多。
18. 第 E 題：題目不難，但敘述可能會讓很多考生嚇到。
19. 第 F 題：題意明確且常見，能做好分類，就可解出。
20. 第 G 題：將立體的題意畫成平面，再利用相似三角形就可解出。若能將題目改成必須使用圓方程式及直線方程式，則會較貼近高中教材。
21. 缺「概念題」：往年都有那種「筆在手中轉轉就可答對的題目」，今年很缺乏。
22. 數據美化：數據的設計可看出命題者的用心。
23. 應用題夠多。
24. 計算量適當，符合學測精神。
25. 跨章節的題目較往年少。

結語

整體而言，題目靈活，文字閱讀量適中，計算量適當，出現好幾題不錯的題目（如第 9、10、11、A、D、G 題），是一份對中上程度的考生，鑑別度高的試題。可是缺乏基本題、題目敘述「不親切」、題題不易拿分等，恐怕會讓中等以下程度的考生很受挫。這也意味著數學將是決定今年總級分高低的關鍵科目。

未來命題趨勢

大考中心所列數學考科的測驗目標，為評量考生是否具備「概念性」、「程序性」及「解題能力」等三方面的知識與能力。學測應以評量前二項為主，較偏向概念性知識與程序性知識，而且這三方面知能的試題應以各占三分之一的原則組題。相信大考中心會審慎檢視這份試卷，讓來年的試題都符合學測評量的目標。

在 99 課綱的框架內，對未來學測的命題趨勢有以下幾點看法：

1. **基本概念**：著重基本概念的靈活應用，一直是學測命題的中心想法，加強基本概念的練習是必做的基本功夫。
2. **情境題**：生活化的試題年年都有，也是必然的命題趨勢，由於這類試題往往會比一般題目為長，所以應培養仔細閱讀題目的耐性，以及加強將問題與教材連結的能力。
3. **熱門單元**：有幾個預期會考的單元沒出現，反而可能會成為明年的大熱門，值得注意。例如：虛根成對定理、迴歸直線、貝氏定理、轉移矩陣等。
4. **三星以下的單元**：指考對標示三星以下的單元是不直接命題的，這些單元往往會出在學測，例如：二次曲線（一星），數列與級數（二星），數與式（二星）等。
5. **跨章節題**：學測從 14 個單元中命 20 題，必然會有幾題涵蓋兩個單元以上，也藉此提高試題的鑑別度。因此，加強單元與單元之間的連結能力，多練習跨章節的題目，才能在眾多考生中勝出。

以上提出個人淺見供大家參考，尚祈前輩先進們不吝賜教。



第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 35 分）

（此份試卷解題係依據大學考試中心於 106 年 1 月 21 日所公告之答案為主）

說明：第1題至第7題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得5分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1 數據分析

已知某校老師玩過「寶可夢」的比率為 r_1 ，而學生玩過的比率為 r_2 ，其中 $r_1 \neq r_2$ 。由下列選項中的資訊，請選出可以判定全校師生玩過「寶可夢」的比率之選項。

- (1) 全校老師與學生比率 (2) 全校老師人數 (3) 全校學生人數 (4) 全校師生人數
(5) 全校師生玩過「寶可夢」人數。

出 處：龍騰版《數學 1》第 1 章 數與式

《稱霸數學（1~4 冊）學測總複習講義》第 1 單元 數與式

解題觀念：用符號代表數及比率的定義。

答 案：(1)

解 析：設全校老師人數 n_1 ，學生人數 n_2 。

因為玩過「寶可夢」的老師有 $n_1 r_1$ 人，學生有 $n_2 r_2$ 人，

所以全校玩過「寶可夢」的比率為

$$\frac{n_1 r_1 + n_2 r_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \times r_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \times r_2,$$

其中 $\frac{n_1}{n_1 + n_2}$ ， $\frac{n_2}{n_1 + n_2}$ 分別為全校老師與學生的比率。

故選(1)。



2 指數律

某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

(1)1.7 (2)3 (3)5.2 (4)9 (5)81。

出處：龍騰版《數學 1》第 3 章 指數、對數函數

《稱霸數學（1~4 冊）學測總複習講義》第 3 單元 指數、對數函數

解題觀念：指數律及指數的運算。

答案：(3)

解析：依題意，得 $\left((b^2)^2\right)^2 = 81^3 \Rightarrow b^8 = 3^{12}$ 。

因此， $b = 3^{\frac{12}{8}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} \approx 5.2$ 。

故選(3)。

3 雙曲線的漸近線

設 $\Gamma: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 為坐標平面上的一雙曲線，且其通過第一象限的漸近線為 l 。考慮動點 (t, t^2) ，從時間 $t=0$ 時出發。當 $t>0$ 時，請選出正確的選項。

- (1)此動點不會碰到 Γ ，也不會碰到 l
- (2)此動點會碰到 Γ ，但不會碰到 l
- (3)此動點會碰到 l ，但不會碰到 Γ
- (4)此動點會先碰到 Γ ，再碰到 l
- (5)此動點會先碰到 l ，再碰到 Γ 。

出處：龍騰版《數學 4》第 4 章 二次曲線

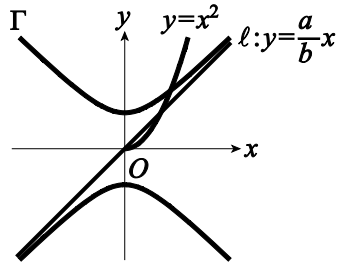
《稱霸數學（1~4 冊）學測總複習講義》第 14 單元 二次曲線

解題觀念：雙曲線的標準式及其漸近線，拋物線 $y = x^2$ 上的點坐標形式。

答案：(5)

試題大剖析

解 析：動點 $(x, y) = (t, t^2)$ 為拋物線 $y = x^2$ 上的點



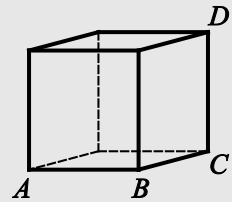
由上圖得知：此動點會先碰到 ℓ （因為當 $x > 0$ 且 x 接近 0 時， $x^2 < \frac{a}{b}x$ ），再碰到 Γ 。

故選(5)。

4 空間中兩點的距離

在右下圖的正立方體上有兩質點分別自頂點 A, C 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 B, D 前進，且在1秒後分別同時到達 B, D 。請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項。

- (1) 兩質點的距離固定不變
- (2) 兩質點的距離越來越小
- (3) 兩質點的距離越來越大
- (4) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最小
- (5) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最大。



出 處：龍騰版《數學4》第1章 空間向量

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第11單元 空間向量

解題觀念：定坐標、配方法及兩點距離公式。

答 案：(4)

解 析：如圖，設 t ($0 \leq t \leq 1$) 秒時，一質點位於 $P(1, t, 0)$ ，

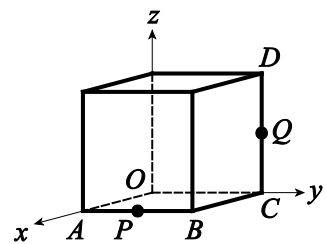
另一質點位於 $Q(0, 1, t)$ 。

因為

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{1 + (t-1)^2 + t^2} \\ &= \sqrt{2t^2 - 2t + 2} \\ &= \sqrt{2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

所以當 $t = \frac{1}{2}$ 時， \overline{PQ} 有最小值 $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

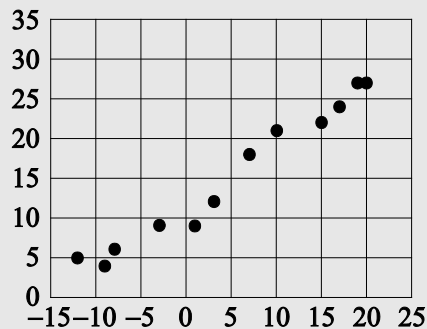
故選(4)。





5 相關係數

下圖是某城市在 2016 年的各月最低溫（橫軸 x ）與最高溫（縱軸 y ）的散布圖。



今以溫差（最高溫減最低溫）為橫軸且最高溫為縱軸重新繪製一散布圖。試依此選出正確的選項。

- (1) 最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強
- (2) 最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱
- (3) 最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強
- (4) 最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱
- (5) 最高溫與溫差為零相關。

出處：龍騰版《數學 2》第 4 章 數據分析

《稱霸數學（1~4 冊）學測總複習講義》第 7 單元 數據分析

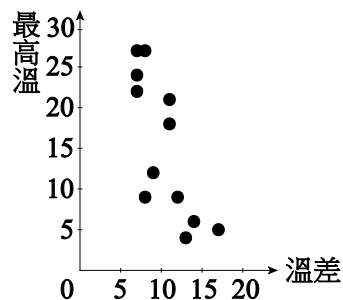
解題觀念：散布圖與相關係數的意義及關係。

答案：(4)

解析：依散布圖的點由左而右將各月的最低溫，最高溫及溫差列表如下（溫度是大約值）：

最低溫	-12	-9	-8	-3	1	3	7	10	15	17	19	20
最高溫	5	4	6	9	9	12	18	21	22	24	27	27
溫差	17	13	14	12	8	9	11	11	7	7	8	7

再以溫差為橫軸，最高溫為縱軸繪製散布圖如下：



因為這散布圖顯示溫差越大最高溫有越低的趨勢，所以兩者為負相關，又此圖比「最高溫與最低溫的散布圖」較不接近一直線，因此相關性較弱。故選(4)。

6 餘弦函數值的定義

試問有多少個實數 x 滿足 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x^\circ \leq \cos x$?

(1) 0 個 (2) 1 個 (3) 2 個 (4) 4 個 (5) 無窮多個 .

出 處：龍騰版《數學 3》第 1 章 三角

《稱霸數學（1~4 冊）學測總複習講義》第 8 單元 三角

解題觀念：度與弧度的單位換算及餘弦函數值的定義 .

答 案：(1)

解 析：因為 $\pi \approx 3.14$ ，所以 $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ ， $\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$ ，

即 x° 約介於 1.57° 與 4.71° 之間，因此 $\cos x^\circ > 0$.

又因為 $\frac{\pi}{2}$ 弧度 $\leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 弧度，

所以 $\cos x < 0$ 或 $\cos x = 0$.

於是 $\cos x^\circ$ 恆大於 $\cos x$.

故選(1) .

7 排列

小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫 . 他的餐點共有四種選擇：

牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯 . 小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：

(甲) 每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次

(乙) 連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食

根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

(1) 52 (2) 60 (3) 68 (4) 76 (5) 84 .

出 處：龍騰版《數學 2》第 2 章 排列、組合

《稱霸數學（1~4 冊）學測總複習講義》第 5 單元 排列、組合

解題觀念：要會將題目分類討論 .

答 案：(2)



解 析：令 R 表飯， N 表麵。分類如下：

$$(1) \text{ 三 } N: NRNRN \rightarrow \text{有 } C_1^2 \times \frac{3!}{2!} \times 2! = 12 \text{ 種}$$

$$(2) \text{ 二 } N: \textcircled{1} RNRNR \rightarrow \text{有 } C_1^2 \times \frac{3!}{2!} \times 2! = 12 \text{ 種}$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{2} RRNRN \\ RNRNR \\ NRRNR \\ NRNRN \end{array} \right\} \text{有 } 4 \times (2! \times C_1^2 \times 2!) = 32 \text{ 種}$$

$$\textcircled{3} NRRRN \rightarrow \text{有 } 2! \times C_1^2 = 4 \text{ 種}$$

根據加法原理，共 $12+12+32+4=60$ 種。

故選(2)。

二、多選題（占 30 分）

說明：第8題至第13題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯2個選項者，得1分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8 單項函數與多項式方程式

設 m, n 為小於或等於4的相異正整數且 a, b 為非零實數。已知函數 $f(x) = ax^m$ 與函數 $g(x) = bx^n$ 的圖形恰有3個相異交點，請選出可能的選項。

- (1) m, n 皆為偶數且 a, b 同號
- (2) m, n 皆為偶數且 a, b 異號
- (3) m, n 皆為奇數且 a, b 同號
- (4) m, n 皆為奇數且 a, b 異號
- (5) m, n 為一奇一偶。

出 處：龍騰版《數學1》第2章 多項式函數

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第2單元 多項式函數

解題觀念：函數圖形的交點個數就是方程式實根的個數。

答 案：(1)(3)

試題大剖析

解 析：解 $\begin{cases} y = ax^m \\ y = bx^n \end{cases} \Rightarrow ax^m = bx^n \Rightarrow x^m = \frac{b}{a}x^n$.

不失一般性，選滿足方程式有3個相異實根的選項：

(1) $x^4 = \frac{b}{a}x^2 \Rightarrow x^2\left(x^2 - \frac{b}{a}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ (重根) 或 $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ ，有3個相異實根 .

(2) 同(1)，因為 $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ 為虛數，所以方程式恰1個實根 .

(3) $x^3 = \frac{b}{a}x \Rightarrow x\left(x^2 - \frac{b}{a}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ ，有3個相異實根 .

(4) 同(3)，因為 $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ 為虛數，所以方程式恰1個實根 .

(5) 令 $m = 4$ ， $n = 3$ ，則 $x^4 = \frac{b}{a}x^3 \Rightarrow x^3\left(x - \frac{b}{a}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 $\frac{b}{a}$ ，

有2個相異實根，得知此選項不正確 .

故選(1)(3) .

9 直線與圓

設 Γ 為坐標平面上的圓，點 $(0,0)$ 在 Γ 的外部且點 $(2,6)$ 在 Γ 的內部 . 請選出正確的選項 .

- (1) Γ 的圓心不可能在第二象限
- (2) Γ 的圓心可能在第三象限且此時 Γ 的半徑必定大於10
- (3) Γ 的圓心可能在第一象限且此時 Γ 的半徑必定小於10
- (4) Γ 的圓心可能在 x 軸上且此時圓心的 x 坐標必定小於10
- (5) Γ 的圓心可能在第四象限且此時 Γ 的半徑必定大於10 .

出 處：龍騰版《數學3》第2章 直線與圓

《稱霸數學(1~4冊)學測總複習講義》第9單元 直線與圓

解題觀念：利用中垂線的性質及圓的定義解出 .

答 案：(5)

解 析：點 $(0,0)$ 與 $(2,6)$ 連線段的中垂線為

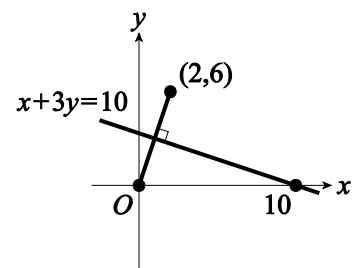
$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow x + 3y = 10 .$$

依題意，利用「中垂線上的點到兩端點等距離」的性質，

得知圓心落在半平面 $x + 3y > 10$ 的區域內，

即點 $(2,6)$ 那一側 .

故選(5) .





10 空間中兩直線的關係

坐標空間中有三直線 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$, $L_2: \begin{cases} x-2y+2z=-4 \\ x+y-4z=5 \end{cases}$, $L_3: \begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$, t 為實數.

請選出正確的選項.

- (1) L_1 與 L_2 的方向向量互相垂直
- (2) L_1 與 L_3 的方向向量互相垂直
- (3) 有一個平面同時包含 L_1 與 L_2
- (4) 有一個平面同時包含 L_1 與 L_3
- (5) 有一個平面同時包含 L_2 與 L_3 .

出處：龍騰版《數學4》第2章 空間中的平面與直線

《稱霸數學(1~4冊)學測總複習講義》第12單元 空間中的平面與直線

解題觀念：了解空間中直線方程式的三種形式，並能判定它們彼此的相交狀況。

答案：(2)(3)(4)

解析：將 L_1 , L_2 改寫為參數式，得

$$L_1: \begin{cases} x=1+2s \\ y=-1+2s \\ z=s \end{cases} (s \in \mathbb{R}), \quad L_2: \begin{cases} x=2+2k \\ y=3+2k \\ z=k \end{cases} (k \in \mathbb{R}).$$

(1) 因為 $\vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_2 = (2, 2, 1) \cdot (2, 2, 1) = 9 \neq 0$ ，所以 $\vec{\ell}_1$ 與 $\vec{\ell}_2$ 不垂直。

(2) 因為 $\vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_3 = (2, 2, 1) \cdot (-1, -1, 4) = 0$ ，所以 $\vec{\ell}_1 \perp \vec{\ell}_3$ 。

(3) 將 L_1 上的點 $(1, -1, 0)$ 代入 L_2 ，得

$$\begin{cases} 1=2+2k \\ -1=3+2k \\ 0=k \end{cases} \text{ (不合)}$$

又 $\vec{\ell}_1 \parallel \vec{\ell}_2$ ，因此 $L_1 \parallel L_2$ ，於是此選項正確。

$$(4) \text{ 解 } \begin{cases} 1+2s=-t \\ -1+2s=-2-t \\ s=4+4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2s+t=-1 \\ 2s+t=-1 \\ s-4t=4 \end{cases} \Rightarrow t=-1, s=0.$$

得知 L_1 與 L_3 交一點，於是此選項正確。

$$(5) \text{ 解 } \begin{cases} 2+2k=-t \\ 3+2k=-2-t \\ k=4+4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k+t=-2 \\ 2k+t=-5 \\ k-4t=4 \end{cases} \Rightarrow t, k \text{ 無解.}$$

得知 L_2 與 L_3 歪斜，於是此選項不正確。

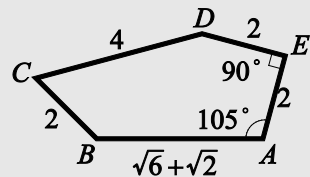
故選(2)(3)(4)。

11 解三角形

最近數學家發現一種新的可以無縫密鋪平面的凸五邊形 $ABCDE$ ，其示意圖如下。

關於這五邊形，請選出正確的選項。

- (1) $\overline{AD} = 2\sqrt{2}$
- (2) $\angle DAB = 45^\circ$
- (3) $\overline{BD} = 2\sqrt{6}$
- (4) $\angle ABD = 45^\circ$
- (5) $\triangle BCD$ 的面積為 $2\sqrt{2}$ 。



出處：龍騰版《數學3》第1章 三角

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第8單元 三角

解題觀念：正弦定理、餘弦定理與三角形面積公式。

答案：(1)(4)

解析：(1) 利用畢氏定理，得 $\overline{AD} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 。

(2) $\angle DAB = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$ 。

(3) 利用餘弦定理，得

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(2\sqrt{2})\cos 60^\circ \\ &= (8 + 4\sqrt{3}) + 8 - (4\sqrt{3} + 4) = 12, \end{aligned}$$

即 $\overline{BD} = 2\sqrt{3}$ 。

(4) 利用正弦定理，得

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin \angle ABD} \Rightarrow 2\sqrt{3} \sin \angle ABD = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

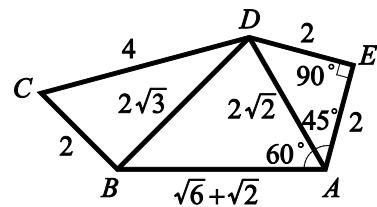
解得 $\sin \angle ABD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即 $\angle ABD = 45^\circ$ 。

(5) 在 $\triangle BCD$ 中，因為

$$4^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2,$$

所以 $\triangle BCD$ 為直角三角形，其面積為 $\frac{2 \times 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ 。

故選(1)(4)。





12 文氏圖

某班級 50 位學生，段考國文、英文、數學及格的人數分別為 45、39、34 人，且英文及格的學生國文也都及格。現假設數學和英文皆及格的有 x 人，數學及格但英文不及格的有 y 人。請選出正確的選項。

- (1) $x + y = 39$
- (2) $y \leq 11$
- (3) 三科中至少有一科不及格的學生有 $39 - x + y$ 人
- (4) 三科中至少有一科不及格的學生最少有 11 人
- (5) 三科中至少有一科不及格的學生最多有 27 人。

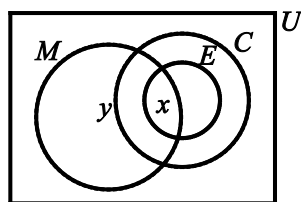
出處：龍騰版《數學 2》第 2 章 排列、組合

《稱霸數學（1~4 冊）學測總複習講義》第 5 單元 排列、組合

解題觀念：依題意畫出文氏圖討論。

答案：(2)(5)

解析：設 C, E, M 分別表國文，英文，數學及格的人所成的集合，
依題意畫文氏圖如下（ U 表全班所成的集合）：



- (1) $x + y = n(M) = 34$.
- (2) $y \leq n(E') = 50 - 39 = 11$.
- (3) 至少一科不及格人數 $= n(U) - n(M \cap E \cap C) = 50 - x$.
- (4) 因為 x 最大為 $n(M) = 34$ ，所以 $50 - x$ 最小為 $50 - 34 = 16$.
- (5) 因為 y 最大為 11 且 $x + y = 34$ ，所以 x 最小為 $34 - 11 = 23$ ，
因此 $50 - x$ 最大為 $50 - 23 = 27$.

故選(2)(5)。

13 空間向量的運算

空間中有一四面體 $ABCD$. 假設 \vec{AD} 分別與 \vec{AB} 和 \vec{AC} 垂直, 請選出正確的選項 .

- (1) $\vec{DB} \cdot \vec{DC} = \overline{DA}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- (2) 若 $\angle BAC$ 是直角, 則 $\angle BDC$ 是直角
- (3) 若 $\angle BAC$ 是銳角, 則 $\angle BDC$ 是銳角
- (4) 若 $\angle BAC$ 是鈍角, 則 $\angle BDC$ 是鈍角
- (5) 若 $\overline{AB} < \overline{DA}$ 且 $\overline{AC} < \overline{DA}$, 則 $\angle BDC$ 是銳角 .

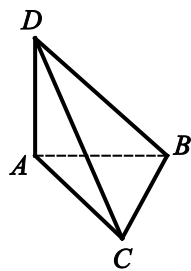
出 處：龍騰版《數學4》第1章 空間向量

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第11單元 空間向量

解題觀念：拆解向量、向量運算性質及簡單邏輯 .

答 案：(3)(5)

解 析：依題意, 圖示如下:



(1) 利用向量的拆解, 得

$$\begin{aligned} \vec{DB} \cdot \vec{DC} &= (\vec{DA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{DA} + \vec{AC}) = |\vec{DA}|^2 + \vec{DA} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{DA} + \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ &= \overline{DA}^2 + 0 + 0 + \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{DA}^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AC} . \end{aligned}$$

(2) 直觀來看: $\angle BAC$ 大於 $\angle BDC$.

因此, 若 $\angle BAC = 90^\circ$, 則 $\angle BDC < 90^\circ$.

(3) 與(2)同理, 若 $\angle BAC < 90^\circ$, 則 $\angle BDC < 90^\circ$.

(4) 與(2)同理,

當 $\angle BAC > 90^\circ$ 時, 並不保證 $\angle BDC > 90^\circ$.

(5) 先用極端值來看: 當 $\angle BAC$ 張到最大, 即成一直線時,

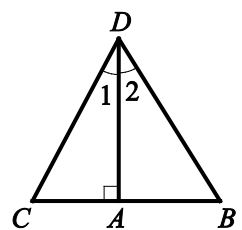
如圖所示, 此時 A, B, C, D 四點共平面 .

因為 $\overline{AB} < \overline{DA}$ 且 $\overline{AC} < \overline{DA}$, 所以 $0^\circ < \angle 1 < 45^\circ$, $0^\circ < \angle 2 < 45^\circ$,

得 $0^\circ < \angle 1 + \angle 2 < 90^\circ$,

即 $\angle BDC$ 是銳角, 推得此選項正確 .

故選(3)(5) .





第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14 - 34）。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A 遞迴數列與二次函數

遞迴數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_n = a_{n-1} + f(n-2)$ ，其中 $n \geq 2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式。若 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ， $a_3 = 5$ ， $a_4 = 12$ ，則 $a_5 = \underline{\textcircled{14}\textcircled{15}}$ 。

出 處：龍騰版《數學 2》第 1 章 數列與級數
《數學 1》第 2 章 多項式函數
《稱霸數學（1~4 冊）學測總複習講義》第 4 單元 數列與級數
第 2 單元 多項式函數

解題觀念：遞迴數列的意涵及二次函數的求值。

答 案：25

解 析：將 $n = 2, 3, 4$ 代入 $a_n = a_{n-1} + f(n-2)$ ，得

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + f(0) \\ a_3 = a_2 + f(1) \\ a_4 = a_3 + f(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 1 + f(0) \\ 5 = 2 + f(1) \\ 12 = 5 + f(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 3 \\ f(2) = 7 \end{cases}$$

設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，得

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

即 $f(x) = x^2 + x + 1$ ，得 $f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 13$ 。

故 $a_5 = a_4 + f(3) = 12 + 13 = 25$ 。

B 平面向量的線性組合

在坐標平面上， $\triangle ABC$ 內有一點 P 滿足 $\vec{AP} = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{6}\right)$ 及 $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{AC}$ 。若 A, P 連線交 \overline{BC} 於 M ，

則 $\vec{AM} = \left(\frac{\textcircled{16}\textcircled{17}}{\textcircled{18}\textcircled{19}}, \frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{\textcircled{22}\textcircled{23}}\right)$ 。(化成最簡分數)

出處：龍騰版《數學3》第3章 平面向量

《稱霸數學(1~4冊)學測總複習講義》第10單元 平面向量

解題觀念：向量的共線性質。

答案： $\left(\frac{40}{21}, \frac{25}{21}\right)$

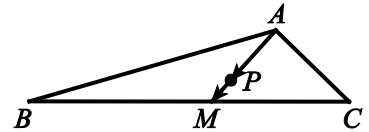
解析：設 $\vec{AM} = t\vec{AP}$ ，則

$$\vec{AM} = t\left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{AC}\right) = \frac{t}{2}\vec{AB} + \frac{t}{5}\vec{AC}.$$

因為 M 在 \overline{BC} 上，所以

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{5} = 1 \Rightarrow t = \frac{10}{7}.$$

$$\text{故 } \vec{AM} = \frac{10}{7}\vec{AP} = \frac{10}{7}\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{40}{21}, \frac{25}{21}\right).$$



C 牛頓定理

若 a 為正整數且方程式 $5x^3 + (a+4)x^2 + ax + 1 = 0$ 的根都是有理根，則 $a = \underline{\textcircled{24}}$ 。

出處：龍騰版《數學1》第2章 多項式函數

《稱霸數學(1~4冊)學測總複習講義》第2單元 多項式函數

解題觀念：有三個有理根就是可分解成三個一次整係數因式。

答案：7

解析：因為有三個有理根，所以有三個整係數一次因式，

又由牛頓定理知：整係數一次因式只可能是

$$x+1, x-1, 5x+1, 5x-1.$$

由 a 是正整數及比較首項係數、常數項，得

$$5x^3 + (a+4)x^2 + ax + 1 = (5x+1)(x+1)(x+1)$$

$$= 5x^3 + 11x^2 + 7x + 1.$$

故 $a = 7$ 。

**D 解三元一次方程組**

設 a_1, a_2, \dots, a_9 為等差數列且 k 為實數。若方程組
$$\begin{cases} a_1x - a_2y + 2a_3z = k + 1 \\ a_4x - a_5y + 2a_6z = -k - 5 \\ a_7x - a_8y + 2a_9z = k + 9 \end{cases}$$
 有解，則

$k = \underline{\quad 25 \quad 26 \quad}$ 。

出 處：龍騰版《數學4》第3章 矩陣

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第13單元 矩陣

解題觀念：有解包括無限多組解。

答 案：-5

解 析：設公差為 d 。

由第二式減第一式，得

$$3dx - 3dy + 6dz = -2k - 6 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

由第三式減第二式，得

$$3dx - 3dy + 6dz = 2k + 14 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

因為方程組有解，所以由 $\textcircled{4}$ ， $\textcircled{5}$ 得知

$$-2k - 6 = 2k + 14 \Rightarrow -4k = 20,$$

解得 $k = -5$ 。

E 內插法

設 a, b, x 皆為正整數且滿足 $a \leq x \leq b$ 及 $b - a = 3$ 。若用內插法從 $\log a$ ， $\log b$ 求得 $\log x$ 的近似值為

$$\log x \approx \frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log b = \frac{1}{3} (1 + 2 \log 3 - \log 2) + \frac{2}{3} (4 \log 2 + \log 3),$$

則 x 的值為 $\underline{\quad 27 \quad 28 \quad}$ 。

出 處：龍騰版《數學1》第3章 指數、對數函數

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第3單元 指數、對數函數

解題觀念：內插法就是分點公式。

答 案：47

試題大剖析

解 析：因為

$$\frac{1}{3}(1+2\log 3-\log 2)=\frac{1}{3}\log(10\times 3^2\div 2)=\frac{1}{3}\log 45,$$

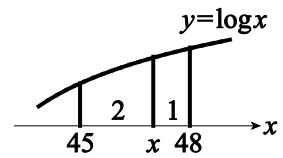
$$\frac{2}{3}(4\log 2+\log 3)=\frac{2}{3}\log(2^4\times 3)=\frac{2}{3}\log 48,$$

所以 $a=45$ ， $b=48$ 。

$$\text{又因為 } \log x \approx \frac{1}{3}\log a + \frac{2}{3}\log b,$$

所以 x 位於 45，48 的 2 : 1 位置。

$$\text{故 } x = \frac{1\times 45 + 2\times 48}{2+1} = 47.$$



F 機率

一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。

青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為 $\frac{\textcircled{29}}{\textcircled{30}\textcircled{31}}$ 。(化成最簡分數)

出 處：龍騰版《數學 2》第 3 章 機率

《稱霸數學（1~4 冊）學測總複習講義》第 6 單元 機率

解題觀念：分類討論及機率的定義。

答 案： $\frac{9}{64}$

解 析：樣本空間個數為 $4^4 = 256$ 。

跳回原點的情形，可分以下 3 類：

(1) 上，下，左，右：有 $4! = 24$ 種。

(2) 上，上，下，下：有 $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 種。

(3) 左，左，右，右：有 $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 種。

共 $24 + 6 + 6 = 36$ 種。

故所求機率為 $\frac{36}{256} = \frac{9}{64}$ 。

**G 直線與圓**

地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動。甲以每秒4公尺向東等速移動，乙以每秒3公尺向北等速移動。在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了6秒後才又相見。此圓柱體建築物底圓的直徑為 ⑳㉓. ㉔ 公尺。

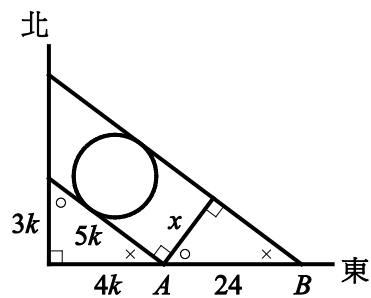
出 處：龍騰版《數學3》第2章 直線與圓

《稱霸數學（1~4冊）學測總複習講義》第9單元 直線與圓

解題觀念：能依題意畫出圖形，再利用相似形解出。

答 案：14.4

解 析：依題意，圖示如下：



經6秒甲走 $\overline{AB} = 6 \times 4 = 24$ 公尺。

因為圖中二個直角三角形相似，所以

$$\frac{x}{24} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{72}{5} = 14.4,$$

故底圓的直徑為14.4公尺。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$ ；

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ，

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B，$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}。$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)；

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

4. 一維數據 X ： x_1, x_2, \dots, x_n ，

$$\text{算術平均數 } \mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i，$$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_X^2 \right)}。$$

5. 二維數據 (X, Y) ： $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X \sigma_Y}，$$

迴歸直線 (最適合直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$ 。

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。

8. 角錐體積 = $\frac{1}{3}$ 底面積 \times 高。