龍騰文化

106

數學統測最前線

龍騰貼心服務，給您最精準的分析！！

電子檔案可於龍騰網下載
https://goo.gl/vYlDD2

106 年 統測數學 A 考情趨勢與考情剖析

106 年統測數學 A 考情趨勢

一、試題分析

106 年數學(A)試題除了「三角函數及其應用」5 題、「圓與直線」僅 1 題之外，其餘章節皆 2 到 3 題，本份試題著重觀念理解，以基本運算、定義判斷取代繁瑣計算，特別是第 5 題將統計分析以直方圖呈現，檢視學生視圖能力，頗有新意，但整份試卷算是相當容易拿高分的試卷。

❶基本公式題：檢視考生是否能清楚題意、熟悉公式。

第 1 題：等差數列與等差級數公式
第 2 題：等比數列公式
第 6 題：斜率公式
第 7 題：一元二次不等式的計算
第 9 題：向量加法與逆向量
第 10 題：除法原理以及利用長除法求解
第 11 題：餘式定理
第 12 題：向量內積公式
第 17 題：圓的標準式與一般式中，圓心與半徑的判斷

32061N/A/0000000

❷基本觀念題：著重考生對各單元觀念的理解。

第 4 題：有向角所在象限的判斷

第 5 題：統計圖表的判讀

第 13 題：指數運算

第 15 題：畫出三角形，分辨出直角三角形中，各角的三角函數值

第 16 題：圖解聯立二元一次不等式

第 18 題：不盡相異物的排列數計算

第 19 題：乘法原理與組合的統整計算

第 22 題：統計量經線性變換後的標準差計算

第 23 題：解析常態分配圖

第 24 題：繪出二元一次不等式圖形之後，利用可行解區域求出目標函數的最大、最小值。

❸稍微有點變化題，但不難

第 3 題：扇形弧長與面積公式的綜合應用

第 8 題：利用銳角三角函數的定義，以正弦函數求出三角形對邊長。

第 14 題：此題須熟悉指對數定義的轉換，方能以簡馭繁，正確解題。

第 20 題：兩骰子點數和的各種機率命題求解，包括點數和小於 7 的機率、點數和為 5 的倍數的機率、聯集與交集的綜合運算。

第 25 題：期望值的運算，首先須求出各種狀況的機率，再進一步利用期望值公式求解，本題不難，但計算稍多，考生須耐心、細心計算。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	圓與直線	1
三角函數及其應用	5	數列與級數	2
向量	2	排列組合	2
式的運算	2	機率與統計	5
指數與對數及其運算	2		
不等式及其應用	3		

龍騰文化

總　　分

106 統測數學 A 考題剖析

數學 A 參考公式

1. 在半徑r的圓內，圓心角θ（弧度）所對應之扇形

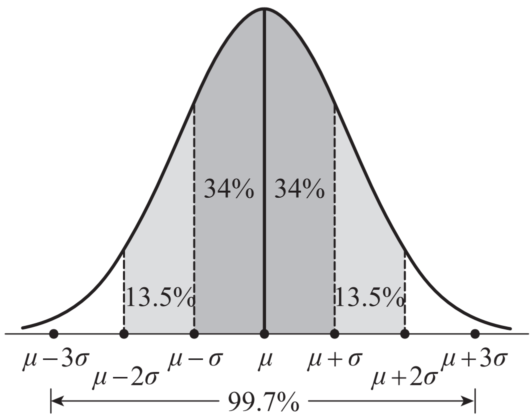
   弧長$S=r\theta$。

   面積$A=\frac{1}{2}r^2\theta$。

2. 首項為a_1，公差為d的等差數列前n項之和為$S_n=\frac{n\left(2a_1+(n-1)d\right)}{2}$。

   首項為a_1，公比為r（$r\neq 1$）的等比數列前n項之和為$S_n=\frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$。

3. 平均數μ、標準差σ的常態分佈圖



4. 設有一組抽樣資料$x_1, x_2, \cdots, x_n$，其算術平均數為$\overline{x}$，則樣本標準差為

   $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n-1}}$。

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 今有一等差數列$\langle a_n\rangle$，若前二項為$a_1=3$、$a_2=2$，則此數列前16項之和$S_{16}=$

(A)-80　(B)-72　(C)-64　(D)-56。

(　　) 2. 已知a、b為實數，若a、2、3、b為一等比數列，則$a+b=$

(A)4　(B)$\frac{31}{6}$　(C)$\frac{35}{6}$　(D)7。

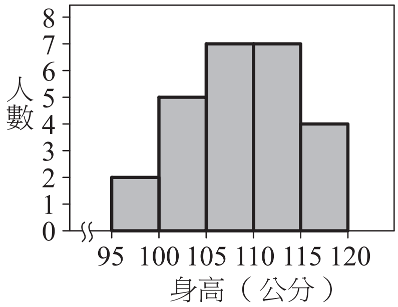
(　　) 3. 設某扇形之弧長為a公分且其面積為b平方公分，若$2a=b$，則此扇形之半徑為多少公分？

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4。

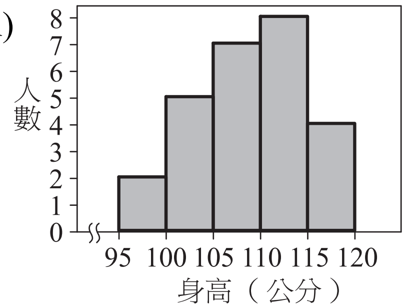
(　　) 4. 四個有向角分別為甲：$-640°$、乙：$123°$、丙：$275°$、丁：$640°$，則哪幾個有向角在標準位置上是第四象限角？

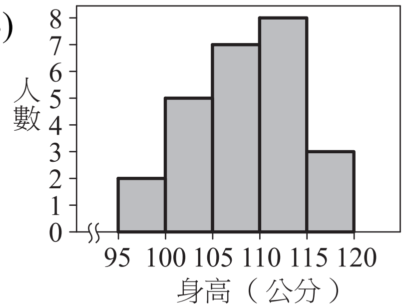
(A)甲、乙　(B)丙、丁　(C)甲、丁　(D)乙、丙。

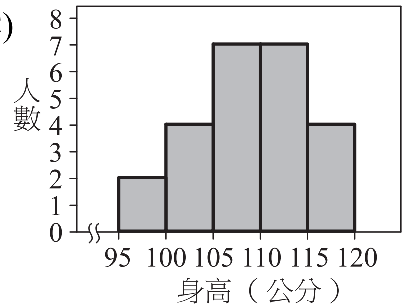
(　　) 5. 某幼兒園班上25位小朋友身高分佈之直方圖如圖(一)。今班上轉出一位身高116公分之小朋友，轉入一位身高113公分之小朋友，則此時班上小朋友身高分佈之直方圖為何？

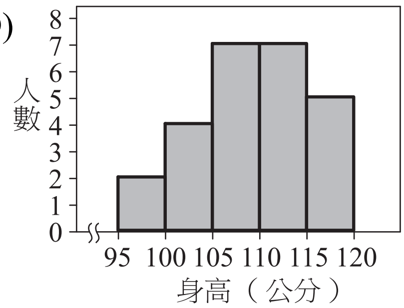


圖(一)

(A)


(B)


(C)


(D)


(　　) 6. 求過坐標平面上兩點$(0,0)$、$(-1,5)$之直線的斜率為何？

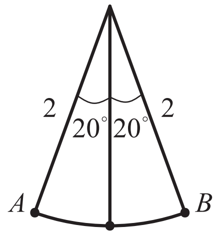
(A)-5　(B)$\frac{-1}{5}$　(C)$\frac{1}{5}$　(D)5。

(　　) 7. 下列何者為一元二次不等式$7x^2-48x-7>0$的解？

(A)$x<\frac{-1}{7}$或$x>7$　(B)$\frac{-1}{7}<x<7$　(C)$x<-7$或$x>\frac{1}{7}$　(D)$-7<x<\frac{1}{7}$。

(　　) 8. 有一鐵鏈長度為 2 公尺的鞦韆，若一小朋友於鉛直方向兩側擺動圓心角各 $20°$ 至 A 、 B 二點如圖(二)，則線段 $\overline{AB}$ 長為多少公尺？

(A) $4\sin 20°$　(B) $2\sin 40°$　(C) $4\cos 20°$　(D) $2\cos 40°$ 。



圖(二)

(　　) 9. $\triangle ABC$ 中，若向量 $\overrightarrow{AB}=(3,-4)$，$\overrightarrow{BC}=(1,1)$，則向量 $\overrightarrow{CA}$ 為何？

(A) $(4,-3)$　(B) $(-4,3)$　(C) $(2,-5)$　(D) $(-2,5)$ 。

(　　) 10. 已知 a 、 b 為實數，若 x^3+ax^2+bx-6 有因式 x^2-x+3 ，則 $a+b=$

(A) -2　(B) 0　(C) 2　(D) 4 。

(　　) 11. 已知 a 為實數，若多項式 $f(x)=3x^3+ax^2+5x+62$ 除以 $x-3$ 的餘式為 95 ，則 $a=$

(A) -7　(B) -5　(C) -3　(D) -1 。

(　　) 12. 設兩向量 $\overrightarrow{a}=(x-1,1)$，$\overrightarrow{b}=(x+2,2)$。若滿足內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=6$ 之 x 有兩解 α 、 β ，則 $\alpha+\beta=$

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2 。

(　　) 13. 已知 a 、 b 為實數，若 $\sqrt{32}=2^a$ 且 $\dfrac{1}{\sqrt{8}}=2^b$ ，則 $a+b=$

(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2 。

(　　) 14. 若 $\log_8 a=\dfrac{1}{2}$ ，則 $\log_2\left(\dfrac{a}{2}\right)=$

(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{1}{2}$ 。

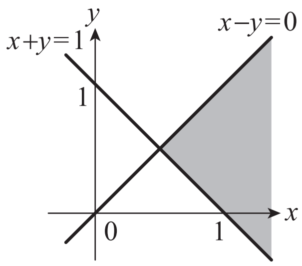
(　　) 15. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=90°$ ， $\sin B=\dfrac{3}{5}$ ，則 $\sin A+\tan B+\cos C=$

(A) $\dfrac{27}{20}$　(B) $\dfrac{29}{15}$　(C) $\dfrac{47}{20}$　(D) $\dfrac{44}{15}$ 。

(　　) 16. 下列聯立不等式中，何者之圖解如圖(三)陰影的部分？

(A) $\begin{cases} x+y\ge 1 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} x+y\le 1 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x+y\ge 1 \\ x-y\le 0 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} x+y\le 1 \\ x-y\le 0 \end{cases}$ 。



圖(三)

(　　) 17. 設圓 C_1 ： $(x+6)^2+(y+2)^2=4$ 的半徑為 r_1 ，圓 C_2 ： $x^2+y^2-12x-6y+20=0$ 的半徑為 r_2 ，若 C_1 與 C_2 二圓心的距離為 d ，則 $d-r_1-r_2=$

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6 。

(　　) 18. 由2、2、3、3、4、4、4這七個數字排成一列，則共可排成多少個不同的七位數？

(A)140　(B)210　(C)350　(D)420。

(　　) 19. 某餐廳推出之套餐包含二種不同的配菜、一種主菜及一杯飲料。若有四種配菜、三種主菜及五種飲料可供選擇，則共可搭配出多少種不同組合的套餐？

(A)12　(B)15　(C)60　(D)90。

(　　) 20. 投擲二粒公正骰子，設事件A是點數和小於7的事件；事件B是點數和為5的倍數的事件，求$P\left(A\cup B\right)=$

(A)$\frac{1}{9}$　(B)$\frac{5}{36}$　(C)$\frac{1}{3}$　(D)$\frac{1}{2}$。

(　　) 21. 若$y=\sin 2x$的週期為a，$y=2\sin x$的週期為b，則$a+2b=$

(A)2π　(B)4π　(C)5π　(D)6π。

(　　) 22. 有50個數值資料$x_1, x_2, \cdots, x_{50}$，現將每個數值均乘以0.6再加上40後，得到新的50個數值資料$0.6x_1+40, 0.6x_2+40, \cdots, 0.6x_{50}+40$。若新資料的標準差為15，則原資料$x_1, x_2, \cdots, x_{50}$的標準差為何？

(A)9　(B)25　(C)49　(D)65。

(　　) 23. 某次數學考試共有1000人參加。若成績呈常態分配，且平均數為62分，標準差為8分，則成績低於70分的人數為何？

(A)介於581人與660人之間　(B)介於661人與740人之間

(C)介於741人與820人之間　(D)介於821人與900人之間。

(　　) 24. 在聯立不等式$\begin{cases} x-y\le 0 \\ y\le 6 \\ 2x-y\ge 2 \end{cases}$的條件下，若$f\left(x,y\right)=x-2y$的最大值為$M$，最小值為$m$，則$M-m=$

(A)2　(B)4　(C)6　(D)8。

(　　) 25. 某公司年終尾牙摸彩活動，將10顆大小、重量皆相同的球放在袋中，其中有3顆紅球、6顆白球、1顆金球。假設每顆球被取出的機率相等，每位員工自此袋中取出兩球，給獎規則如下：

(1)取出兩球之中有金球者為特獎，可得20000元獎金；

(2)取出兩球均為白球者為貳獎，可得2400元獎金；

(3)取出兩球為一紅球、一白球為參獎，可得1000元獎金；

(4)取出兩球均為紅球者，則沒有獎金。

若依上述規則進行抽獎，則每位員工得到獎金的期望值為多少元？

(A)5200　(B)5400　(C)5600　(D)5800。

106 年統一入學測驗 數學(A)

答 案

1.B	2.C	3.D	4.B	5.B	6.A	7.A	8.A	9.B	10.C
11.A	12.A	13.C	14.D	15.C	16.A	17.D	18.B	19.D	20.D
21.C	22.B	23.D	24.C	25.A					

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 106 年 5 月 8 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

(1) 等差數列公式：

$a_n = a_1 + (n-1)d$

(2) 等差級數前 n 項和公式：

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

解析

由 $a_2 = a_1 + (2-1)d$

$\Rightarrow \quad 2 = 3 + 1 \times d$

得 $d = -1$

故 $S_{16} = \frac{16}{2}[2\times 3 + (16-1)\times(-1)] = -72$

2. 技巧與分析

等比數列第 n 項公式：$a_n = a_1 \times r^{n-1}$

解析

若 a 、2、3、b 為一等比數列

則 $r = \frac{3}{2}$

且 $2 = ar \quad \Rightarrow \quad 2 = a \times \frac{3}{2}$ 得 $a = \frac{4}{3}$

$b = 3r \quad \Rightarrow \quad b = 3 \times \frac{3}{2}$ 得 $b = \frac{9}{2}$

所以 $a + b = \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = \frac{35}{6}$

3. 技巧與分析

扇形弧長 $S = r\theta$ ，面積 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

解析

設扇形圓心角為 θ ，半徑為 r

則 $\begin{cases} a = r\theta \\ b = \frac{1}{2}r^2\theta \end{cases}$

$\because \quad 2a = b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = r\theta \cdots\cdots ① \\ 2a = \frac{1}{2}r^2\theta \cdots\cdots ② \end{cases}$

由 $\frac{②}{①}$ 得 $\frac{2a}{a} = \frac{\frac{1}{2}r^2\theta}{r\theta} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2}r$

所以 $r = 4$

4. 技巧與分析

(1) 象限角觀念：

一：$0° < \theta < 90°$

二：$90° < \theta < 180°$

三：$180° < \theta < 270°$

四：$270° < \theta < 360°$

(2) 同界角觀念：

$\theta_2 = \theta_1 + 2n\pi$（ n 為整數），則 θ_1 與 θ_2 為同界角

解析

甲：$-640° + 360° \times 2 = 80°$ ，$0° < 80° < 90°$

$\therefore$ 第一象限角

乙：$123° \quad \Rightarrow \quad 90° < 123° < 180°$

$\therefore$ 第二象限角

丙：$275° \quad \Rightarrow \quad 270° < 275° < 360°$

$\therefore$ 第四象限角

丁：$640°-360°\times1=280°$，$270°<280°<360°$

$\therefore$ 第四象限角

故(丙)(丁)為第四象限角

5. 技巧與分析

直方圖的資料整理與次數分配表的繪製

解析

(1) 將原題改為次數分配表

身高	人數	
95～100	2	
100～105	5	
105～110	7	
110～115	7	$\leftarrow 7+1=8$（轉入一位113 cm）
115～120	4	$\leftarrow 4-1=3$（轉出一位116 cm）

(2) 轉出一位116公分，轉入一位113公分，其餘不變

故直方圖為圖(B)

6. 技巧與分析

斜率公式：已知兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

則過兩點之斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

解析

兩點 $(0,0)$、$(-1,5)$

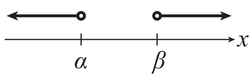
由 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，得 $m=\dfrac{5-0}{-1-0}=-5$

7. 技巧與分析

一元二次不等式

$(x-\alpha)(x-\beta)>0$（$\alpha<\beta$），

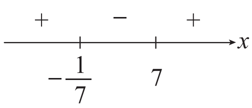
其解為 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$



解析

解 $7x^2-48x-7>0$

$\Rightarrow\ (7x+1)(x-7)>0$

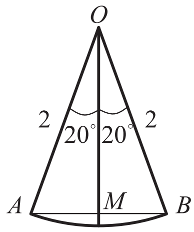


故 $x<-\dfrac{1}{7}$ 或 $x>7$

8. 技巧與分析

銳角三角函數，$\sin\theta=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$

解析



由圖，可先求出 $\overline{AM}$

在 $\triangle OAM$ 中，$\sin20°=\dfrac{\overline{AM}}{2}$

$\Rightarrow\ \overline{AM}=2\sin20°$

故 $\overline{AB}=4\sin20°$

9. 技巧與分析

(1) 向量加法 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(2) 逆向量 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

解析

由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

故 $\overrightarrow{AC}=(3,-4)+(1,1)=(3+1,-4+1)=(4,-3)$

則 $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=(-4,3)$

10. 技巧與分析

利用除法原理：被除式＝除式×商式＋餘式

解析

x^3+ax^2+bx-6 有因式 x^2-x+3

可利用長除法且其餘式＝0

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x & -2 & & \\
\hline
x^2-x+3 & x^3 & +ax^2 & +bx & -6 \\
 & x^3 & -x^2 & +3x & \\
\hline
 & & (a+1)x^2 & +(b-3)x & -6 \\
 & & -2x^2 & +2x & -6 \\
\hline
 & & (a+3)x^2 & +(b-5)x & +0
\end{array}
$$

餘式為0，則 $a+3=0$，$b-5=0$

$\Rightarrow\ a=-3$，$b=5$

故 $a+b=-3+5=2$

〔另解〕

x^3+ax^2+bx-6 有因式 x^2-x+3

可利用長除法且其餘式 $=0$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & & \\
\hline
1-1+3 & 1 & +a & +b & -6 \\
 & 1 & -1 & +3 & \\
\hline
 & & (a+1) & +(b-3) & -6 \\
 & & -2 & +2 & -6 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

$(a+1)-(-2)=0 \quad \Rightarrow \quad a=-3$

$(b-3)-2=0 \quad \Rightarrow \quad b=5$

故 $a+b=-3+5=2$

11. 技巧與分析

餘式定理：$f(x)$ 除以 $x-a$ 的餘式為 $f(a)$

解析

由餘式定理可知 $f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式為95

即 $f(3)=95$

故 $3\times3^3+a\times3^2+5\times3+62=95$

$\Rightarrow \quad 9a=95-81-15-62$

$\Rightarrow \quad 9a=-63$

$\therefore \quad a=-7$

12. 技巧與分析

向量內積公式：

$\overrightarrow{u}=(x_1,y_1)$、$\overrightarrow{v}=(x_2,y_2)$

則 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=x_1x_2+y_1y_2$

解析

由 $\overrightarrow{a}=(x-1,1)$，$\overrightarrow{b}=(x+2,2)$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=6$

得 $(x-1,1)\cdot(x+2,2)=6$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x+2)+1\times2=6$

$\Rightarrow \quad x^2+x-6=0$

$\Rightarrow \quad (x+3)(x-2)=0$

$\therefore \quad x=-3$ 或 2

故可設 $\alpha=-3$，$\beta=2$，則 $\alpha+\beta=-3+2=-1$

13. 技巧與分析

指數運算性質：

(1) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ (2) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ (3) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

解析

$\sqrt{32}=2^a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2^5}=\left(2^5\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{2}}=2^a$

$\therefore \quad a=\dfrac{5}{2}$

$\dfrac{1}{\sqrt{8}}=2^b \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{2^3}}=\dfrac{1}{\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}}=2^{-\frac{3}{2}}=2^b$

$\therefore \quad b=-\dfrac{3}{2}$

故 $a+b=\dfrac{5}{2}+\left(-\dfrac{3}{2}\right)=1$

14. 技巧與分析

log 定義：$\log_a b=x \iff a^x=b$

解析

由 $\log_8 a=\dfrac{1}{2}$

可得 $a=8^{\frac{1}{2}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$

所求 $\log_2\left(\dfrac{a}{2}\right)=\log_2\left(\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{2}\right)=\log_2 2^{\frac{3}{2}-1}$

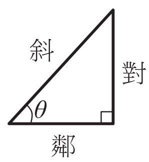
$=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

15. 技巧與分析

(1) 銳角三角函數定義：

$\sin\theta=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$、$\cos\theta=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$、

$\tan\theta=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$



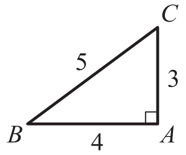
(2) 象限角的三角函數值：

$\sin0^\circ=0$、$\sin90^\circ=1$、$\sin180^\circ=0$、

$\sin270^\circ=-1$

解析

如圖



$\sin B=\dfrac{3}{5}$，可設 $\overline{CA}=3$、$\overline{BC}=5$

故 $\overline{AB}=4$

則 $\sin A+\tan B+\cos C=\sin 90°+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{5}$

$=1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{47}{20}$

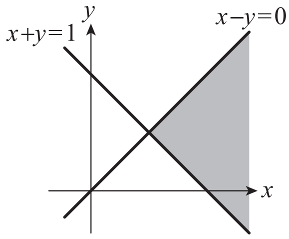
16. 技巧與分析

二元一次不等式的解區域

L：$ax+by+c=0$，$a>0$

若 $ax+by+c\ge 0$ 圖形為直線 L 及其右側半平面

解析



由圖可知其包含直線 $x+y=1$ 及其右半部

則 $x+y\ge 1$

且包含直線 $x-y=0$ 及其右半部

則 $x-y\ge 0$

故所求為 $\begin{cases}x+y\ge 1\\ x-y\ge 0\end{cases}$

17. 技巧與分析

圓方程式：

(1) 標準式 $\Rightarrow$ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，

圓心 (h,k)，半徑 r

(2) 一般式 $\Rightarrow$ $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，

圓心 $\left(-\dfrac{d}{2},-\dfrac{e}{2}\right)$，半徑 $\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$

解析

C_1：$(x+6)^2+(y+2)^2=4$

圓心 $(-6,-2)$，半徑 $r_1=\sqrt{4}=2$

C_2：$x^2+y^2-12x-6y+20=0$

圓心 $\left(-\dfrac{d}{2},-\dfrac{e}{2}\right)=\left(-\dfrac{-12}{2},-\dfrac{-6}{2}\right)=(6,3)$

半徑 $r_2=\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+(-6)^2-4\times 20}=5$

又二圓心距離 $d=\sqrt{(6+6)^2+(3+2)^2}=13$

$\therefore$ $d-r_1-r_2=13-2-5=6$

18. 技巧與分析

不盡相異物「全取」的排列數：

$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_k=n$（第一類有 m_1 件，第二類有 m_2 件，…，第 k 類有 m_k 件），

則此 n 件不完全相異物全取的直線排列數為

$\dfrac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!}$

解析

2、2、3、3、4、4、4 全取，排成七位數

共有 $\dfrac{7!}{2!2!3!}=210$ 個不同的七位數

19. 技巧與分析

(1) 乘法原理：完成一件事有 k 步驟

第一步：m_1 種方法

第二步：m_2 種方法

$\vdots$

第 k 步：m_k 種方法

可知完成這件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ 種方法

(2) 組合：n 中取 m 的組合方法數（C^n_m）

解析

配菜 4 選 2，且主菜 3 選 1，且飲料 5 選 1

由乘法原理可知

$C^4_2\times C^3_1\times C^5_1=90$（種）

20. 技巧與分析

(1) $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

解析

(1) A：點數和小於 7 的事件

(和為2)	(和為3)	(和為4)	(和為5)	(和為6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
		(3,1)	(3,2)	(3,3)
			(4,1)	(4,2)
				(5,1)

$n(A)=15$

$P(A)=\dfrac{15}{36}$

(2) B：和為 5 的倍數

(和為5)	(和為10)
(1,4)	(4,6)
(2,3)	(5,5)
(3,2)	(6,4)
(4,1)	

$n(B)=\dfrac{7}{36}$

(3) $A\cap B$：即和為 5

故 $n(A\cap B)=4$，$P(A\cap B)=\dfrac{4}{36}$

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{15}{36}+\dfrac{7}{36}-\dfrac{4}{36}=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$

21. 技巧與分析

(1) $y=\sin x$ 的週期為 2π

(2) $y=\sin kx$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{|k|}$

解析

$y=\sin 2x$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$（$=a$）

$y=2\sin x$ 的週期為 2π（$=b$）

故 $a+2b=\pi+2(2\pi)=5\pi$

22. 技巧與分析

一組數值 x 為 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

y 為 $y_1, y_2, \cdots, y_n$

其中 $y_i=ax_i+b$，則 $S_y=|a|S_x$

（S_x、S_y：分別為數值 x、y 的標準差）

解析

將原資料作線性變換

$y_i=0.6x_i+40$

則新標準差 $S_y=0.6S_x$

即 $15=0.6\times S_x$

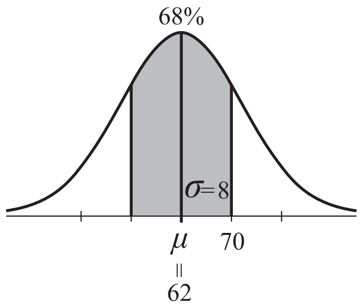
故 $S_x=25$

23. 技巧與分析

常態分配之 $68-95-99.7$ 法則，

有 68% 的資料落在區間 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 中

解析



低於 70 分的人約占：$50\%+34\%=84\%$

$\therefore\quad 1000\times\dfrac{84}{100}=840$

故選(D)介於 821 人到 900 人之間

24. 技巧與分析

線性規劃的解法步驟：

圖解聯立不等式

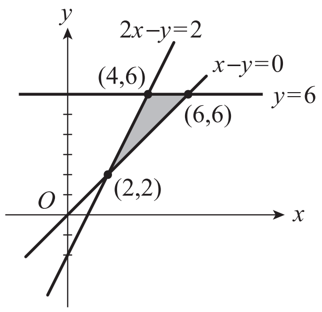
$\Rightarrow$ 求出各頂點坐標

$\Rightarrow$ 分別代入目標函數 $f(x,y)$

求出最大、最小值

解析

$$\begin{cases} x-y\le 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array} \\ y \le 6 \\ 2x-y\ge 2 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -2 & 0 \end{array} \end{cases}$$



求 $f(x,y)=x-2y$ 之最大值 M ，最小值 m

$f(6,6)=-6$

$f(4,6)=-8=m$

$f(2,2)=-2=M$

$\therefore\quad M-m=(-2)-(-8)=6$

25. 技巧與分析

期望值公式：$E=P\times M$

解析

	有金球	均白球（二白）	一紅一白	二紅
M	20000	2400	1000	0
P	$\dfrac{C_1^1\times C_1^9}{C_2^{10}} = \dfrac{9}{45}$	$\dfrac{C_2^6}{C_2^{10}} = \dfrac{15}{45}$	$\dfrac{C_1^6\times C_1^3}{C_2^{10}} = \dfrac{18}{45}$	$\dfrac{C_2^3}{C_2^{10}} = \dfrac{3}{45}$

$$E=20000\times\frac{9}{45}+2400\times\frac{15}{45}+1000\times\frac{18}{45}+0\times\frac{3}{45}$$

$=5200$（元）

106 年 統測數學 B 考情趨勢與考情剖析

106 統測數學 B 考情趨勢

一、試題分析

1. 今年考題仍為偏易，且命題順序與四冊章節相同，讓考生在解題過程中，有集中思考方向之優勢。

2. 考題著重各章節之基本定義及基礎概念之運算，對於不放棄的考生皆可獲得 60 分以上的機會。

3. 此份考題部分強調幾何與代數的結合，如第 2、23 題，皆可用繪圖輕易求出。

4. (1) 計算型的題目：

   答案皆調整為整數，大幅降低考生失誤率及提升信心，更能讓學生於計算後，簡易的代回題目驗算確認。

   如第 1、5、8、9、10、12、13、17、24、25 題。

   其中，第 25 題：積分後的反導函數無分數計算。

   (2) 答案為分數的題目：

   為單獨計算或著重概念方向，降低大量化簡通分的運算時間。

   第 3 題： A、B 兩點坐標有分數及根號，但是 x 坐標皆相同，讓 $\overline{AB}$ 降為一維距離計算。

   第 6 題：分母為 100 跟 2，通分計算簡易。

   第 19 題：誤差值不須計算，只須了解大於或小於原先誤差即可。

   第 22 題：所求距離（貫軸長及長軸長）皆為標準式中輕易得出，不須運用 $a^2=b^2+c^2$ 等換算其他長度。

5. 考題不再為死記型單一解法，對於仔細觀察題目式子之學生，可避免冗長之計算。

   第 4 題：利用廣義角畫出三角形求其他三角函數值，易犯正負之錯誤。

   第 7 題： 不利用乘法公式提出相同倍數，用常用對數值 0.3010、0.6990，雖可計算出答案，但計算量大。

   第 12 題：直接計算兩個三階行列式值會增加計算量。

   第 24 題：選擇用微分定義也較不妥，式子偏冗長。

6. 對於數值範圍熟稔之同學，可輕易剔除部分選項。

第 4 題：$\sin\theta > 0$、$\cos\theta < 0$，角度為第二象限。所求 $\tan\theta + \sec\theta < 0$，(C)(D)剔除。

第 6 題：$0.027^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}} < 1 + 1 = 2$，(C)(D)剔除。

第 7 題：$(\log 2)^2 + \log 2 \times \log 5 + \log 5 < 1 + 1 + 1 = 3$，(A)(B)剔除。

第 14 題：主菜有三種選擇非常容易，故答案應為 3 的倍數，(A)(B)剔除。

第 20 題：$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta < 1 + \sqrt{3} \approx 2.732$，$a < 3$，(A)(D)剔除。

值得一提，第 2 題：如果算出 $a = 3$，則答案僅(A)符合。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	不等式及其應用	1
三角函數	3	排列組合	2
向量	1	機率	2
指數與對數及其運算	2	統計	2
數列與級數	1	三角函數的應用	2
式的運算	2	二次曲線	2
方程式	2	微積分及其應用	2

總　分

106 統測數學 B 考題剖析

數學 B 參考公式

1. 三角函數的和角公式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。
2. $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 在坐標平面上，若直線 L 通過兩點 $A(2,a)$，$B(a,5)$，且直線 L 的斜率為 2，則 $a=$

(A) -2　(B) 1　(C) 2　(D) 3。

(　　) 2. 已知 $y=2\sin x+1$，$0\le x\le 2\pi$ 的圖形與水平線 $y=1$、$y=0$、$y=-1$ 的交點個數分別為 a、b、c，則下列何者正確？

(A) $a=3$、$b=2$、$c=1$　(B) $a=2$、$b=2$、$c=2$

(C) $a=2$、$b=3$、$c=2$　(D) $a=1$、$b=3$、$c=1$。

(　　) 3. 已知 A 點坐標為 $\left(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6}\right)$，$B$ 點坐標為 $\left(\cos\frac{11\pi}{6},\tan\frac{11\pi}{6}\right)$，則線段 $\overline{AB}$ 的長度為何？

(A) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

(　　) 4. 已知 $\sin\theta=\frac{7}{25}$，$\cos\theta=\frac{-24}{25}$，則 $\tan\theta+\sec\theta=$

(A) $\frac{-4}{3}$　(B) $\frac{-1}{7}$　(C) $\frac{1}{7}$　(D) $\frac{4}{3}$。

(　　) 5. 已知坐標平面上三點 $A(1,a)$、$B(2,3)$、$C(5,1)$，若向量內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值為 1，則 $a=$

(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 2。

(　　) 6. 求 $(0.027)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$ 的值。

(A) $\frac{3}{32}$　(B) $\frac{159}{100}$　(C) $\frac{12}{5}$　(D) $\frac{81}{32}$。

(　　) 7. 求$\left(\log 2\right)^2+\log 2\cdot\log 5+\log 5$的數值。

(A)4　(B)3　(C)2　(D)1。

(　　) 8. 若a為正整數，且1、a、$2a$為等比數列，則$a^2+1=$

(A)1　(B)2　(C)5　(D)10。

(　　) 9. 已知多項式$f\left(x\right)=2x^2-5x+2$，$g\left(x\right)=x^3-x^2+ax+b$。若$f\left(x\right)+g\left(x\right)$可以被$x^2+1$整除，則$a+b=$

(A)-2　(B)0　(C)3　(D)5。

(　　) 10. 已知$x-1$為多項式$f\left(x\right)=x^2+ax+b$的因式。若$f\left(x\right)$除以$x+1$的餘式為6，則$3a+2b=$

(A)-10　(B)-5　(C)1　(D)5。

(　　) 11. 已知一元二次方程式$x^2+x-5=0$有兩相異實根a、b，若$a<b$，則$b-a=$

(A)1　(B)$\sqrt{5}$　(C)$2\sqrt{5}$　(D)$\sqrt{21}$。

(　　) 12. 若兩個三階行列式的和$\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & a & 2\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & a & 2\\ 4 & -2 & 3\end{vmatrix}$之值為$20$，則$a=$

(A)$\frac{1}{2}$　(B)2　(C)$\frac{5}{2}$　(D)3。

(　　) 13. 若一元二次不等式$x^2-2x-3<0$的解為$a<x<b$，則$a+b=$

(A)-3　(B)-1　(C)2　(D)3。

(　　) 14. 某自助餐店提供80元的便當，便當中除了白米飯之外，還包含一種主菜以及三種不同的配菜。若今日提供的主菜有雞腿、排骨、魚排3種，另有8種不同的配菜，則共可搭配出多少種不同組合的80元便當？

(A)59　(B)112　(C)168　(D)210。

(　　) 15. 某飲料店有5位假日工讀生，工作時間有週六的早班與晚班、週日的早班與晚班等4個不同時段。一個時段排兩位工讀生上班，如果規定同一人不可以連續排班，至少要隔一個時段上班，則共有幾種排班方式？

(A)81　(B)270　(C)900　(D)1000。

(　　) 16. 同時投擲兩粒公正骰子，兩粒骰子點數之和為5的倍數之機率為何？

(A)$\frac{1}{12}$　(B)$\frac{1}{9}$　(C)$\frac{7}{36}$　(D)$\frac{1}{3}$。

(　　) 17. 已知一袋中有大小相同的球共34顆，每顆球上有一個號碼，34顆球的號碼皆不同，分別是1至34號。今從袋中隨機取出一球，假設每顆球被取到的機會均等，並規定：取出的球號是5的倍數時可得51元，取出的球號是7的倍數時可得85元，其他的情況時可得17元，則自袋中任取一球，得款的期望值為多少元？

(A)31　(B)26.5　(C)20.5　(D)19。

(　　) 18. 某班有40位同學，第一次期中考數學成績的次數分配表及以下累積次數分配表如表（一），求 $a+b+c+d=$

成績（分）	0～20	20～40	40～60	60～80	80～100
次數	4	a	10	12	c
以下累積次數	4	12	b	34	d

表（一）

(A) 50　(B) 64　(C) 70　(D) 76。

(　　) 19. 研究人員為了調查秋刀魚的長度（以公分計），隨機捕獲秋刀魚若干條，逐條記錄長度，並據之求出秋刀魚長度的95%信賴區間為 $[30-0.85, 30+0.85]$，若利用同樣數據計算出秋刀魚長度的99%信賴區間為 $[a-b, a+b]$，則下列敘述何者正確？

(A) $a=30$ 且 $b>0.85$　(B) $a=30$ 且 $b<0.85$　(C) $a=30$ 且 $b=0.85$

(D) $a\neq 30$。

(　　) 20. 已知 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=a\cdot\sin(\theta+b)$，$a>0$，$0\le b\le 2\pi$，則下列何者正確？

(A) $a=4$，$b=\frac{\pi}{6}$　(B) $a=2$，$b=\frac{\pi}{3}$　(C) $a=2$，$b=\frac{4\pi}{3}$　(D) $a=4$，$b=\frac{\pi}{3}$。

(　　) 21. 已知 $\triangle ABC$ 三內角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對應邊長分別為 a、b、c。若 $a=\sqrt{2}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}-1$，則最大內角的角度為何？

(A) 105°　(B) 120°　(C) 135°　(D) 150°。

(　　) 22. 已知雙曲線 H：$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 兩頂點的距離為 a，橢圓 E：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 長軸長為 b，則 $a+b=$

(A) 16　(B) 18　(C) 20　(D) 22。

(　　) 23. 已知橢圓 E：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 與圓 C：$x^2+y^2-8x+12=0$，則橢圓 E 與圓 C 有多少個交點？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4。

(　　) 24. 求函數 $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x-2}$ 在 $x=1$ 的導數。

(A) -9　(B) -8　(C) -7　(D) -6。

(　　) 25. 求定積分 $\int_0^2 6x(x^2-1)^2\,dx$ 之值。

(A) 24　(B) 26　(C) 28　(D) 30。

106 年統一入學測驗　數學(B)

答　案

1.D	2.A	3.A	4.A	5.D	6.B	7.D	8.C	9.D	10.B
11.D	12.B	13.C	14.C	15.B	16.C	17.A	18.D	19.A	20.B
21.C	22.C	23.B	24.A	25.C					

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 106 年 5 月 8 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

利用直線上任兩點所構成的斜率即為此直線的斜率，便可輕易求出。

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

$\Rightarrow\quad m_{\overline{AB}}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（$x_1\neq x_2$）

解析

A、B 兩點在直線 L 上

$\Rightarrow\quad m_{\overline{AB}}=m_L$

$\Rightarrow\quad \dfrac{5-a}{a-2}=2 \quad\Rightarrow\quad 5-a=2a-4$

$\Rightarrow\quad 3a=9 \quad\Rightarrow\quad a=3$

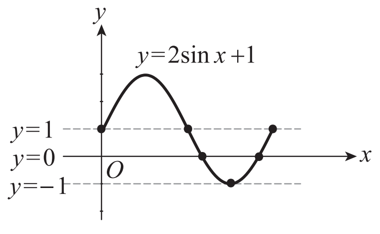
2. **〈法一〉**

技巧與分析

幾何求法：

需了解 $\sin x$ 圖形及上下伸縮、平移的概念，繪出其函數圖形，方可輕易看出交點

解析



由上圖可看出 $a=3$，$b=2$，$c=1$

〈法二〉

技巧與分析

代數解法：

知(1)方程式的聯立解就是圖形的交點

(2) $\sin x$ 特殊值所換算的角度

解析

若 $y=2\sin x+1=1$

$\Rightarrow\quad 2\sin x=0 \quad\Rightarrow\quad \sin x=0$

$\Rightarrow\quad x=0$，π，$2\pi \quad\Rightarrow\quad a=3$

若 $y=2\sin x+1=0$

$\Rightarrow\quad 2\sin x=-1 \quad\Rightarrow\quad \sin x=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\quad x=\dfrac{7\pi}{6}$，$\dfrac{11\pi}{6} \quad\Rightarrow\quad b=2$

若 $y=2\sin x+1=-1$

$\Rightarrow\quad 2\sin x=-2 \quad\Rightarrow\quad \sin x=-1$

$\Rightarrow\quad x=\dfrac{3\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad c=1$

3. 技巧與分析

三角函數廣義角的換算及兩點的距離

解析

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$A\left(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6}\right)=A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$B\left(\cos\frac{11\pi}{6},\tan\frac{11\pi}{6}\right)=B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\therefore\quad \overline{AB}=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. 技巧與分析

三角函數之商數關係及倒數關係

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 及 $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$

解析

$$\tan\theta+\sec\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

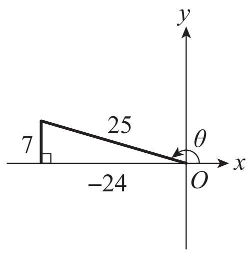
$$=\frac{\frac{7}{25}+1}{\frac{-24}{25}}=\frac{\frac{32}{25}}{\frac{-24}{25}}=-\frac{32}{24}=-\frac{4}{3}$$

〔另解〕

$\sin\theta=\dfrac{7}{25}>0 \quad\Rightarrow\quad \theta\in$ 第一、二象限

$\cos\theta=\dfrac{-24}{25}<0 \quad\Rightarrow\quad \theta\in$ 第二、三象限

$\therefore\quad \theta\in$ 第二象限



故 $\tan\theta+\sec\theta=\dfrac{7}{-24}+\dfrac{25}{-24}=-\dfrac{32}{24}=-\dfrac{4}{3}$

5. 技巧與分析

兩點求向量，向量坐標表示法的內積運算

(1) $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$

$\Rightarrow\quad \overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

(2) $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$、$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$

$\Rightarrow\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=x_1x_2+y_1y_2$

解析

$\overrightarrow{AB}=(2-1,3-a)=(1,3-a)$

$\overrightarrow{BC}=(5-2,1-3)=(3,-2)$

$\because\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1$

$\Rightarrow\quad 1\times3+(3-a)\times(-2)=1$

$\Rightarrow\quad 3-6+2a=1$

$\Rightarrow\quad 2a=4$

$\Rightarrow\quad a=2$

6. 技巧與分析

指數律基本運算

$(a^n)^m=a^{nm}$

解析

$$(0.027)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=\left(\frac{27}{1000}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{3^3}{10^3}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{3^5}{2^5}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=\frac{3^2}{10^2}+\frac{3^1}{2^1}=\frac{9}{100}+\frac{3}{2}=\frac{9}{100}+\frac{150}{100}=\frac{159}{100}$$

7. 技巧與分析

知悉常用對數

$\log2+\log5=\log(2\times5)=\log10=1$

解析

$(\log2)^2+\log2\cdot\log5+\log5$

$=\log2(\log2+\log5)+\log5$

$=\log2\cdot\log10+\log5$

$=\log2+\log5=\log10=1$

8. 技巧與分析

等比數列任一項除以前一項皆為公比

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$

解析

1、a、$2a$ 為等比數列

$\Rightarrow\quad \dfrac{a}{1}=r=\dfrac{2a}{a}$（$r$ 為公比）

$\Rightarrow\quad a^2=1\times2a \quad\Rightarrow\quad a^2=2a$

$\because\quad a$ 為正整數 $\overset{\text{同除}a}{\Rightarrow}$ $a=2$

$\therefore\quad a^2+1=5$

9. 技巧與分析

(1) 多項式加法運算（同類項合併）

(2) 多項式直式除法（長除法）

(3) 整除 $\Rightarrow$ 餘式為零

解析

$f(x)+g(x)=x^3+x^2+(a-5)x+(b+2)$

利用直式除法

$$\begin{array}{r|rrrr} & x & +1 & & \\ \hline x^2+0x+1 & x^3 & +x^2 & +(a-5)x & +(b+2) \\ & x^3 & +0x^2 & +x & \\ \hline & & x^2 & +(a-6)x & +(b+2) \\ & & x^2 & +0x & +1 \\ \hline & & & (a-6)x & +(b+1) \end{array}$$

因為整除 $\Rightarrow$ 餘式為 0

$\Rightarrow\quad a-6=0$ 且 $b+1=0$

$\Rightarrow\quad a=6$，$b=-1$

故 $a+b=5$

10. 技巧與分析

(1) 餘式定理：

$f(x)$ 除以 $ax+b$ 之餘式 $=f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

(2) 因式定理：

$f(x)$ 有 $ax+b$ 之因式 $\Rightarrow\quad f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$

解析

$x-1$ 為 $f(x)=x^2+ax+b$ 因式

$\Rightarrow\quad f(1)=0\quad\Rightarrow\quad 1+a+b=0\cdots\cdots$①

$f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 6

$\Rightarrow\quad f(-1)=6\quad\Rightarrow\quad 1-a+b=6\cdots\cdots$②

①−② 得 $2a=-6\quad\Rightarrow\quad a=-3$

代入①得 $1-3+b=0\quad\Rightarrow\quad b=2$

$\therefore\quad 3a+2b=3\times(-3)+2\times2=-5$

11. 技巧與分析

一元二次方程式公式解：

$ax^2+bx+c=0\quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

解析

利用公式解 $x^2+x-5=0$

$\Rightarrow\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-5)}}{2}$

$\Rightarrow\quad x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$，$\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$\because\quad a<b\quad\Rightarrow\quad a=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$，$b=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$\Rightarrow\quad b-a=\sqrt{21}$

〔另解〕

利用根與係數求解

a、b 為 $x^2+x-5=0$ 兩根

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} a+b=-\dfrac{1}{1}=-1 \\ ab=\dfrac{-5}{1}=-5 \end{cases}$$

$(b-a)^2=(b+a)^2-4ab$

$\qquad\quad=(-1)^2-4(-5)=21$

$\because\quad a<b$

$\Rightarrow\quad b-a=\sqrt{21}$

12. 技巧與分析

行列式：$\begin{vmatrix} a & x+P & d \\ b & y+Q & e \\ c & z+R & f \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & x & d \\ b & y & e \\ c & z & f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & P & d \\ b & Q & e \\ c & R & f \end{vmatrix}$

解析

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2+(-2) & 1 \\ 2 & a+a & 2 \\ 4 & 2+(-2) & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2a & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}=2(9a-4a)=10a$$

依題知 $10a=20\quad\Rightarrow\quad a=2$

〔另解〕

原式 $\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} 3 & 2+(-2) & 1 \\ 2 & a+a & 2 \\ 4 & 2+(-2) & 3 \end{vmatrix}=20$

$\qquad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2a & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}=20$

由第 2 行展開得

$2a\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=20$

$2a\times(9-4)=20$

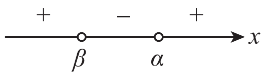
$\Rightarrow\quad 10a=20$

$\therefore\quad a=2$

13. 技巧與分析

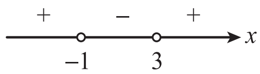
(1) 一元二次不等式求解（含一元二次因式分解）

(2) 若 $\alpha > \beta$，$(x-\alpha)(x-\beta) < 0$，則 $\beta < x < \alpha$



解析

$x^2 - 2x - 3 < 0$



$\Rightarrow \quad (x-3)(x+1) < 0$

$\Rightarrow \quad -1 < x < 3$

依題 $a < x < b \quad \Rightarrow \quad a = -1$ 及 $b = 3$

$\therefore \quad a + b = 2$

14. 技巧與分析

(1) 從 n 個相異物中選 m 個之方法數 $= C_m^n$

(2) 計數之乘法原理

解析

主菜：雞腿、排骨、魚排，3 選 1 之方法數為 $C_1^3 = 3$

配菜 8 種選 3 種之方法數為 $C_3^8 = \dfrac{8\times7\times6}{3!} = 56$

由乘法原理知：

便當組合共有 $3\times56 = 168$（種）

15. 技巧與分析

(1) C_m^n 之組合數運算

(2) 將時段分順序依序選取下一時段之方法數

解析

有一、二、三、四，共 4 個時段

第一時段從 5 人中選 2 人

$\Rightarrow \quad C_2^5 = \dfrac{5\times4}{2!} = 10$

第二時段從剩下 3 人中（第一時段選中 2 人不可連續）選 2 人 $\Rightarrow \quad C_2^3 = 3$

同第二時段之選取方式 $\Rightarrow$ 第三時段及第四時段皆為 3 種

故全部有 $10\times3\times3\times3 = 270$ 種排班方式

$\boxed{一}\quad\boxed{二}\quad\boxed{三}\quad\boxed{四}$

$\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow$

$C_2^5 \times C_2^3 \times C_2^3 \times C_2^3 = 270$

第三時段剩的 1 人再加第二時段 2 人，共 3 人

第二時段剩的 1 人再加第一時段 2 人，共 3 人

16. 技巧與分析

(1) 列舉所求之所有情況

(2) 古典機率之算法 $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

解析

兩粒骰子擲出點數 a 點、b 點

記為序對 (a,b)

$\{(a,b) \mid a+b=5 \text{ 或 } a+b=10\}$

$=\{(4,1),(3,2),(2,3),(1,4),(6,4),(5,5),(4,6)\}$

$\Rightarrow \quad 7$ 種

樣本空間 $n(S) = 6\times6 = 36$

$\therefore$ 所求 $= \dfrac{7}{36}$

〔另解〕

點數和	5	10
個數	4	3

故所求 $P = \dfrac{4+3}{6\times6} = \dfrac{7}{36}$

17. 技巧與分析

期望值 $E = \sum_{i=1}^{n} m_i \times p_i$（$m_i$ 為發生事件機率 p_i 的報酬）

解析

1～34 號中

5 的倍數有 5、10、15、20、25、30

$\Rightarrow$ 共 6 種

7 的倍數有 7、14、21、28 $\Rightarrow$ 共 4 種

不是 5 也不是 7 的倍數有 $34-6-4=24$（種）

期望值 $E = \dfrac{6}{34}\times51 + \dfrac{4}{34}\times85 + \dfrac{24}{34}\times17$

$= \dfrac{1054}{34} = 31$（元）

18. 技巧與分析

了解以下累積次數的計數意義即可

解析

全班 40 人，故 100 分以下累積次數 $=40=d$

40 分以下人數

$=20$ 分以下人數 $+(20\sim 40)$ 分人數

$\Rightarrow\quad 12=4+a\quad\Rightarrow\quad a=8$

60 分以下人數

$=40$ 分以下人數 $+(40\sim 60)$ 分人數

$\Rightarrow\quad b=12+10\quad\Rightarrow\quad b=22$

100 分以下人數

$=80$ 分以下人數 $+(80\sim 100)$ 分人數

$\Rightarrow\quad 40=34+c\quad\Rightarrow\quad c=6$

$a+b+c+d=8+22+6+40=76$

19. 技巧與分析

信心水準與信賴區間的意義，並了解增加誤差可擴大信賴區間 $\Rightarrow$ 提高其信心水準

解析

95% 信賴區間為 $[30-0.85,30+0.85]$

$\Rightarrow$ 此調查之統計數值 $=30$，誤差 $=0.85$

同樣數據之統計數值相同 $\Rightarrow\quad a=30$

95% 增加至 99% 之信賴區間，在樣本相同下

$\Rightarrow$ 須擴大誤差 $\Rightarrow\quad b>0.85$

20. 技巧與分析

疊合公式：

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\phi\sin\theta+\sin\phi\cos\theta\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi)$$

其中 $\cos\phi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\phi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

解析

利用疊合公式

$$a\cdot\sin(\theta+b)=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$$
$$=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta+\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta\right)$$
$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$\therefore\quad a=2$，$b=\dfrac{\pi}{3}$

21. 技巧與分析

(1) 餘弦定理：$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

(2) 三角函數特殊角在廣義角的值

解析

$\because\quad b>a>c\quad\Rightarrow\quad\angle B$ 為最大內角

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2-2^2}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}$$
$$=\frac{2+4-2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}$$
$$=\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

又 $0^\circ<\angle B<180^\circ\quad\Rightarrow\quad\angle B=135^\circ$

22. 技巧與分析

知悉橢圓及雙曲線的標準式，並能區分標準式中每個數字所代表之中文意義

解析

雙曲線兩頂點距離即為貫軸長

$\Rightarrow\quad\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 之貫軸長 $=2\times\sqrt{25}=10$

又 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 之長軸長 $=2\times\sqrt{25}=10$

$\therefore\quad a+b=20$

23. 技巧與分析

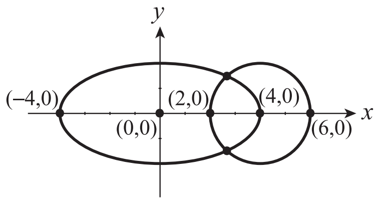
化為標準式，簡略繪出圖形，即可觀察得知

解析

利用幾何圖解

圓 C ： $x^2+y^2-8x+12=0$

$\Rightarrow\quad (x-4)^2+y^2=2^2$



由圖可知交於2點

〔另解〕

利用代數求解

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\cdots\cdots① \\ x^2+y^2-8x+12=0\cdots\cdots②\end{cases}$$

由①得 $y^2=4-\dfrac{x^2}{4}$ ，代入②得

$x^2+4-\dfrac{x^2}{4}-8x+12=0$

$\Rightarrow\quad 4x^2+16-x^2-32x+48=0$

$\Rightarrow\quad 3x^2-32x+64=0$

$D=(-32)^2-4\times3\times64>0$

故 x 有二實數解 $\Rightarrow$ 有2交點

24. 技巧與分析

微分公式：

$f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$

$\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{g(x)h'(x)-g'(x)h(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

解析

利用微分公式

$$f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+2)'-(x-2)'(x^2+2x+2)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(x-2)(2x+2)-1\times(x^2+2x+2)}{(x-2)^2}$$

$$f'(1)=\frac{(-1)(4)-1\times(5)}{(-1)^2}=\frac{-9}{1}=-9$$

〔另解〕

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{x^2+2x+2}{x-2}-(-5)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{x^2+2x+2+5x-10}{x-2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+7x-8}{(x-2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+8)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+8}{x-2}=-9$$

25. 技巧與分析

(1) $\int x^n dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+c$

(2) 積分之代數變換

解析

令 $u=x^2-1\quad\Rightarrow\quad\dfrac{du}{dx}=2x$

$\Rightarrow\quad xdx=\dfrac{1}{2}du$

當 $x=2$ 時， $u=2^2-1=3$

當 $x=0$ 時， $u=0^2-1=-1$

故原式 $=\int_{-1}^{3}6\times u^2\times\dfrac{1}{2}du$

$$=3\int_{-1}^{3}u^2du=3\times\frac{1}{3}u^3\Big|_{-1}^{3}$$

$$=3^3-(-1)^3=27+1=28$$

〔另解〕

$\int_0^2 6x(x^2-1)^2dx$

$=\int_0^2 6x(x^4-2x^2+1)dx$

$=\int_0^2(6x^5-12x^3+6x)dx$

$=(x^6-3x^4+3x^2)\Big|_0^2$

$=2^6-3\times2^4+3\times2^2$

$=28$

106 年 統測數學 C 考情趨勢與考情剖析

106 統測數學 C 考情趨勢

一、試題分析

106 年統測數學 C 是一份四平八穩的試卷。如果與 105 年的繁瑣型來比較，106 年的題目略為回歸到 103、104 年的簡易型，其難易度大致非常平均，大都是中等上下的題目。當然 106 年的試卷也有搭配一些簡易、困難的題目，但不是送分題或繁瑣計算的題目，這樣可以讓不同程度的學生有所區別。這次各單元的試題順序，延續 105 年的處理模式，完全依照「99 課綱」的學習時間先後來安排，讓考生有很好的思考依循。另外，106 年首次提供參考公式，相信可以給考生適當的輔助。

106 年試卷的其他特色如下：

1. 應用題：第 16、18、20 題，以生活化的敘述融合數學觀念，這是切合實際應用的。
2. 考古題：106 年出現了很多類似的考古題，與這幾年統測 C 卷的題目來做對照，有點相似卻有調整敘述的感覺，都是很好把握的題目。如下：

106C	第 1 題	第 5 題	第 8 題	第 9 題	第 14 題	第 19 題	第 22 題
類似題號	103-7	104-24	103-6	105-9	105-15	105-19	102-16

綜合上述，106 年的考生的得分將會回歸正常的狀態，對於高、中、低程度的學生會有適當的鑑別度，而以往常見的圖形題、定義題、跨單元試題，此次都沒出現，實在有點可惜。105 年八月技專入學測驗中心曾召開統測試題研討會，與會老師的建議也開始被部分採納（如：參考公式、徵選命題），期待 107 年的試卷可以持續進步。

二、配分比例表

單元名稱	題數	單元名稱	題數
直線方程式	1	數列與級數	1
三角函數	2	指數與對數及其運算	2
三角函數的應用	2	排列組合	2
向量	1	機率與統計	2
式的運算	1	圓	1
聯立方程式	3	二次曲線	1
複數	1	微分	3
不等式及其應用	1	積分	1

龍騰文化

總分

106 統測數學 C 考題剖析

數學 C 參考公式及可能用到的數值

1. 三角函數的和角公式：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$。
2. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 為外接圓半徑。
3. $\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}ab\sin C$。
4. $\triangle ABC$ 的面積 $=sr$，其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，r 為內切圓半徑。
5. 若 α、β 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則 $\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$。
6. 若一複數 z，且其極式為 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $r=|z|$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，其中 n 為正整數。
7. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$。
8. 雙曲線方程式：
   (1) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，其正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}$。
   (2) $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$，其正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}$。
9. 設有一組母體資料 $x_1,x_2,\cdots,x_N$，其算術平均數為 μ，則母體標準差為 $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}}$。
10. 設有一組抽樣資料 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其算術平均數為 $\overline{x}$，則樣本標準差為 $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}$。

單選題（每題 4 分，共 100 分）

(　　) 1. 設直線 $2x+y=11$ 與拋物線 $y=x^2-4$ 在第二象限的交點為 A，在第一象限的交點為 B，若線段 $\overline{AB}$ 上一點 P 滿足 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$，則 P 點坐標為何？
(A) $\left(\frac{1}{3},\frac{31}{3}\right)$　(B) $(-2,26)$　(C) $(-1,13)$　(D) $\left(\frac{-7}{3},\frac{47}{3}\right)$。

(　　) 2. 若 $\tan\theta\csc\theta=-1+6\cos\theta$，其中 θ 為第三象限角，則 $\tan\theta=$
(A) $2\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $-\sqrt{3}$　(D) $-2\sqrt{2}$。

(　　) 3. 求 $\sin^2 18°+\sin^2 36°+\sin^2 54°+\sin^2 72°+\sin^2 90°=$
(A) 2　(B) 2.5　(C) 3　(D) 3.5。

(　　) 4. 若 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，則 $\tan 2\theta=$
(A) $2-\sqrt{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\sqrt{3}$。

(　　) 5. 設三角形的三邊長為 7、24、25，其內切圓半徑為 r，外接圓半徑為 R，求 $\frac{r}{R}=$
(A) 0.12　(B) 0.24　(C) 0.25　(D) 0.48。

(　　) 6. 已知 $\left|\overrightarrow{a}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-2$。若 $t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直，其中 t 為實數，則 $t=$
(A) $\frac{7}{10}$　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$。

(　　) 7. 求方程式 $\frac{-x^2}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}$ 所有解的和為何？
(A) -3　(B) -2　(C) -1　(D) 0。

(　　) 8. 設 x、y、z 為整數，且 $2|x+y|+3|x-y-4|+5|2x+3y-z|=4$，則 z 可為下列何者？
(A) 0　(B) 3　(C) 5　(D) 11。

(　　) 9. 設 t 為實數，且三元一次聯立方程式 $\begin{cases}(t+1)x+(t-1)z=1\\(t+1)y+z=3\\(t+1)y+tz=5\end{cases}$ 無解，則 t 可為下列何者？
(A) -2　(B) 0　(C) 1　(D) 2。

(　　) 10. 求三階行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 10 & 121 \end{vmatrix}=0$所有解的和為何？

(A)11　(B)$\frac{34}{3}$　(C)12　(D)$\frac{40}{3}$。

(　　) 11. 設$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則$\frac{\omega^{107}}{\omega+1}=$

(A)-1　(B)$-\omega$　(C)ω^2　(D)1。

(　　) 12. 設a、b為實數，且不等式$-x^2+6x+b>0$與不等式$|x+a|<5$的解完全相同，則$a+b=$

(A)-13　(B)-7　(C)7　(D)13。

(　　) 13. 設a、b、c三數成等比數列，且滿足$a+b+c=9$及$a^2+b^2+c^2=189$，則等比中項$b=$

(A)-6　(B)-2　(C)$\frac{1}{2}$　(D)6。

(　　) 14. 設$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$c=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$，則$a$、$b$、$c$大小順序為何？

(A)$a>c>b$　(B)$a>b>c$　(C)$c>a>b$　(D)$b>c>a$。

(　　) 15. 已知$\log_{10}3=0.4771$且$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$，其中$\log_{10}x$的首數為$m$，而尾數的小數點後第一位數字為$n$，則$m+n=$

(A)-9　(B)-7　(C)-6　(D)-5。

(　　) 16. 將繞口令「四十個十四　十四個四十」中的文字全取排成一列，且其中四個「十」須相鄰排在一起，其排法有幾種？

(A)70　(B)105　(C)135　(D)210。

(　　) 17. 設$(x-2y)^4$與$(x-2y)^5$的展開式中所有項的係數和分別為a、b，則$\frac{b}{a}=$

(A)-2　(B)-1　(C)$\frac{1}{2}$　(D)2。

(　　) 18. 設袋子中分別有紅球、藍球、綠球各三個，現從中任取2個球，若每拿到一個紅球，一個藍球及一個綠球分別可得5千元，3千元及1千元獎金，求獎金的期望值為何？

(A)3千元　(B)4千元　(C)5千元　(D)6千元。

(　　) 19. 有一組資料：0、3、6、9、12、15，設其平均值與標準差分別為a、b，則關於另一組資料：-1、-2、-3、-4、-5、-6的平均值與標準差的敘述，何者正確？

(A)平均值為$-3a+1$，標準差為$\dfrac{b}{9}$　(B)平均值為$-\dfrac{a}{3}-1$，標準差為$\dfrac{b}{3}$

(C)平均值為$-3a+1$，標準差為$\dfrac{b}{3}$　(D)平均值為$-\dfrac{a}{3}-1$，標準差為$\dfrac{b}{9}$。

(　　) 20. 設打水漂遊戲中石頭落入水中的漣漪是以圓的形式展現。若某人向河面擲出石頭的方向是沿著直線$y=x-1$行進，下列哪一個圓方程式可為此漣漪的形式？

(A) $x^2-2x+y^2+4y+1=0$　(B) $x^2-4x+y^2-2y+4=0$

(C) $x^2-2x+y^2-4y+4=0$　(D) $x^2-4x+y^2-6y+9=0$。

(　　) 21. 若雙曲線$4x^2-16y^2+4x+16y+1=0$的貫軸長及正焦弦長分別為i、j，則$i+j=$

(A) $\dfrac{3}{2}$　(B) 2　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 5。

(　　) 22. 已知a、b為實數，且$f(x)=x^3+ax^2+bx+13$。若$f'(-1)=1$且$f'(0)=2$，則$a+b=$

(A) -1　(B) 0　(C) 3　(D) 4。

(　　) 23. 若$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+3$的相對極大值為$a$，相對極小值為$b$，則$a+b=$

(A) $\dfrac{-27}{2}$　(B) $\dfrac{-3}{2}$　(C) $\dfrac{-1}{2}$　(D) $\dfrac{27}{2}$。

(　　) 24. 設$f(x)$為多項式函數，若$\int_1^3 f(x)\,dx=1$、$\int_2^5 f(x)\,dx=4$且$\int_2^3 f(x)\,dx=2$，則$\int_1^5 f(x)\,dx=$

(A) 1　(B) 3　(C) 5　(D) 7。

(　　) 25. 若$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & ，x<-1 \\ 2 & ，x=-1 \\ 6-3x^2 & ，x>-1 \end{cases}$，則$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3。

106 年統一入學測驗 數學(C)

答 案

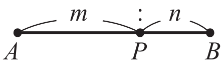
1.A	2.A	3.C	4.C	5.B	6.A	7.C	8.B	9.C	10.D
11.A	12.D	13.A	14.C	15.C	16.B	17.B	18.D	19.B	20.B
21.D	22.D	23.C	24.B	25.D					

本試題答案係依據統一入學測驗中心於 106 年 5 月 8 日公布之標準答案

1. 技巧與分析

設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

若 P 點在線段 $\overline{AB}$ 上，



且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，

則 $P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

即 $P=\dfrac{mB+nA}{m+n}$

解析

(1) 先求交點 A、B：

直線 $2x+y=11 \quad \Rightarrow \quad y=-2x+11$

而拋物線 $y=x^2-4$

令 $x^2-4=-2x+11$

$\Rightarrow \quad x^2+2x-15=0$

$\Rightarrow \quad (x+5)(x-3)=0$

$\Rightarrow \quad x=-5$ 或 3

當 $x=-5$ 時，$y=-2\times(-5)+11=21$

當 $x=3$ 時，$y=-2\times3+11=5$

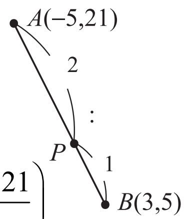
$\because$ 交點 A 在第二象限，

交點 B 在第一象限

$\therefore$ 點 A 的坐標為 $(-5,21)$，

點 B 的坐標為 $(3,5)$

(2) 求線段 $\overline{AB}$ 上的點 P：



$\because \quad \overline{AP}:\overline{BP}=2:1$

$\therefore \quad P$ 點坐標為

$\left(\dfrac{2\times3+1\times(-5)}{2+1},\dfrac{2\times5+1\times21}{2+1}\right)$

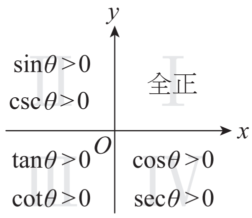
$=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{31}{3}\right)$

2. 技巧與分析

(1) 商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) 倒數關係：$\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

(3) 三角函數值的正負：



解析

$\tan\theta\csc\theta=-1+6\cos\theta$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\dfrac{1}{\sin\theta}=-1+6\cos\theta$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\cos\theta}=-1+6\cos\theta$

$\overset{\times\cos\theta}{\Rightarrow} \quad 1=-\cos\theta+6\cos^2\theta$

$\Rightarrow \quad 6\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

$\Rightarrow \quad (3\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$

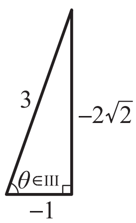
$\Rightarrow \quad \cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{1}{2}$

$\because \quad \theta$ 為第三象限角

$\therefore \quad \cos\theta<0$

故 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

用 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ 來作直角三角形



取斜邊 $=3$，鄰邊 $=-1$

則對邊 $=-\sqrt{3^2-(-1)^2}=-2\sqrt{2}$

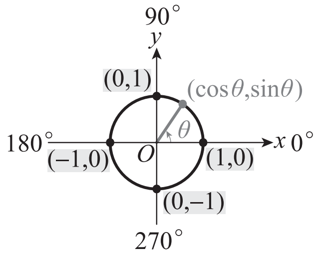
因此 $\tan\theta=\dfrac{-2\sqrt{2}}{-1}=2\sqrt{2}$

3. 技巧與分析

(1) 餘角關係：$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$

(2) 平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(3) 象限角的三角函數值：



解析

$\sin 54°=\sin(90°-36°)=\cos 36°$

$\sin 72°=\sin(90°-18°)=\cos 18°$

$\sin 90°=1$

所求

$=\sin^2 18°+\sin^2 36°+\cos^2 36°+\cos^2 18°+1^2$

$=(\sin^2 18°+\cos^2 18°)+(\sin^2 36°+\cos^2 36°)+1$

$=1+1+1=3$

4. 技巧與分析

$15°$ 的三角函數值：$\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

解析

$\because\ \ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 且 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

而 $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ \ \theta=15°$

故 $\tan 2\theta=\tan(2\times 15°)=\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5. 技巧與分析

(1) $\triangle ABC$ 的正弦定理：

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，

其中 R 為外接圓半徑

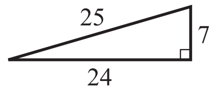
(2) $\triangle ABC$ 的面積 $=rs$，

其中 r 為內切圓半徑，

$s=\dfrac{1}{2}\times(a+b+c)$

解析

(1) 三角形的面積：



$\because\ \ 7^2+24^2=25^2$

$\therefore$ 此三角形為直角三角形

面積為 $\dfrac{1}{2}\times 24\times 7=84$

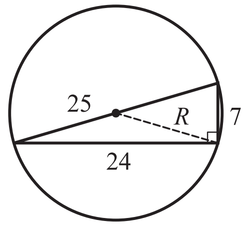
(2) 三角形的外接圓半徑 R：

由正弦定理可知：

$\dfrac{25}{\sin 90°}=2R$

$\Rightarrow\ \ \dfrac{25}{1}=2R$

$\Rightarrow\ \ R=\dfrac{25}{2}$

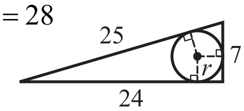


(3) 三角形的內切圓半徑 r：

令 $s=\dfrac{1}{2}\times(7+24+25)=28$

三角形面積 $=rs$

$\Rightarrow\ \ 84=r\times 28\ \ \Rightarrow\ \ r=3$



由(2)和(3)可知：

$\dfrac{r}{R}=\dfrac{3}{\frac{25}{2}}=\dfrac{6}{25}=0.24$

6. 技巧與分析

設兩非零向量 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$：

(1) 若 $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$，則 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

(2) 正定性：$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\left|\overrightarrow{u}\right|^2$

(3) 交換性：$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$

解析

$\because\ \ t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直

$\therefore\ \ \left(t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=0$

$\Rightarrow\ \ t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+(1-t)\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$

$-(1-t)\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}=0$

$\Rightarrow\ \ t\left|\overrightarrow{a}\right|^2-t\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)+(1-t)\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)$

$-(1-t)\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$

$\Rightarrow\quad t\left|\overrightarrow{a}\right|^2+(1-2t)\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)-(1-t)\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$

$\Rightarrow\quad t\times1^2+(1-2t)\times(-2)-(1-t)\times\left(\sqrt{5}\right)^2=0$

$\Rightarrow\quad 10t-7=0\quad\Rightarrow\quad t=\dfrac{7}{10}$

7. 技巧與分析

分式方程式的處理原則：

(1) 同乘各分母的最低公倍式之後，再當作 n 次方程式來求解

(2) 若所求的解會使分母的值為 0，則必須剔除，其餘的才是方程式的解

解析

方程式的分母 x^2-4 、 $x+2$ 、 $x-2$ 的最低公倍式為 $(x+2)(x-2)=x^2-4$

方程式的左、右兩側同乘 $(x+2)(x-2)$ ，得

$-x^2=1\times(x-2)+2\times(x+2)$

$\Rightarrow\quad x^2+3x+2=0$

$\Rightarrow\quad (x+1)(x+2)=0$

$\Rightarrow\quad x=-1$ 或 -2

(1) 當 $x=-1$ 時，各分母的值 $\neq0$

(2) 當 $x=-2$ 時，分母 $x^2-4=0$ ，應剔除

由(1)和(2)可知：方程式的解為 -1

故所有解的和也是 -1

8. 技巧與分析

(1) 設 x 、 y 為整數，則 $x\pm y$ 也是整數

(2) 利用加減消去法解三元一次方程組

解析

$\because\quad x$ 、 y 、 z 為整數

$\therefore\quad x+y$ 、 $x-y-4$ 、 $2x+3y-z$ 也是整數

$2|x+y|+3|x-y-4|+5|2x+3y-z|=4$

而 $2\times\underline{2}+3\times\underline{0}+5\times\underline{0}=4$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}|x+y|=2\\|x-y-4|=0\\|2x+3y-z|=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}x+y=\pm2\\x-y-4=0\\2x+3y-z=0\end{cases}$$

(1) $\begin{cases}x+y=2\cdots\cdots①\\x-y-4=0\cdots\cdots②\\2x+3y-z=0\cdots\cdots③\end{cases}$

①+②： $2x-4=2\quad\Rightarrow\quad x=3$

$x=3$ 代入①： $3+y=2\quad\Rightarrow\quad y=-1$

$x=3$ 、 $y=-1$ 代入③：

$2\times3+3\times(-1)-z=0\quad\Rightarrow\quad z=3$

(2) $\begin{cases}x+y=-2\cdots\cdots④\\x-y-4=0\cdots\cdots⑤\\2x+3y-z=0\cdots\cdots⑥\end{cases}$

④+⑤：

$2x-4=-2\quad\Rightarrow\quad 2x=2\quad\Rightarrow\quad x=1$

$x=1$ 代入④： $1+y=-2\quad\Rightarrow\quad y=-3$

$x=1$ 、 $y=-3$ 代入⑥：

$2\times1+3\times(-3)-z=0\quad\Rightarrow\quad z=-7$

由(1)和(2)可知： $z=3$ 或 -7

故選(B)

9. 技巧與分析

克拉瑪公式：

設 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ ，

令 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ ，

(1) 當 $\Delta\neq0$ 時，方程組有一組解

(2) 當 $\Delta=0$ 時，方程組無解或無限多組解

解析

原方程組： $\begin{cases}(t+1)x+0y+(t-1)z=1\\0x+(t+1)y+z=3\\0x+(t+1)y+tz=5\end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix}t+1&0&t-1\\0&t+1&1\\0&t+1&t\end{vmatrix}$ （第一、二行提出 $(t+1)$ ）

$=(t+1)^2\times\begin{vmatrix}1&0&t-1\\0&1&1\\0&1&t\end{vmatrix}$ （第一行降階展開）

$=(t+1)^2\times1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&t\end{vmatrix}$

$=(t+1)^2\times1\times(1\times t-1\times1)=(t+1)^2(t-1)$

若$\Delta=0$，則$t=-1$或1

(1) 當$t=-1$時：

原方程組：$\begin{cases}-2z=1\\ z=3\\ -z=5\end{cases}$ 無解

(2) 當$t=1$時：

原方程組：$\begin{cases}2x=1\\ 2y+z=3\\ 2y+z=5\end{cases}$ 無解

由(1)和(2)可知：

當方程組無解時，t可為-1或1

故選(C)

10. 技巧與分析

(1) $\begin{vmatrix}a&b&c\\p&q&r\\x&y&z\end{vmatrix}$

$=aqz+brx+cpy-xqc-yra-zpb$

加前兩行：

$$\begin{array}{ccccc}a&b&c&a&b\\p&q&r&p&q\\x&y&z&x&y\end{array}\quad \ominus\ \ \oplus$$

(2) 二次方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根和為$-\dfrac{b}{a}$

解析

$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&x&x^2\\1&10&121\end{vmatrix}$

$$\begin{array}{ccccc}1&1&1&1&1\\1&x&x^2&1&x\\1&10&121&1&10\end{array}\quad \ominus\ \ \oplus$$

$=1\times x\times121+1\times x^2\times1+1\times1\times10$

$\quad-1\times x\times1-10\times x^2\times1-121\times1\times1$

$=121x+x^2+10-x-10x^2-121$

$=-9x^2+120x-111$

則方程式$-9x^2+120x-111=0$

所有解的和（兩根和）為$-\dfrac{120}{-9}=\dfrac{40}{3}$

11. 技巧與分析

設$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則

(1) ω為$x^3=1$的虛根，即$\omega^3=1$

(2) $\omega^2+\omega+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \omega+1=-\omega^2$

解析

$\because\quad \omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\quad \omega^3=1$且$\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{107}=\omega^{3\times35+2}=\omega^{3\times35}\times\omega^2=\left(\omega^3\right)^{35}\times\omega^2$

$\quad=1^{35}\times\omega^2=\omega^2$

(2) $\omega^2+\omega+1=0 \quad\Rightarrow\quad \omega+1=-\omega^2$

故$\dfrac{\omega^{107}}{\omega+1}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$

12. **〈法一〉**

技巧與分析

不等式的解：

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha<x<\beta$

其中$\alpha<\beta$

(2) $|f(x)|<k \quad\Leftrightarrow\quad -k<f(x)<k$

其中$k>0$

解析

$|x+a|<5$

$\Rightarrow\quad -5<x+a<5$

$\overset{-a}{\Rightarrow}\quad -5-a<x<5-a$

$\Rightarrow\quad [x-(-5-a)][x-(5-a)]<0$

$\Rightarrow\quad x^2+2ax+(a^2-25)<0$

$\overset{\times(-1)}{\Rightarrow}\quad -x^2-2ax+(25-a^2)>0$

與$-x^2+6x+b>0$作係數比較：

則$-2a=6 \quad\Rightarrow\quad a=-3$

$25-a^2=b \quad\Rightarrow\quad 25-(-3)^2=b$

$\quad\Rightarrow\quad b=16$

故$a+b=-3+16=13$

〈法二〉

技巧與分析

設 $k>0$，則 $|f(x)|<k \quad \Leftrightarrow \quad [f(x)]^2<k^2$

解析

$|x+a|<5$

$\Rightarrow \quad (x+a)^2<5^2$

$\Rightarrow \quad x^2+2ax+a^2<25$

$\Rightarrow \quad x^2+2ax+(a^2-25)<0$

$\overset{\times(-1)}{\Rightarrow} \quad -x^2-2ax+(25-a^2)>0$

與 $-x^2+6x+b>0$ 作係數比較：

則 $-2a=6 \quad \Rightarrow \quad a=-3$

$25-a^2=b \quad \Rightarrow \quad 25-(-3)^2=b$

$\Rightarrow \quad b=16$

故 $a+b=-3+16=13$

13. 〈法一〉

技巧與分析

設 a 、 b 、 c 成等比數列，則 $b^2=ac$

解析

$\because \quad a$ 、 b 、 c 成等比數列

$\therefore \quad b^2=ac$

$a^2+b^2+c^2=189 \quad \Rightarrow \quad a^2+c^2=189-b^2$

$a+b+c=9$

$\Rightarrow \quad a+c=9-b$

$\Rightarrow \quad (a+c)^2=(9-b)^2$

$\Rightarrow \quad a^2+2ac+c^2=81-18b+b^2$

$\Rightarrow \quad (a^2+c^2)+2ac=81-18b+b^2$

$\Rightarrow \quad (189-b^2)+2b^2=81-18b+b^2$

$\Rightarrow \quad 18b=-108$

$\Rightarrow \quad b=-6$

〈法二〉

技巧與分析

(1) 設 a 、 b 、 c 為等比數列，

若公比為 r，則 $b=ar$ ， $c=ar^2$

(2) $1+r^2+r^4=(1+r+r^2)(1-r+r^2)$

解析

設等比數列 a 、 b 、 c 的公比為 r

則 $b=ar$ ， $c=ar^2$

$a+b+c=9$

$\Rightarrow \quad a+ar+ar^2=9\cdots\cdots$①

$\Rightarrow \quad a(1+r+r^2)=9\cdots\cdots$②

$a^2+b^2+c^2=189$

$\Rightarrow \quad a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=189$

$\Rightarrow \quad a^2+a^2r^2+a^2r^4=189$

$\Rightarrow \quad a^2(1+r^2+r^4)=189\cdots\cdots$③

$\frac{③}{②}$ ： $\dfrac{a^2(1+r^2+r^4)}{a(1+r+r^2)}=\dfrac{189}{9}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{a^2(1+r+r^2)(1-r+r^2)}{a(1+r+r^2)}=21$

$\Rightarrow \quad a(1-r+r^2)=21$

$\Rightarrow \quad a-ar+ar^2=21\cdots\cdots$④

①–④ ： $2ar=-12 \quad \Rightarrow \quad ar=-6$

$\because \quad b=ar \qquad \therefore \quad b=-6$

14. 技巧與分析

不同底數的指數式之大小關係：

設 a 、 $b>0$ 且 $n>0$ ，

若 $a^n<b^n$ ，則 $a<b$

解析

$a^6=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^6=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\times6}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

$b^6=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^6=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}\times6}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

$c^2=\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}\right]^6=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}\times6}=\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{1}{6}$

則 $b^6<a^6<c^6 \quad \Rightarrow \quad b<a<c$

15. 技巧與分析

首數與尾數：

設 $\log_{10}x=n+c$ ， n 為整數且 $0\le c<1$ ，

則 $\log_{10}x$ 的首數為 n ，尾數為 c

解析

$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{20}=\left(3^{-1}\right)^{20}=3^{-1\times20}=3^{-20}$

$\log_{10}x=\log_{10}3^{-20}=(-20)\times\log_{10}3$

$=(-20)\times0.4771=-9.542=-10+0.458$

$\log_{10}x$ 的首數 $m=-10$，尾數為 0.458

而尾數的小數點後第一位數字為 n，則 $n=4$

故 $m+n=-10+4=-6$

16. 技巧與分析

(1) 相鄰的排法：讓相鄰的當作一物與他物一起排列，最後再算相鄰物的排法

(2) 有相同物的排列：若 n 個事物可以分成相異的 k 類（同類的事物均相同），第1類有 n_1 個，第2類有 n_2 個，⋯，第 k 類有 n_k 個，且 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，則排成一列的方法為 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ 個

解析

繞口令的文字有4個「四」、4個「十」、2個「個」

$\boxed{\text{十十十十}}$四四四四個個

(1) 把4個「十」視為1字與4個「四」、2個「個」排列：$\frac{7!}{4!2!}=105$ 種

(2) 4個「十」須相鄰排在一起：1種

由(1)和(2)可知：所求排法有 $105\times1=105$ 種

17. 技巧與分析

設 $f(x,y)$ 為 x、y 的展開式，其所有項的係數和為 $f(1,1)$，即 $x=1$、$y=1$ 代入 $f(x,y)$

解析

(1) 令 $x=1$、$y=1$ 代入 $(x-2y)^4$：

$(1-2\times1)^4=(-1)^4=1$

則 $(x-2y)^4$ 的展開式中

所有項係數和為1

(2) 令 $x=1$、$y=1$ 代入 $(x-2y)^5$：

$(1-2\times1)^5=(-1)^5=-1$

則 $(x-2y)^5$ 的展開式中

所有項係數和為 -1

由(1)和(2)可知：$a=1$，$b=-1$

故 $\frac{b}{a}=\frac{-1}{1}=-1$

18. 技巧與分析

期望值的意義：

(1) 袋中任取1球的期望值可以視為各球獎金的平均值

(2) 當取出1球的獎金期望值為 E 時，則取出 n 個球的獎金期望值為 $n\times E$

解析

袋子中共有 $3\times3=9$ 個球，總獎金為

$3\times5000+3\times3000+3\times1000=27000$（元）

任取1球的獎金期望值為

$E=\frac{\text{總獎金}}{\text{總球數}}=\frac{27000}{9}=3000$（元）

任取2球的獎金期望值為

$2E=2\times3000=6000$（元）

19. 技巧與分析

資料的伸縮、平移：

資料數據	平均值	標準差
$\times m$（伸縮）	$\times m$	$\times\lvert m\rvert$
$+n$（平移）	$+n$	不變

解析

令 $S_1=\{0,3,6,9,12,15\}=\{x_k \mid k=1,2,3,4,5,6\}$

則 S_1 的平均值與標準差為 a、b

設題目的另一組資料為 S_2

則 $S_2=\left\{-\frac{1}{3}x_k-1 \middle| k=1,2,3,4,5,6\right\}$

其平均值為 $-\frac{1}{3}\times a-1=-\frac{a}{3}-1$

標準差為 $\left|-\frac{1}{3}\right|\times b=\frac{b}{3}$

20. 技巧與分析

圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的圓心為

$\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$

解析

∵ 擲出石頭的方向是沿著直線 $y=x-1$

∴ 當圓的圓心在直線上時，則圓可為漣漪

(A) 圓 $x^2-2x+y^2+4y+1=0$

的圓心 $\left(-\frac{-2}{2},-\frac{4}{2}\right)=(1,-2)$

圓心 $(1,-2)$ 代入 $y=x-1$ ： $-2\neq 1-1$

(B) 圓 $x^2-4x+y^2-2y+4=0$

的圓心 $\left(-\frac{-4}{2},-\frac{-2}{2}\right)=(2,1)$

圓心 $(2,1)$ 代入 $y=x-1$ ： $1=2-1$

(C) 圓 $x^2-2x+y^2-4y+4=0$

的圓心 $\left(-\frac{-2}{2},-\frac{-4}{2}\right)=(1,2)$

圓心 $(1,2)$ 代入 $y=x-1$ ： $2\neq 1-1$

(D) 圓 $x^2-4x+y^2-6y+9=0$

的圓心 $\left(-\frac{-4}{2},-\frac{-6}{2}\right)=(2,3)$

圓心 $(2,3)$ 代入 $y=x-1$ ： $3\neq 2-1$

故選(B)

21. 技巧與分析

(1) 雙曲線的一般式配方成標準式

(2) 設雙曲線方程式如下：

① $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

② $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

則貫軸長為 $2a$ ，正焦弦長為 $\frac{2b^2}{a}$

解析

將雙曲線方程式配方成標準式：

$4(x^2+x)-16(y^2-y)=-1$

$$\Rightarrow 4\left(x^2+2\times\frac{1}{2}\times x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$-16\left(y^2-2\times\frac{1}{2}\times y+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$=-1+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-16\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-16\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=-4$$

$$\xRightarrow{\div(-4)} -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow 4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{1}=1$$

則 $a^2=\frac{1}{4}$ ， $b^2=1$ $\Rightarrow$ $a=\frac{1}{2}$ ， $b=1$

貫軸長 $i=2a=2\times\frac{1}{2}=1$

正焦弦長 $j=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 1^2}{\frac{1}{2}}=4$

故 $i+j=1+4=5$

22. 技巧與分析

微分公式：

設 k 、 n 為實數，

(1) 若 $f(x)=k$ ，則 $f'(x)=0$

(2) 若 $f(x)=x^n$ ，則 $f'(x)=nx^{n-1}$

(3) 若 $f(x)=k\times p(x)$ ，則 $f'(x)=k\times p'(x)$

(4) 若 $f(x)=p(x)\pm q(x)$ ，

則 $f'(x)=p'(x)\pm q'(x)$

解析

$f(x)=x^3+ax^2+bx+13$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=3\times(-1)^2+2a\times(-1)+b=1$

$\Rightarrow$ $-2a+b=-2$……①

$f'(0)=3\times 0^2+2a\times 0+b=2$ $\Rightarrow$ $b=2$

$b=2$ 代入 ① ： $-2a+2=-2$ $\Rightarrow$ $a=2$

故 $a+b=2+2=4$

23. 技巧與分析

設 $f(x)$ 為多項式函數，

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有極值，則 $f'(a)=0$

(2)

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f(x)$	$\nearrow$	極大值 $f(a)$	$\searrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

(3)

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f(x)$	$\searrow$	極小值 $f(a)$	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

解析

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+3$

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x^2-x-2)$

$=3(x+1)(x-2)$

(1) 令 $f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 3(x+1)(x-2)=0$

$\Rightarrow \quad x=-1$ 或 2

$f(-1)=(-1)^3-\frac{3}{2}\times(-1)^2-6\times(-1)+3=\frac{13}{2}$

$f(2)=2^3-\frac{3}{2}\times2^2-6\times2+3=-7$

(2) 若 $f'(x)<0 \quad \Rightarrow \quad 3(x+1)(x-2)<0$

$\Rightarrow \quad -1<x<2$

(3) 若 $f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad 3(x+1)(x-2)>0$

$\Rightarrow \quad x<-1$ 或 $x>2$

將(1)、(2)、(3)列表如下：

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$	$\searrow$	-7	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

故 $f(x)$ 的相對極大值 $a=\frac{13}{2}$ ，

相對極小值 $b=-7$

因此 $a+b=\frac{13}{2}+(-7)=-\frac{1}{2}$

24. 技巧與分析

若 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 為連續函數，

則 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ ，

其中 $a\le c\le b$

解析

$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$

$\Rightarrow \quad 1=\int_1^2 f(x)dx+2$

$\Rightarrow \quad \int_1^2 f(x)dx=-1$

故 $\int_1^5 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$

$=-1+4=3$

25. 技巧與分析

函數的左、右極限：

(1) 當 $x<a$ 且 $x\to a$ 時， $f(x)\to L_1$ ，

則 $\lim_{x\to a^-} f(x)=L_1$

(2) 當 $x>a$ 且 $x\to a$ 時， $f(x)\to L_2$ ，

則 $\lim_{x\to a^+} f(x)=L_2$

(3) 若 $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ ，

則 $\lim_{x\to a} f(x)=L$

(4) 若 $\lim_{x\to a^-} f(x)\neq\lim_{x\to a^+} f(x)$ ，

則 $\lim_{x\to a} f(x)$ 不存在

解析

(1) 當 $x<-1$ 時， $f(x)=x^2+2$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(x^2+2)=(-1)^2+2=3$

(2) 當 $x>-1$ 時， $f(x)=6-3x^2$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(6-3x^2)$

$=6-3\times(-1)^2=3$

由(1)和(2)可知： $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=3$

故 $\lim_{x\to -1} f(x)=3$