

龍騰文化

康熹文化

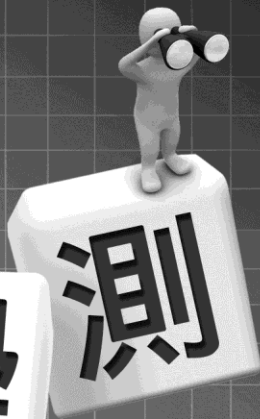
數學科

陳清風／桃園高中



105

學測



考情最前線

龍騰網站
可下載檔案



戰地記者龍騰報導

近幾年來，學測儼然成為升上大學的主要管道，今年的試題難度適中，鑑別度高。因而，這份學測試題更受到多方關注。

今年試題是採用 99 課綱的第四年，整體而言，題目靈活，文字閱讀量少，計算量適中，只要掌握基本觀念就能作答，難度適中，出現好幾題不錯的題目（如第 6、11、13、C、D、G 題），是一份有鑑別度的試題。這也意味著數學將是決定今年總級分高低的關鍵科目。

發行人：李枝昌
發行所：龍騰文化事業股份有限公司
網址：<http://www.lungteng.com.tw>

電話：02-22982933
傳真：02-22989766
出刊日：105 年 1 月 29 日

→ 命中率分析 2

→ 大考風向球 4

→ 試題大剖析 8



105 學測命題特色

前言

甄選入學已成升大學主流，今年「繁星推薦入學」共有 69 所大學、1729 個學系參加，提供 1 萬 5735 個招生名額，另「個人申請入學」則有 71 所大學、1964 個學系參加，招生名額 5 萬 5732 個，兩個管道總計招生名額超過 7 萬個，寫下歷年新高。臺大等多所頂尖大學甄選比率都超過五成，交大近七成，清大近八成。使得這份學測試題受到多方的關注。

99 課綱將數學課程的內容簡化，102 年首次採用此課綱命題，一般預測考題會比往年簡單，但卻是出乎大家意料之外的難。而 103 年第二次採用，則將難易度調回來了，是一份難易適中的試題。104 年第三次採用，又是意外的難。今年（105 年）第四次採用，再擺盪回適中的一方。

現就個人見解，針對今年的試題提出以下幾點分析與建議。

歷年題型分配

今年試題的題型沒有改變，仍然包含單選題、多選題及選填題三大題，各大題的題數略有更動，但總題數（20 題）及配分（每題 5 分）則維持不變。

年度 \ 題型	單選題	多選題	選填題	總題數
102 年	6	6	8	20
103 年	6	6	8	20
104 年	4	6	10	20
105 年	6	7	7	20

105 學測試題分布

今年試題的分布如下表（單元名稱的劃分是依據 99 課綱）：

冊	章	單元名稱	題號	配分	小計
一	1	數與式	7,8	10	25
	2	多項式函數	1,10	10	
	3	指數、對數函數	4	5	
二	1	數列與級數	6	5	25
	2	排列、組合	A	5	
	3	機率	13,F	10	
	4	數據分析	11	5	
三	1	三角	2,12	10	25
	2	直線與圓	3,E	10	
	3	平面向量	B	5	
四	1	空間向量	無	0	25
	2	空間中的平面與直線	5,9,G	15	
	3	矩陣	D	5	
	4	二次曲線	C	5	

觀察上表後，有以下看法：

1. 若以冊來分類，配分相當平均，每一冊各占四分之一（各 25 分）。
2. 第四冊第一章空間向量雖然沒配到分，但其實在第 9，G 兩題的解題過程中，是需要用到它的。
3. 若以章來分類，試題的分布涵蓋每一單元，這應是歷年學測的命題原則。

試題評析

底下針對今年數學考題作評析：

1. 第 1 題：這個難度很適合放第 1 題。
2. 第 2 題：三角函數值結合中位數出題，很新穎。
3. 第 3 題：要多注意 $(x+y)^2=1 \Leftrightarrow (x+y+1)(x+y-1)=0$ 這類方程式的圖形，這算 100 年學測題「方程式 $\left(\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2}\right)\left(\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2}\right)=0$ 的圖形」的考古題吧！
4. 第 4 題：典型的半衰期考古題。
5. 第 5 題：只要能寫出直線的方程式，再進一步求出與平面的交點就可解出，是有鑑別度的一題。
6. 第 6 題：考等比級數求和公式，再結合估計的設計，有創意。
7. 第 7 題：這題型是第一冊第一章主要的重點，考生應都練習過，放在多選題的第一題，很合理。

大考風向球

8. 第 8 題：學測常會出現不需用到高中數學就可解出的生活題，此題就是。但若沒發現甲商場奇異果的 5 顆裝單價低於 6 顆裝單價，應會錯兩個選項，此題就零分了。
9. 第 9 題：數據簡潔，能掌握既不平行也不相交的判定法就能解出。但若選項中能有對稱比例式及參數式的出現，會更具廣度。
10. 第 10 題：具鑑別度的多項式函數考題。第 4 選項應是為第 5 選項而設計的吧？
11. 第 11 題：調分數的考題很多，但用對數函數調的題目卻不多見，很新穎。但第 5 選項要在短時間內找到反例，很不容易，相信很多人是憑直覺回答的吧！
12. 第 12 題：SSA 型的題目，考生應不陌生。
13. 第 13 題：5 個選項共問了 10 個機率，真的要很細心、有耐心才能完全答對。
14. 第 A 題：這是有兩個限制條件的排列組合題目，除了解析中的解法外，也可以用排容原理解出。
15. 第 B 題：這是 99 課綱的新題目，也是龍騰版課本第三冊 3-4 例題 6，只改數據的類似題。
16. 第 C 題：除了用橢圓的定義解外，也可使用正焦弦長的公式解得。
17. 第 D 題：此題的出現，會使常被忽視的「高斯消去法」受到大家的重視。
18. 第 E 題：出題者善用填充題格式的設計，提示 a 不為負，降低題目的難度，很用心。
19. 第 F 題：不難，但要有系統、有耐心才能答對。
20. 第 G 題：設 C 為原點的坐標系，再利用截距式寫出平面 BDG 的方程式，可降低難度。或將長方體視為邊長為 1 的正立方體，也可降低難度。
21. 缺「概念題」：往年都有那種「筆在手中轉轉就可答對的題目」，今年很缺乏。
22. 數據美化：數據的設計可看出命題者的用心。
23. 選項細膩：答案與選項相同的設計可避免考生誤答，如單選第 1,3 題。
24. 圖形題目較往年少。
25. 跨章節的題目夠多。

結語

整體而言，題目靈活，文字閱讀量少，計算量適中，只要掌握基本觀念就能作答，難度適中，出現好幾題不錯的題目（如第 6、11、13、C、D、G 題），是一份有鑑別度的試題。這也意味著數學將是決定今年總級分高低的關鍵科目。

未來命題趨勢

大考中心所列數學考科的測驗目標，為評量考生是否具備「概念性」、「程序性」及「解題能力」等三方面的知識與能力。學測應以評量前二項為主，較偏向概念性知識與程序性知識。往年這三方面知能的試題各約占三分之一，今年應符合這個組題原則。相信大考中心會審慎檢視這份試卷，讓來年的試題都符合學測評量的目標。

在 99 課綱的框架內，對未來學測的命題趨勢有以下幾點看法：

1. **基本概念**：著重基本概念的靈活應用，一直是學測命題的中心想法，加強基本概念的練習是必做的基本功夫。
2. **情境題**：生活化的試題年年都有，也是必然的命題趨勢，由於這類試題往往會比一般題目為長，所以應培養仔細閱讀题目的耐性，以及加強將問題與教材連結的能力。
3. **熱門單元**：有幾個預期會考的單元沒出現，反而可能會成為明年的大熱門，值得注意。例如：拉格朗日插值法、迴歸直線、貝氏定理、轉移矩陣等。
4. **三星以下的單元**：指考對標示三星以下的單元是不直接命題的，這些單元往往會出在學測，例如：二次曲線（一星），數列與級數（二星），數與式（二星）等。
5. **跨章節題**：學測從 14 個單元中命 20 題，必然會有幾題涵蓋兩個單元以上，也藉此提高試題的鑑別度。因此，加強單元與單元之間的連結能力，多練習跨章節的題目，才能在眾多考生中勝出。

以上提出個人淺見供大家參考，尚祈前輩先進們不吝賜教。



第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

（此份試卷解題係依據大學考試中心於 105 年 1 月 23 日所公告之答案為主）

說明：第1題至第6題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得5分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1 二次函數的最大值與最小值

設 $f(x)$ 為二次實係數多項式，已知 $f(x)$ 在 $x=2$ 時有最小值 1 且 $f(3)=3$ 。請問 $f(1)$ 之值為下列哪一選項？

(1) 5 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 條件不足，無法確定。

出處：龍騰版《數學 1》第 2 章 多項式函數

《稱霸高中數學 1~4 冊總複習講義》第 2 單元 多項式函數

解題觀念：能利用最小值設出多項式 $f(x)$ ，再代點便可解出。

答案：(3)

解析：因為 $f(x)$ 在 $x=2$ 時有最小值 1，所以可設

$$f(x) = a(x-2)^2 + 1, \quad a > 0.$$

又因為 $f(3) = a + 1 = 3$ ，所以 $a = 2$ ，即

$$f(x) = 2(x-2)^2 + 1.$$

因此 $f(1) = 2 + 1 = 3$ ，故選(3)。



2 正弦函數值的定義

請問 $\sin 73^\circ$, $\sin 146^\circ$, $\sin 219^\circ$, $\sin 292^\circ$, $\sin 365^\circ$ 這五個數值的中位數是哪一個?

(1) $\sin 73^\circ$ (2) $\sin 146^\circ$ (3) $\sin 219^\circ$ (4) $\sin 292^\circ$ (5) $\sin 365^\circ$.

出處：龍騰版《數學3》第1章 三角

《稱霸高中數學1~4冊總複習講義》第8單元 三角

解題觀念：知道正弦函數值及中位數的定義，便可解出。

答案：(5)

解析：利用換算公式，將角度化為銳角，得

$$\sin 146^\circ = \sin(180^\circ - 34^\circ) = \sin 34^\circ,$$

$$\sin 219^\circ = \sin(180^\circ + 39^\circ) = -\sin 39^\circ,$$

$$\sin 292^\circ = \sin(360^\circ - 68^\circ) = -\sin 68^\circ,$$

$$\sin 365^\circ = \sin(360^\circ + 5^\circ) = \sin 5^\circ .$$

因為在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 的範圍內，正弦值為正且角度愈大值愈大，所以

$$\sin 73^\circ > \sin 146^\circ > \sin 365^\circ > \sin 219^\circ > \sin 292^\circ .$$

得知中位數為 $\sin 365^\circ$ ，故選(5)。

3 圓與直線的交點

坐標平面上兩圖形 Γ_1 , Γ_2 的方程式分別為： $\Gamma_1 : (x+1)^2 + y^2 = 1$, $\Gamma_2 : (x+y)^2 = 1$. 請問 Γ_1 , Γ_2 共有幾個交點?

(1) 1個 (2) 2個 (3) 3個 (4) 4個 (5) 0個 .

出處：龍騰版《數學3》第2章 直線與圓

《稱霸高中數學1~4冊總複習講義》第9單元 直線與圓

解題觀念：能畫出 Γ_1 與 Γ_2 圖形就可解出。

答案：(2)

解析：由圓的標準式知， Γ_1 是圓心為 $(-1, 0)$ ，半徑為1的圓。

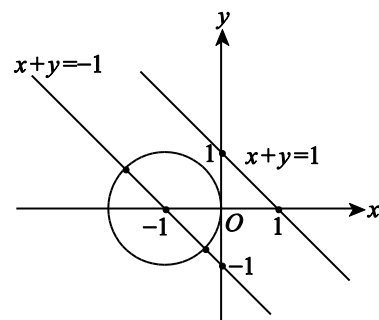
因為

$$(x+y)^2 = 1 \Leftrightarrow x+y=1 \text{ 或 } x+y=-1,$$

所以 Γ_2 為二平行直線 $x+y=1$ 與 $x+y=-1$.

由右圖得知，兩圖形共有2個交點，

故選(2)。



4 指數的應用

放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A ， B ，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而120小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為7.5小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？

(1)8小時 (2)10小時 (3)12小時 (4)15小時 (5)20小時。

出處：龍騰版《數學1》第3章 指數、對數函數

《稱霸高中數學1~4冊總複習講義》第3單元 指數、對數函數

解題觀念：了解半衰期的定義，再利用指數的運算解出。

答案：(1)

解析：設 B 的半衰期為 T 小時，且開始記錄時 B 的質量為 n 。依題意，得

$$2n\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{7.5}} = n\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{T}},$$

約去 n ，得

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{T}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{T}},$$

即 $15 = \frac{120}{T}$ ，解得 $T = 8$ ，故選(1)。

5 空間中平面與直線的交點

坐標空間中一質點自點 $P(1,1,1)$ 沿著方向 $\vec{a} = (1,2,2)$ 等速直線前進，經過5秒後剛好到達平面 $x - y + 3z = 28$ 上，立即轉向沿著方向 $\vec{b} = (-2,2,-1)$ 依同樣的速率等速直線前進。請問再經過幾秒此質點會剛好到達平面 $x = 2$ 上？

(1)1秒 (2)2秒 (3)3秒 (4)4秒 (5)永遠不會到達。

出處：龍騰版《數學4》第2章 空間中的平面與直線

《稱霸高中數學1~4冊總複習講義》第12單元 空間中的平面與直線

解題觀念：能寫出直線的參數式，及求直線與平面的交點。

答案：(2)



解 析：設質點到達兩平面的點分別為 Q 與 R ，如右圖所示。

$$\text{將參數式 } \vec{PQ} : \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z=1+2t \end{cases} \text{ 代入 } x-y+3z=28, \text{ 得}$$

$$(1+t)-(1+2t)+3(1+2t)=28 \Rightarrow 3+5t=28 \Rightarrow t=5,$$

即 $Q(6,11,11)$ 。

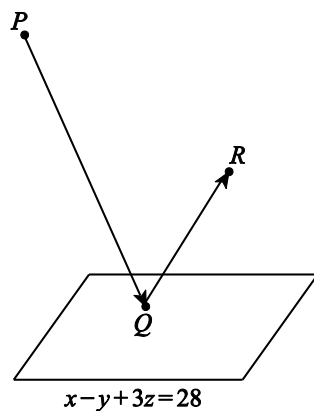
$$\text{再將參數式 } \vec{QR} : \begin{cases} x=6-2s \\ y=11+2s \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z=11-s \end{cases} \text{ 代入 } x=2, \text{ 得}$$

$$6-2s=2 \Rightarrow s=2,$$

即 $R(2,15,9)$ 。

$$\text{因為 } \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \text{ 所以經過 } 5 \times \frac{2}{5} = 2 \text{ 秒到達 } R \text{ 點,}$$

故選(2)。



6 等比級數的和

設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列。已知前十項的和為 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 80$ ，前五個奇數項的和為

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 120$ ，請選出首項 a_1 的正確範圍。

(1) $a_1 < 80$ (2) $80 \leq a_1 < 90$ (3) $90 \leq a_1 < 100$ (4) $100 \leq a_1 < 110$ (5) $110 \leq a_1$ 。

出 處：龍騰版《數學 2》第 1 章 數列與級數

《稱霸高中數學 1~4 冊總複習講義》第 4 單元 數列與級數

解題觀念：能使用等比級數的和公式。

答 案：(4)

解 析：設公比為 r ，利用等比級數的和公式，得

$$\begin{cases} \frac{a_1(1-r^{10})}{1-r} = 80 \\ \frac{a_1(1-r^{10})}{1-r^2} = 120 \end{cases},$$

兩式相除，得 $1+r = \frac{2}{3} \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$ ，因此

$$a_1 \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{10} \right) = 80 \left(1 + \frac{1}{3} \right) \Rightarrow a_1 \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{10} \right) = \frac{320}{3}.$$

因為 $1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{10} \approx 1$ ，所以 $a_1 \approx \frac{320}{3}$ ，

故選(4)。

二、多選題（占 35 分）

說明：第7題至第13題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯2個選項者，得1分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7 數線上的幾何

下列各方程式中，請選出有實數解的選項。

(1) $|x|+|x-5|=1$ (2) $|x|+|x-5|=6$ (3) $|x|-|x-5|=1$ (4) $|x|-|x-5|=6$ (5) $|x|-|x-5|=-1$.

出 處：龍騰版《數學 1》第 1 章 數與式

《稱霸高中數學 1~4 冊總複習講義》第 1 單元 數與式

解題觀念：要善用 $|a-b|$ 等於數線上 $A(a)$ 與 $B(b)$ 的距離。

答 案：(2)(3)(5)

解 析：在數線上， $|x|=|x-0|$ 表 $P(x)$ 與 $O(0)$ 的距離； $|x-5|$ 表 $P(x)$ 與 $A(5)$ 的距離。

(1) 分兩種情形討論：

(i) 若 P 在 \overline{OA} 上，則 $|x|+|x-5|=\overline{OA}=5$.

(ii) 若 P 在 \overline{OA} 外，則 $|x|+|x-5|>\overline{OA}=5$.

即 $|x|+|x-5|\geq 5$ ，得知此選項錯。

(2) 當 $x=-0.5$ 或 5.5 時，滿足 $|x|+|x-5|=6$.

(3) 當 $x=3$ 時，滿足 $|x|-|x-5|=1$.

(4) 分兩種情形討論：

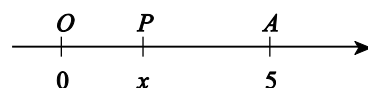
(i) 若 P 在 \overline{OA} 上，則 $|x|-|x-5|\leq 5$.

(ii) 若 P 在 \overline{OA} 外，則 $|x|-|x-5|=5$ 或 -5 .

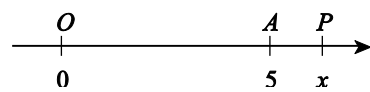
得知此選項錯。

(5) 當 $x=2$ 時，滿足 $|x|-|x-5|=-1$.

故選(2)(3)(5) .



(i) P 在 \overline{OA} 上



(ii) P 在 \overline{OA} 外



8 數的大小

下面是甲、乙兩個商場的奇異果以及蘋果不同包裝的價格表，例如：甲商場奇異果價格「35元／一袋2顆」表示每一袋有2顆奇異果，價格35元。

甲商場售價

奇異果價格	20元／一袋1顆	35元／一袋2顆	80元／一袋5顆	100元／一袋6顆
蘋果價格	45元／一袋1顆	130元／一袋3顆	260元／一袋6顆	340元／一袋8顆

乙商場售價

奇異果價格	18元／一袋1顆	50元／一袋3顆	65元／一袋4顆	95元／一袋6顆
蘋果價格	50元／一袋1顆	190元／一袋4顆	280元／一袋6顆	420元／一袋10顆

依據上述數據，請選出正確的選項。

- (1) 在甲商場買一袋3顆裝的蘋果所需金額低於買三袋1顆裝的蘋果
- (2) 乙商場的奇異果售價，一袋裝愈多顆者，其每顆單價愈低
- (3) 若只想買奇異果，則在甲商場花500元最多可以買到30顆奇異果
- (4) 如果要買12顆奇異果和4顆蘋果，在甲商場所需最少金額低於在乙商場所需最少金額
- (5) 無論要買多少顆蘋果，在甲商場所需最少金額都低於在乙商場所需最少金額。

出處：龍騰版《數學1》第1章 數與式

《稱霸高中數學1~4冊總複習講義》第1單元 數與式

解題觀念：計算出每一顆水果的單價後，再作分析。

答案：(1)(2)(4)

解析：計算每一包裝一顆水果的價錢（依題中的順序，四捨五入至小數第一位）：

甲商場					乙商場				
奇異果	20	17.5	16	16.7	奇異果	18	16.7	16.3	15.8
蘋果	45	43.3	43.3	42.5	蘋果	50	47.5	46.7	42

結論：除甲的奇異果5顆裝較6顆裝便宜及甲的蘋果3顆裝與6顆裝每顆單價相同外，一袋裝愈多顆者其每顆單價愈低。

- (1) 一袋3顆裝130元低於三袋1顆裝 $3 \times 45 = 135$ （元）。
 - (2) 由乙商場的分析表得知，此選項正確。
 - (3) 買5顆裝六袋及1顆裝一袋，需 $6 \times 80 + 1 \times 20 = 500$ （元），可買31顆。
 - (4) 甲：最少需 $(2 \times 80 + 1 \times 35) + (1 \times 130 + 1 \times 45) = 370$ （元）。
乙：最少需 $2 \times 95 + 1 \times 190 = 380$ （元）。
得知甲低於乙。
 - (5) 錯！當買40顆蘋果時，甲最少需 $5 \times 340 = 1700$ （元），乙最少需 $4 \times 420 = 1680$ （元），此時甲高於乙。
- 故選(1)(2)(4)。

9 歪斜線的判定

下列各直線中，請選出和 z 軸互為歪斜線的選項。

$$(1) L_1 : \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \quad (2) L_2 : \begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases} \quad (3) L_3 : \begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases} \quad (4) L_4 : \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad (5) L_5 : \begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases} .$$

出處：龍騰版《數學4》第2章 空間中的平面與直線

《稱霸高中數學1~4冊總複習講義》第12單元 空間中的平面與直線

解題觀念：空間中，若兩直線既不平行也不相交，則兩直線歪斜。

答案：(3)(5)

解析：將 z 軸及 5 個選項的方程式均改寫為參數式：

$$z \text{ 軸} : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \quad L_1 : \begin{cases} x=0 \\ y=t_1 \\ z=0 \end{cases} (t_1 \in \mathbb{R}), \quad L_2 : \begin{cases} x=t_2 \\ y=0 \\ z=1-t_2 \end{cases} (t_2 \in \mathbb{R}),$$

$$L_3 : \begin{cases} x=t_3 \\ y=1-t_3 \\ z=0 \end{cases} (t_3 \in \mathbb{R}), \quad L_4 : \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t_4 \end{cases} (t_4 \in \mathbb{R}), \quad L_5 : \begin{cases} x=t_5 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} (t_5 \in \mathbb{R}).$$

(1) z 軸與 L_1 聯立，解得 $x=0$ ， $y=0$ ， $z=0$ ，即交一點 $(0,0,0)$ 。

(2) z 軸與 L_2 聯立，解得 $x=0$ ， $y=0$ ， $z=1$ ，即交一點 $(0,0,1)$ 。

(3) z 軸與 L_3 聯立，無解，即不相交。

又方向向量 $\vec{v}_z = (0,0,1)$ 與 $\vec{v}_3 = (1,-1,0)$ 不平行，所以歪斜。

(4) 因為方向向量 $\vec{v}_z = (0,0,1)$ 與 $\vec{v}_4 = (0,0,1)$ 平行，所以不是歪斜。

(5) z 軸與 L_5 聯立，無解，即不相交，

又方向向量 $\vec{v}_z = (0,0,1)$ 與 $\vec{v}_5 = (1,0,0)$ 不平行，所以歪斜。

故選(3)(5)。



10 多項式方程式

設 a, b, c 皆為正整數，考慮多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$ 。請選出正確的選項。

- (1) $f(x) = 0$ 無正根 (2) $f(x) = 0$ 一定有實根 (3) $f(x) = 0$ 一定有虛根
(4) $f(1) + f(-1)$ 的值是偶數 (5) 若 $a + c > b + 3$ ，則 $f(x) = 0$ 有一根介於 -1 與 0 之間。

出處：龍騰版《數學 1》第 2 章 多項式函數

《稱霸高中數學 1~4 冊總複習講義》第 2 單元 多項式函數

解題觀念：了解根的意義及勘根定理便可解出。

答案：(1)(4)(5)

解析：(1) 若 $r > 0$ ，則 $f(r) = r^4 + ar^3 + br^2 + cr + 2$ 恆正，即必不等於 0。

因此 $f(x) = 0$ 無正根。

(2) 錯！如 $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2) = 0$ 的四根為 $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ， $\pm\sqrt{2}i$ ，沒有實根。

(3) 錯！如 $f(x) = (x+1)^3(x+2) = 0$ 的四根為 $-1, -1, -1, -2$ ，沒有虛根。

(4) $f(1) + f(-1) = (1 + a + b + c + 2) + (1 - a + b - c + 2) = 6 + 2b$ 為偶數。

(5) 因為 $f(-1) = 1 - a + b - c + 2 = (b + 3) - (a + c) < 0$ 且 $f(0) = 2 > 0$ ，

所以根據勘根定理得知，在 -1 與 0 之間至少有一實根。

故選(1)(4)(5)。

11 對數函數及一維數據分析

一個 41 人的班級某次數學考試，每個人的成績都未超過 59 分。老師決定以下列方式調整成績：原始成績為 x 分的學生，新成績調整為 $40\log_{10}\left(\frac{x+1}{10}\right) + 60$ 分（四捨五入到整數）。請選出正確的選項。

- (1) 若某人原始成績是 9 分，則新成績為 60 分
(2) 若某人原始成績超過 20 分，則其新成績超過 70 分
(3) 調整後全班成績的全距比原始成績的全距大
(4) 已知小文的原始成績恰等於全班原始成績的中位數，則小文的新成績仍然等於調整後全班成績的中位數
(5) 已知小美的原始成績恰等於全班原始成績的平均，則小美的新成績仍然等於調整後全班成績的平均（四捨五入到整數）。

出處：龍騰版《數學 2》第 4 章 數據分析

《稱霸高中數學 1~4 冊總複習講義》第 7 單元 數據分析

試題大剖析

解題觀念：了解對數函數圖形的性質，及數據分析的名詞之意義就可解出。

答案：(1)(2)(4)

解析：令新成績為 y 分，利用對數的運算公式，得

$$y = 40 \log \left(\frac{x+1}{10} \right) + 60 = 40(\log(x+1) - \log 10) + 60 = 40 \log(x+1) + 20 .$$

(1) 若 $x=9$ ，則 $y = 40 \log 10 + 20 = 60$.

(2) 若 $x > 20$ ，則

$$y > 40 \log 21 + 20 = 40(\log 3 + \log 7) + 20 \approx 40(0.4771 + 0.8451) + 20 = 72.888 .$$

(3) 錯！如班上最低分 9 分最高分 39 分，則調整後成績的全距為

$$(40 \log 40 + 20) - (40 \log 10 + 20) = 40(\log 40 - \log 10) = 40 \log 4 \approx 40 \times 0.6020 = 24.08 ,$$

小於原始成績的全距 $39 - 9 = 30$.

(4) 因為函數 $y = 40 \log(x+1) + 20$ 為嚴格遞增函數，所以調整前後每人的名次不變，因此小文的新成績仍為中位數 .

(5) 錯！如班上原始成績為

0 分 8 人，9 分 21 人，15 分 12 人，平均 9 分，

則調整後的成績為

20 分 8 人，60 分 21 人， $40 \log 16 + 20 \approx 68$ 分 12 人，平均約 55 分 .

此時若小美原成績 9 分（等於平均），但新成績 60 分卻不是新成績的平均 .

故選(1)(2)(4) .

12 解三角形

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 20^\circ$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 4$. 請選出正確的選項 .

- (1) 可以確定 $\angle B$ 的餘弦值 (2) 可以確定 $\angle C$ 的正弦值 (3) 可以確定 $\triangle ABC$ 的面積
(4) 可以確定 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑 (5) 可以確定 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑 .

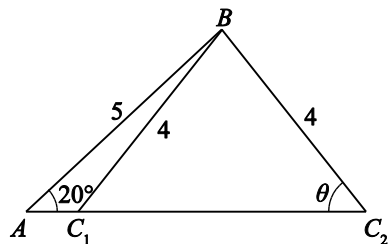
出處：龍騰版《數學 3》第 1 章 三角

《稱霸高中數學 1~4 冊總複習講義》第 8 單元 三角

解題觀念：知道 SSA 不能唯一決定三角形 .

答案：(2)(5)

解析：滿足條件的三角形共有 $\triangle ABC_1$ 與 $\triangle ABC_2$ 兩個三角形，如下圖：





設 $\angle AC_2B = \theta$ ，則 $\angle ABC_2 = 160^\circ - \theta$ ， $\angle AC_1B = 180^\circ - \theta$ ， $\angle ABC_1 = \theta - 20^\circ$ 。

- (1) 因為 $\cos(160^\circ - \theta)$ 不恆等於 $\cos(\theta - 20^\circ)$ ，所以 $\cos B$ 的值不確定。
- (2) 因為 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ ，即 $\sin \angle AC_1B = \sin \angle AC_2B$ ，所以 $\sin C$ 的值確定。
- (3) 由圖知， $\triangle ABC_1$ 的面積小於 $\triangle ABC_2$ 的面積。
- (4) 由圖知， $\triangle ABC_1$ 的內切圓半徑小於 $\triangle ABC_2$ 的內切圓半徑。
- (5) 根據正弦定理，兩個三角形的外接圓半徑均為 $\frac{4}{2\sin 20^\circ}$ 。

故選(2)(5)。

13 機率

甲、乙、丙、丁四位男生各騎一台機車約 A, B, C, D 四位女生一起出遊，他們約定讓四位女生依照 A, B, C, D 的順序抽鑰匙來決定搭乘哪位男生的機車。其中除了 B 認得甲的機車鑰匙，並且絕對不會選取之外，每個女生選取這些鑰匙的機會都均等。請選出正確的選項。

- (1) A 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到甲的鑰匙的機率
- (2) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 D 抽到甲的鑰匙的機率
- (3) A 抽到乙的鑰匙的機率大於 B 抽到乙的鑰匙的機率
- (4) B 抽到丙的鑰匙的機率大於 C 抽到丙的鑰匙的機率
- (5) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到乙的鑰匙的機率。

出處：龍騰版《數學 2》第 3 章 機率

《稱霸高中數學 1~4 冊總複習講義》第 6 單元 機率

解題觀念：找出樣本空間，再比較各機率。

答案：(4)(5)

解析：因為 B 認得甲的鑰匙，所以

$$(1) P(A \text{ 抽到甲}) = \frac{1}{4}, P(C \text{ 抽到甲}) = \frac{3}{4} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

$$(2) P(C \text{ 抽到甲}) = \frac{3}{8}, P(D \text{ 抽到甲}) = \frac{3}{4} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{8}.$$

$$(3) P(A \text{ 抽到乙}) = \frac{1}{4}, P(B \text{ 抽到乙}) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}.$$

A抽到甲 A沒抽到甲

$$(4) P(B \text{ 抽到丙}) = P(B \text{ 抽到乙}) = \frac{1}{3}, P(C \text{ 抽到丙}) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{24}.$$

A抽到甲 A沒抽到甲

$$(5) P(C \text{ 抽到甲}) = \frac{3}{8}, P(C \text{ 抽到乙}) = P(C \text{ 抽到丙}) = \frac{5}{24}.$$

故選(4)(5)。

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14 - 31）。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A 排列組合與矩陣的相等

考慮每個元（或稱元素）只能是 0 或 1 的 2×3 階矩陣，且它的第一列與第二列不相同且各列的元素不能全為零，這樣的矩陣共有 ⑭⑮ 個。

出處：龍騰版《數學 2》第 2 章 排列、組合
《數學 4》第 3 章 矩陣
《稱霸高中數學 1~4 冊總複習講義》第 5 單元 排列、組合
第 13 單元 矩陣

解題觀念：了解矩陣相等的定義，及乘法原理便可解出。

答案：42

解析：因為 2×3 階矩陣 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ 有二列三行，所以有 6 個元。

先排第一列，並排除皆排 0，有 $2^3 - 1 = 7$ 種，再排第二列，並排除皆排 0，也有 $2^3 - 1 = 7$ 種，因此共有 $7 \times 7 = 49$ 種。

又當排完第一列時，若第二列與第一列排相同，則兩列相同，因此兩列相同的排法有 7 種。故所求的排法共有 $49 - 7 = 42$ 種。

B 二階行列式的應用

坐標平面上 O 為原點，設 $\vec{u} = (1, 2)$ ， $\vec{v} = (3, 4)$ 。令 Ω 為滿足 $\vec{OP} = x\vec{u} + y\vec{v}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ， $-3 \leq y \leq \frac{1}{2}$ ，則 Ω 的面積為 $\frac{\textcircled{16}}{\textcircled{17}}$ 平方單位。（化成最簡分數）

出處：龍騰版《數學 3》第 3 章 平面向量
《稱霸高中數學 1~4 冊總複習講義》第 10 單元 平面向量

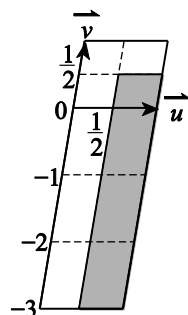
解題觀念：會使用二階行列式求平行四邊形的面積。

答案： $\frac{7}{2}$

解析：如圖所示， Ω 的面積等於 \vec{u} 與 \vec{v} 所張出之

平行四邊形面積的 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{7}{4}$ 倍，即

$$\frac{7}{4} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{7}{4} \times 2 = \frac{7}{2} .$$



**C 橢圓的定義**

從橢圓 Γ 的兩焦點分別作垂直於長軸的直線，交橢圓於四點。已知連此四點得一個邊長為2的正方形，則 Γ 的長軸長為 18 + $\sqrt{19}$ 。

出處：龍騰版《數學4》第4章 二次曲線

《稱霸高中數學1~4冊總複習講義》第14單元 二次曲線

解題觀念：了解橢圓的定義就可解出。

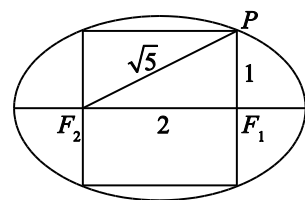
答案： $1+\sqrt{5}$

解析：如右圖，根據畢氏定理，得

$$\overline{PF_2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

由橢圓的定義，得長軸長為

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 1 + \sqrt{5}.$$

**D 高斯消去法**

線性方程組 $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=6 \\ x-y=6 \\ x-2y-z=8 \end{cases}$ 經高斯消去法計算後，其增廣矩陣可化簡為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ ，則

$a = \underline{20}$ ， $b = \underline{21}$ ， $c = \underline{22}$ ， $d = \underline{23 \ 24}$ 。

出處：龍騰版《數學4》第3章 矩陣

《稱霸高中數學1~4冊總複習講義》第13單元 矩陣

解題觀念：會使用高斯消去法解聯立方程式就可解出。

答案： $a=1$ ， $b=4$ ， $c=1$ ， $d=-2$

解析：使用高斯消去法，得

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 8 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \end{aligned}$$

故 $a=1$ ， $b=4$ ， $c=1$ ， $d=-2$ 。

E 二元一次不等式的圖形

設 a 為一實數，已知在第一象限滿足聯立不等式 $\begin{cases} x-3y \leq a \\ x+2y \leq 14 \end{cases}$ 的所有點所形成之區域面積為 $\frac{213}{5}$ 平方單位，則 $a = \underline{\textcircled{25}}$.

出 處：龍騰版《數學3》第2章 直線與圓

《稱霸高中數學 1~4 冊總複習講義》第9單元 直線與圓

解題觀念：畫出二元一次不等式的圖形就可解出。

答 案：6

解 析：當 $a=0$ 時， $x-3y=0$ 與 $x+2y=14$ 的交點為 $(\frac{42}{5}, \frac{14}{5})$ ，

得區域面積為 $\frac{1}{2} \times 7 \times \frac{42}{5} = \frac{147}{5}$ ，小於 $\frac{213}{5}$ ，得知 a 為正數。

(也可以由答案格式的提示知 a 不為負。)

如右圖，解 $\begin{cases} x-3y=a \\ x+2y=14 \end{cases}$ ，得交點 P 的 y 坐標為 $\frac{14-a}{5}$ 。

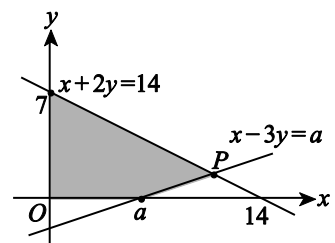
因為區域面積為 $\frac{213}{5}$ ，所以

$$\frac{1}{2} \times 14 \times 7 - \frac{1}{2} \times (14-a) \times \frac{14-a}{5} = \frac{213}{5},$$

$$\Rightarrow 49 - \frac{(14-a)^2}{10} = \frac{213}{5}$$

$$\Rightarrow (14-a)^2 = 64$$

$$\Rightarrow a = 6 \text{ 或 } 22 \text{ (不合)}.$$



F 條件機率

投擲一公正骰子三次，所得的點數依序為 a, b, c 。在 b 為奇數的條件下，行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ 的機

率為 $\frac{\textcircled{26}\textcircled{27}}{\textcircled{28}\textcircled{29}}$ 。(化成最簡分數)

出 處：龍騰版《數學2》第3章 機率

《稱霸高中數學 1~4 冊總複習講義》第6單元 機率

解題觀念：了解條件機率及行列式的定義就可解出。



答 案： $\frac{19}{36}$

解 析：因為 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ ，所以 $ac - b^2 > 0$ ，即 $b^2 < ac$ 。當 b 為奇數時，列表討論如下：

b	1		3					5	
b^2	1		9					25	
a	1	2~6	2	3	4	5	6	5	6
c	2~6	1~6	5~6	4~6	3~6	2~6	2~6	6	5~6
個數	5	30	2	3	4	5	5	1	2

合計共 $5+30+2+3+4+5+5+1+2=57$ (個)。

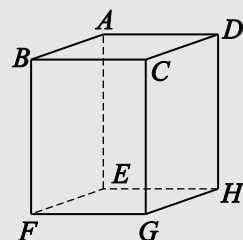
根據條件機率的定義，得

$$P(b^2 < ac | b \text{ 為奇}) = \frac{n(b \text{ 為奇且 } b^2 < ac)}{n(b \text{ 為奇})} = \frac{57}{6 \times 3 \times 6} = \frac{19}{36}.$$

G 平面方程式

如右圖所示， $ABCD-EFGH$ 為一長方體。若平面 BDG 上一點 P 滿足

$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + 2\vec{AD} + a\vec{AE}, \text{ 則實數 } a = \frac{\textcircled{30}}{\textcircled{31}}. \text{ (化成最簡分數)}$$



出 處：龍騰版《數學4》第2章 空間中的平面與直線方程式

《稱霸高中數學1~4冊總複習講義》第12單元 空間中的平面與直線

解題觀念：建立坐標系，再使用平面的截距式解出。

答 案： $\frac{4}{3}$

解 析：如右圖，建立坐標系，各點坐標為

$$C(0,0,0), D(d,0,0), B(0,b,0), G(0,0,g),$$

$$\text{則 } A(d,b,0), E(d,b,g),$$

由截距式，得平面 BDG 的方程式為 $\frac{x}{d} + \frac{y}{b} + \frac{z}{g} = 1$ 。

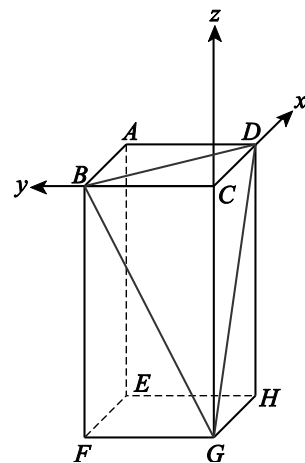
設點 P 的坐標為 (x, y, z) ，

因為 $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + 2\vec{AD} + a\vec{AE}$ ，所以

$$(x-d, y-b, z) = \frac{1}{3}(-d, 0, 0) + 2(0, -b, 0) + a(0, 0, g) = \left(-\frac{d}{3}, -2b, ag\right),$$

得 $x = \frac{2d}{3}$ ， $y = -b$ ， $z = ag$ ，即 P 的坐標為 $\left(\frac{2d}{3}, -b, ag\right)$ 。

將 P 代入 $\frac{x}{d} + \frac{y}{b} + \frac{z}{g} = 1$ ，得 $\frac{2}{3} + (-1) + a = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$ 。



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$ ；

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ，

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B，$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}。$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

4. 一維數據 X ： x_1, x_2, \dots, x_n ，

$$\text{算術平均數 } \mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i，$$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n \mu_X^2 \right)}。$$

5. 二維數據 (X, Y) ： $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n \sigma_X \sigma_Y}，$$

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$ 。

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。