102 年 數學科 學科能力測驗試卷

總　　分

___________科___________班　學號___________姓名_______________

第一部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項．各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算．

(　　)1. 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生．

一、國文成績或英文成績 70 分（含）以上；二、數學成績及格．

已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格．請問下列哪一個選項的推論是正確的？

(1)小文的英文成績未達 70 分

(2)小文的數學成績不及格

(3)小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格

(4)小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格

(5)小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格．〔第二冊 CH2〕

(　　)2. 令 $a=2.6^{10}-2.6^{9}$，$b=2.6^{11}-2.6^{10}$，$c=\dfrac{2.6^{11}-2.6^{9}}{2}$．請選出正確的大小關係．

(1) $a>b>c$　(2) $a>c>b$　(3) $b>a>c$　(4) $b>c>a$　(5) $c>b>a$　．〔第一冊 CH3〕

(　　)3. 袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球．由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回．若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？

(1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{5}{12}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{3}{5}$　(5) $\frac{2}{3}$　．〔第二冊 CH3〕

(　　)4. 已知以下各選項資料的迴歸直線（最適合直線）皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項．

(1) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 1 & 13 & 1 \end{array}$　(2) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 3 & 10 & 2 \end{array}$　(3) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 5 & 7 & 3 \end{array}$　(4) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 9 & 1 & 5 \end{array}$　(5) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 7 & 4 & 4 \end{array}$　．

〔第二冊 CH4〕

(　　)5. 將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子．每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆．請選出分裝的方法數．

(1) 55　(2) 66　(3) 132　(4) 198　(5) 253　．〔第二冊 CH2〕

(　　)6. 莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球．在上午 10：00 熱氣球的仰角為 30°，到上午 10：10 仰角變成 34°．請利用下表判斷到上午 10：30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？

θ	30°	34°	39°	40°	41°	42°	43°
$\sin\theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos\theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan\theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

(1) 39°　(2) 40°　(3) 41°　(4) 42°　(5) 43°　．〔第三冊 CH1〕

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 至 12 題，每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項．各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算．

(　　)7. 設 n 為正整數，符號 $\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^n$ 代表矩陣 $\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$ 自乘 n 次．令 $\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{bmatrix}$，請選出正確的選項．

(1) $a_2=1$

(2) a_1，a_2，a_3 為等比數列

(3) d_1，d_2，d_3 為等比數列

(4) b_1，b_2，b_3 為等差數列

(5) c_1，c_2，c_3 為等差數列． 〔第四冊 CH3〕

(　　)8. 設 $a>1>b>0$，關於下列不等式，請選出正確的選項．

(1) $(-a)^7>(-a)^9$　(2) $b^{-9}>b^{-7}$　(3) $\log_{10}\frac{1}{a}>\log_{10}\frac{1}{b}$　(4) $\log_a 1>\log_b 1$　(5) $\log_a b\ge\log_b a$ ．

〔第一冊 CH3〕

(　　)9. 設 $a<b<c$．已知實係數多項式函數 $y=f(x)$ 的圖形為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於 $(a,0)$、$(b,0)$ 兩點；實係數多項式函數 $y=g(x)$ 的圖形亦為一開口向上的拋物線，且跟 x 軸相交於 $(b,0)$、$(c,0)$ 兩點．請選出 $y=f(x)+g(x)$ 的圖形可能的選項．

(1)水平直線

(2)和 x 軸僅交於一點的直線

(3)和 x 軸無交點的拋物線

(4)和 x 軸僅交於一點的拋物線

(5)和 x 軸交於兩點的拋物線． 〔第一冊 CH2〕

(　　)10. 坐標平面上考慮兩點 $Q_1(1,0)$，$Q_2(-1,0)$．在下列各方程式的圖形中，請選出其上至少有一點 P 滿足內積 $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}<0$ 的選項．

(1) $y=\frac{1}{2}$　(2) $y=x^2+1$　(3) $-x^2+2y^2=1$　(4) $4x^2+y^2=1$　(5) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ ．

〔第三冊 CH3、第四冊 CH4〕

(　　)11. 設 F_1、F_2 為橢圓 Γ 的兩個焦點．S 為以 F_1 為中心的正方形（S 的各邊可不與 Γ 的對稱軸平行）．試問 S 可能有幾個頂點落在 Γ 上？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 0 ． 〔第四冊 CH4〕

(　　)12. 設實數組成的數列 $\langle a_n\rangle$ 是公比為 -0.8 的等比數列，實數組成的數列 $\langle b_n\rangle$ 是首項為 10 的等差數列．已知 $a_9>b_9$ 且 $a_{10}>b_{10}$ ．請選出正確的選項．

(1) $a_9\times a_{10}<0$　(2) $b_{10}>0$　(3) $b_9>b_{10}$　(4) $a_9>a_{10}$　(5) $a_8>b_8$ ． 〔第二冊 CH1〕

第二部分：選填題（占 40 分）

說明：第 A 至 H 題，每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分．

A. 設 k 為一整數．已知 $\frac{k}{3}<\sqrt{31}<\frac{k+1}{3}$，則 $k=$＿＿＿＿．〔第一冊 CH1〕

B. 設 a、b 為實數且 $(a+bi)(2+6i)=-80$，其中 $i^2=-1$．則 $(a,b)=$（＿＿＿＿,＿＿＿＿）．〔第一冊 CH2〕

C. 坐標平面中 $A(a,3)$，$B(16,b)$，$C(19,12)$ 三點共線．已知 C 不在 A、B 之間，且 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$，則 $a+b=$＿＿＿＿．

〔第三冊 CH3〕

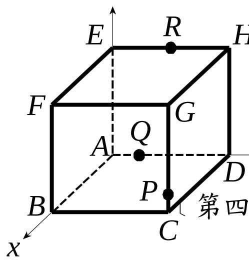
D. 阿德賣 100 公斤的香蕉，第一天每公斤賣 40 元；沒賣完的部分，第二天降價為每公斤 36 元；第三天再降為每公斤 32 元，到第三天全部賣完，三天所得共為 3720 元．假設阿德在第三天所賣香蕉的公斤數為 t，可算得第二天賣出香蕉的公斤數為 $at+b$，其中 $a=$＿＿＿＿，$b=$＿＿＿＿．〔第三冊 CH3〕

E. 坐標平面上，一圓與直線 $x-y=1$ 以及直線 $x-y=5$ 所截的弦長皆為 14．則此圓的面積為＿＿＿＿π．〔第三冊 CH2〕

F. 令 $\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$ 為坐標平面上兩向量．已知 $\overrightarrow{A}$ 的長度為 1，$\overrightarrow{B}$ 的長度為 2 且 $\overrightarrow{A}$ 與 $\overrightarrow{B}$ 之間的夾角為 $60°$．令 $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{v}=x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B}$，其中 x、y 為實數且符合 $6\le x+y\le 8$ 以及 $-2\le x-y\le 0$，則內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 的最大值為＿＿＿＿．〔第三冊 CH2、3〕

G. 設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8．已知外接圓圓心到 $\overline{AB}$ 的距離為 2，而到 $\overline{BC}$ 的距離為 7，則 $\overline{AC}=$＿＿＿＿．（化成最簡根式）〔第三冊 CH1〕

H. 如圖，在坐標空間中，A、B、C、D、E、F、G、H 為正立方體的八個頂點，已知其中四個點的坐標 $A(0,0,0)$、$B(6,0,0)$、$D(0,6,0)$ 及 $E(0,0,6)$，P 在線段 $\overline{CG}$ 上且 $\overline{CP}:\overline{PG}=1:5$，$R$ 在線段 $\overline{EH}$ 上且 $\overline{ER}:\overline{RH}=1:1$，$Q$ 在線段 $\overline{AD}$ 上．若空間中通過 P，Q，R 這三點的平面，與直線 AG 不相交，則 Q 點的 y 坐標為＿＿＿＿．（化成最簡分數）〔第四冊 CH2〕



答　案

第一部分：選擇題

一、單選題

1. (5)　2. (4)　3. (3)　4. (5)　5. (2)　6. (3)

二、多選題

7. (1)(2)(3)(5)　8. (1)(2)　9. (4)(5)　10. (1)(3)(4)　11. (1)(2)(5)　12. (1)(3)

第二部分：選填題

A. 16　B. $(-4,12)$　C. 19　D. -2，70　E. 51　F. 31　G. $4\sqrt{15}$　H. $\frac{15}{11}$

解　析

第一部分：選擇題

一、單選題

1. 因為小文的國文未達標準且兩項要求都要滿足，

所以只要英文與數學有一科未達標準就不符合資格．故選(5)．

2. 因為

$$a=2.6^9(2.6-1)=2.6^9\times1.6,$$

$$b=2.6^9(2.6^2-2.6)=2.6^9\times4.16,$$

$$c=2.6^9\left(\frac{2.6^2-1}{2}\right)=2.6^9\times2.88,$$

所以$b>c>a$．

故選(4)．

3. $$P(\text{丙白}\mid\text{甲乙同色})=\frac{P(\text{甲乙同色}\cap\text{丙白})}{P(\text{甲乙同色})}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}}{\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

故選(3)．

4. 由迴歸直線的斜率$m=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$，得$r=\frac{m\cdot\sigma_x}{\sigma_y}$．

因為各選項的m及σ_x都相等，且m為負，

所以哪一個選項的σ_y最小，其相關係數r就最小．計算各選項的σ_y：

(1) $\sigma_y=\sqrt{\frac{16+64+16}{3}}=\sqrt{\frac{96}{3}}$．　(2) $\sigma_y=\sqrt{\frac{4+25+9}{3}}=\sqrt{\frac{38}{3}}$．　(3) $\sigma_y=\sqrt{\frac{0+4+4}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$．

(4) $\sigma_y=\sqrt{\frac{16+16+0}{3}}=\sqrt{\frac{32}{3}}$．　(5) $\sigma_y=\sqrt{\frac{4+1+1}{3}}=\sqrt{\frac{6}{3}}$．　故選(5)．

5. 設紅、黃、綠三個籃子各裝 x 、$2y-1$、$2z-1$（ $x, y, z \in \mathbb{N}$ ）顆雞蛋．

依題意，得

$$x+(2y-1)+(2z-1)=24 \Rightarrow x+2y+2z=26$$

由上式得知 x 為偶數，討論方程式的解如下：

當 $x=2$ 時， $y+z=12$，有 $\begin{array}{c|c|c|c|c} y & 1 & 2 & \cdots & 11 \\ \hline z & 11 & 10 & \cdots & 1 \end{array}$，共11組解．

當 $x=4$ 時， $y+z=11$，有 $\begin{array}{c|c|c|c|c} y & 1 & 2 & \cdots & 10 \\ \hline z & 10 & 9 & \cdots & 1 \end{array}$，共10組解．

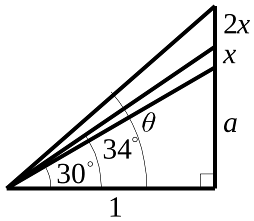
$\vdots$

當 $x=22$ 時， $y+z=2$，有 $\begin{array}{c|c} y & 1 \\ \hline z & 1 \end{array}$，共1組解．

因此，方法數共有 $11+10+\cdots+1=\dfrac{11(11+1)}{2}=66$ 種．

故選(2)．

6. 如圖，設底邊為1，10：00 時熱氣球高 a， 10：10 升高 x，



則 10：30 再升高 $2x$ ．因為

$$\begin{cases} a=\tan 30^\circ = 0.577 \\ a+x=\tan 34^\circ = 0.675 \end{cases},$$

所以 $x=0.675-0.577=0.098$ ．因此，

$$a+3x=0.577+3\times 0.098=0.871\approx \tan 41^\circ \text{ ．}$$

故選(3)．

二、多選題

7. 計算如下：

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&7\\0&8\end{bmatrix}\text{ ．}$$

(1) $a_2=1$ ．

(2) $a_1=1$， $a_2=1$， $a_3=1$ 為等比數列．

(3) $d_1=2$， $d_2=4$， $d_3=8$ 為等比數列．

(4) $b_1=1$， $b_2=3$， $b_3=7$ 不為等差數列．

(5) $c_1=0$， $c_2=0$， $c_3=0$ 為等差數列．

故選(1)(2)(3)(5)．

8. (1) 因為底數$-a<-1$，所以$(-a)^7>(-a)^9$ ．

(2) 因為底數$0<b<1$，指數$-9<-7$，所以$b^{-9}>b^{-7}$ ．

(3) 因為底數$10>1$，真數$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$，所以$\log_{10}\dfrac{1}{a}<\log_{10}\dfrac{1}{b}$ ．

(4) $\log_a 1=\log_b 1=0$ ．

(5) 錯！例如：當$a=2$，$b=\dfrac{1}{4}$時，滿足$a>1>b>0$，但

$$\log_a b=\log_2\frac{1}{4}=-2\text{小於}\log_b a=\log_{\frac{1}{4}}2=-\frac{1}{2}\ .$$

故選(1)(2) ．

9. 設$f(x)=A(x-a)(x-b)$，$g(x)=B(x-b)(x-c)$，$A>0$，$B>0$，則

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=A(x-a)(x-b)+B(x-b)(x-c)\\&=(x-b)\big(A(x-a)+B(x-c)\big)\\&=(x-b)\big((A+B)x-(Aa+Bc)\big)\\&=(A+B)(x-b)\left(x-\frac{Aa+Bc}{A+B}\right),\quad A+B\neq 0\ .\end{aligned}$$

① 當$\dfrac{Aa+Bc}{A+B}\neq b$時，圖形為與x軸交於兩點的拋物線．

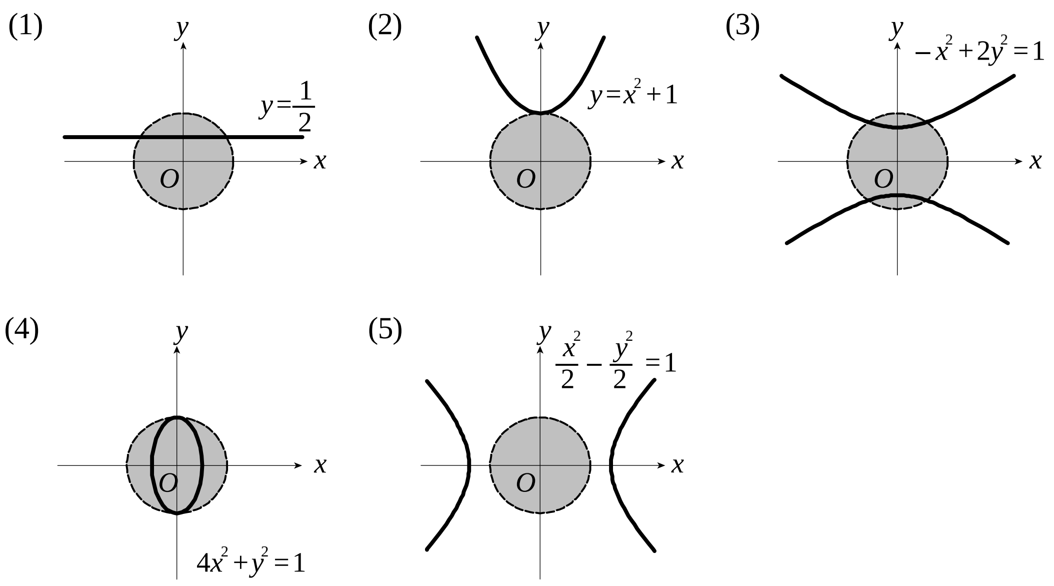
② 當$\dfrac{Aa+Bc}{A+B}=b$時，圖形為與x軸交於一點的拋物線．

故選(4)(5)．

10. 設$P(x,y)$，代入$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}<0$，得

$$(1-x,-y)(-1-x,-y)<0\Rightarrow(1-x)(-1-x)+y^2<0\Rightarrow x^2+y^2<1,$$

即P是圓心$(0,0)$，半徑1的圓之內部的點．



選項(1)(3)(4)有交點，故選(1)(3)(4) ．

11. 因為正方形的四個頂點到中心等距離，所以 S 的頂點必落在以 F_1 為圓心的圓 C 上．

又因為在所有橢圓上的點中，以頂點 A 距離 F_1 最近（近日點），所以圓 C 最多與橢圓 Γ 交 2 點，即 S 最多有 2 個頂點落在 Γ 上．

底下三個圖中的 S 分別有 0、1、2 個頂點在橢圓 Γ 上：

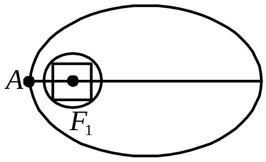


圖 1

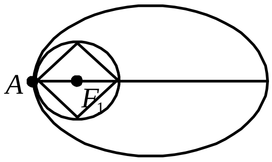


圖 2

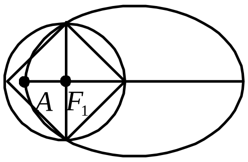


圖 3

三個圖中，圓 C 的半徑在圖 1 小於 $\overline{AF_1}$，在圖 2 等於 $\overline{AF_1}$，在圖 3 等於正焦弦長之半．

故選(1)(2)(5)．

12. 因為等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的公比為 -0.8，所以 $\langle a_n \rangle$ 是正負相間，且愈來愈接近 0．

因為 $\langle b_n \rangle$ 是首項為 10 的等差數列，所以 $\langle b_n \rangle$ 是從 10 開始遞增或遞減的數列．

又知 $a_9 > b_9$ 且 $a_{10} > b_{10}$，所以 b_9 與 b_{10} 有一個比負數還小，

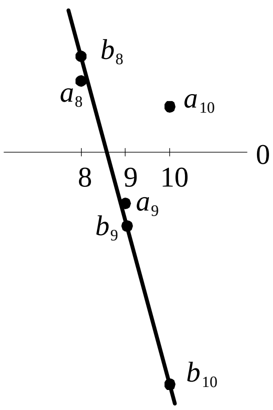
因此，$\langle b_n \rangle$ 為遞減數列，且公差為負．

(1) 因為 $\langle a_n \rangle$ 正負相間，所以 $a_9 \times a_{10} < 0$．

(2)(3) 因為 $\langle b_n \rangle$ 為遞減數列，所以 $b_{10} < b_9$．

又因為 a_9 與 a_{10} 一正一負，且 $a_9 > b_9$ 且 $a_{10} > b_{10}$，所以 $b_{10} < 0$．

(4)(5) 下圖的數列 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 滿足題意．



但 $a_9 < a_{10}$，$a_8 < b_8$．

故選(1)(3)．

第二部分：選填題

A. 由原式，得

$$k < 3\sqrt{31} < k+1 \Rightarrow k^2 < 279 < (k+1)^2 .$$

因為 $16^2 = 256$，$17^2 = 289$，所以 $k = 16$．

B. 由原式，得

$$(2a-6b)+(6a+2b)i = -80 .$$

根據複數相等的定義，得

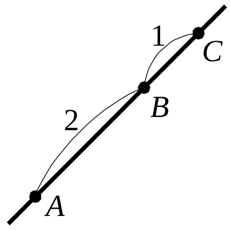
$$\begin{cases} 2a-6b=-80 \\ 6a+2b=0 \end{cases} .$$

解得 $a=-4$，$b=12$．

C. 如圖，因為 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$，所以由分點公式，得

$$(16,b)=\left(\frac{a+38}{3},\frac{3+24}{3}\right).$$

解得 $a=10$， $b=9$，即 $a+b=19$.



D. 依題意，可列得

$$40\big(100-(at+b+t)\big)+36(at+b)+32t=3720,$$

整理得

$$(280-4b)+(-4a-8)t=0 .$$

因為是恆等式，所以

$$\begin{cases}280-4b=0\\-4a-8=0\end{cases}.$$

解得 $a=-2$， $b=70$.

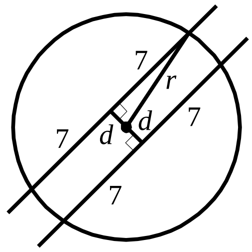
E. 因為兩平行直線 $x-y-1=0$ 與 $x-y-5=0$ 所截的弦等長，且其距離為

$$\frac{\left|(-1)-(-5)\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2},$$

所以弦心距 $d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$. 因此，圓的半徑

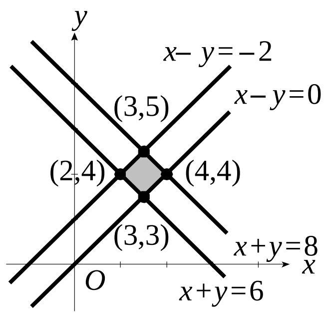
$$r=\sqrt{7^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{51} .$$

故此圓的面積為 51π .



F. 因為 $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=1\times2\times\cos60°=1$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right)\cdot\left(x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B}\right)\\&=x\left|\overrightarrow{A}\right|^2+y\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+x\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}+y\left|\overrightarrow{B}\right|^2\\&=x+y+x+4y\\&=2x+5y .\end{aligned}$$



又 x 、 y 的可行解區域如圖

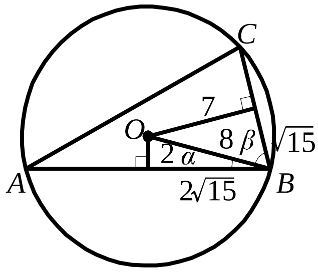
將四頂點代入 $2x+5y$，得

(x,y)	$(3,3)$	$(4,4)$	$(3,5)$	$(2,4)$
$2x+5y$	21	28	31	24

根據頂點法，當 $x=3$， $y=5$ 時， $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 有最大值 31 .

G. 依題意，得右圖．利用和角公式，得

$$\begin{aligned}\sin B &= \sin(\alpha+\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ &= \frac{2}{8}\times\frac{\sqrt{15}}{8}+\frac{2\sqrt{15}}{8}\times\frac{7}{8}\\ &= \frac{\sqrt{15}}{4}\ .\end{aligned}$$



再利用正弦定理 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$，得

$$\overline{AC}=2R\times\sin B=16\times\frac{\sqrt{15}}{4}=4\sqrt{15}\ .$$

H. 依題意，得 $G(6,6,6)$、$P(6,6,1)$、$R(0,3,6)$．

設 $Q(0,y,0)$， $0<y<6$，

Ω 為通過 P、Q、R 三點的平面．

由 Ω 與直線 AG 不相交，得知

Ω 與直線 AG 平行，因此，Ω 的法向量 $\overrightarrow{n}$ 與直線 AG 的方向向量 $\overrightarrow{l}$ 垂直．取

$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}=(-6,-3,5)\times(-6,y-6,-1)=(33-5y,-36,-6y+18)$

$\overrightarrow{l}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{6}(6,6,6)=(1,1,1)$

因為 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{l}$，所以 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{l}=0$，即

$$(33-5y,-36,-6y+18)\cdot(1,1,1)=0\Rightarrow 15-11y=0\ .$$

解得 $y=\dfrac{15}{11}$．